

L'UNITÉ DES MATHÉMATIQUES AUTOUR DE LA GÉOMÉTRIE

*Alain BERNARD
IREM de Montpellier.*

ATTENTION : la géométrie dont il est question ici n'est ni la géométrie "pure" des 19^e ou 20^e siècles, ni la géométrie vectorielle des "maths modernes", ni la géométrie des transformations. C'est la géométrie

Tout comme monsieur Jourdain faisait de la prose sans le savoir, nous faisons de la géométrie sans toujours le savoir !

ORIGINE DE L'ATELIER

Cette idée de rechercher l'unité des mathématiques autour de la géométrie a une double origine. D'une part la recherche pour des élèves de F4 (génie civil) en première année d'IUT d'une méthode simple leur permettant de se réconcilier avec les maths et de ne pas faire trop de complexes vis-à-vis de leurs camarades venus de TC.

D'autre part une expérimentation en Première scientifique dans le cadre d'une utilisation un peu originale des modules.

Cet atelier devait aussi me permettre de préparer un stage de l'IREM de Montpellier intitulé "une approche pédagogique déduite de l'histoire", stage de 3 jours en cours de réalisation sur ce thème. (Un polycopié devrait sortir à la fin du stage)

C'EST QUOI LES MATHS ?

Grande question toujours ouverte. Une approche a consisté à remarquer qu'une seule partie des mathématiques fut déclinée selon au moins une dizaine de variantes très différentes : la géométrie. D'ailleurs, existait-il une géométrie avant la géométrie grecque ?

Depuis les années soixante-dix, trois types de géométries fort différentes ont servi de base à l'enseignement scientifique: les géométries des figures, vectorielle et de transformations.

Alors quels liens unissent la géométrie d'Euclide, la géométrie analytique, la géométrie différentielle, la géométrie vectorielle et la géométrie des transformations ?

PLAN DE L'ATELIER

Première partie : position du problème

Trois courts extraits de livres récents précisent le thème abordé.

A) Algèbre linéaire et géométrie élémentaire - Jean Dieudonné, 1964

- B) Le problème de l'espace et du champ physique - Albert Einstein.
 C) Cours de géométrie algébrique - Jean Dieudonné, 1974

Deuxième partie : vers une solution déduite de l'histoire

Trois extraits :

- A) Psychogenèse et histoire des sciences - Piaget et Garcia
 B) L'Aperçu historique - Michel Chasles, 1875
 C) La géométrie - René Descartes, 1637

Troisième partie : une expérimentation en première

- A) Mathématiques et certitudes
 L'atelier présente enfin un résumé du " cahier de modules " d'une élève.
 B) La présentation dans ce cahier de l'approche des maths choisie. Cette présentation est faite lors du premier contact avec les élèves en 2 heures.
 C) Les applications de cette approche des mathématiques aux divers chapitres du programme.

I) POSITION DU PROBLÈME

A) Algèbre linéaire et géométrie élémentaire - Jean Dieudonné, 1964

Extraits de l'introduction ... toujours d'actualité :

" Ce volume donne un exposé détaillé et complet des notions et théorèmes d'algèbre linéaire élémentaire qui devraient constituer le bagage minimum du bachelier ès-sciences au moment où il entre dans les classes du 1^{er} cycle de l'Enseignement supérieur. L'orientation générale et la substance en ont été déterminés par le souci de préparer l'étudiant à assimiler le plus facilement possible l'enseignement *actuel* donné dans ces classes, qui devrait lui apparaître comme le *prolongement naturel* de ce qu'il a déjà appris.

Le fait qu'à l'heure présente il n'y a sans doute pas un bachelier sur mille qui serait en état de lire ce livre sans aide et sans fournir un travail personnel considérable en dit long sur l'incohérence de nos programmes d'enseignement.

.....

Les mathématiciens des siècles passés et plus encore les philosophes ou essayistes qui ont voulu parler de mathématiques, n'ont que trop bien réussi à ancrer dans l'esprit du public " cultivé " l'image d'une science immuable et figée, trônant sur un empyrée de " vérités absolues " transmises religieusement de génération en génération comme une révélation divine que l'on ne saurait se permettre de changer d'un iota, et ignorant les tâtonnements et les incertitudes des pauvres sciences dites " expérimentales ". Il y a plus de cent ans que les mathématiciens professionnels sont revenus d'une aussi naïve arrogance, mais il faudra sans doute encore bien des années d'efforts pour venir à bout de ces " clichés ", rien n'étant plus difficile que de modifier des " idées reçues ".

.....

L'Enseignement secondaire, qui par sa nature même est fort éloigné du niveau où se font les recherches mathématiques contemporaines, était tranquillement resté, avec quelques additions superficielles, ce qu'il était avant Grassmann et Cantor, c'est-à-dire essentiellement la géométrie d'Euclide, l'algèbre de Viète et Descartes, et, dans les classes terminales, un peu de Calcul infinitésimal. Il n'est donc pas surprenant que le fossé entre cet enseignement et celui que l'on donne dès l'entrée à l'Université n'ait cessé de s'élargir. Qu'on veuille bien, par exemple, considérer sans idées préconçues les sujets suivants, qui tiennent encore une place considérable dans l'enseignement des mathématiques au lycée :

I) Les construction " par la règle et le compas ".

II) Les propriétés des " figures " traditionnelles, telles que le triangle, les " quadrilatères " variés, les cercles et " systèmes de cercles ", les coniques, avec tous les raffinements accumulés par des générations de " géomètres " spécialisés et de professeurs en quête de problèmes d'examen.

III) La kyrielle des " formules trigonométriques " et de leurs transformations kaléidoscopiques permettant de superbes " résolutions " de " problèmes " relatifs aux triangles, et ce par des " calculs logarithmiques ", s'il vous plaît !

Que l'on ouvre maintenant au hasard un livre traitant des matières enseignées à partir de l'entrée à l'Université : on constatera aussitôt qu'il n'y est jamais même fait allusion à toutes ces belles choses.

On pourra objecter que l'enseignement des Universités est très abstrait.....

.....Il est bien vrai aussi que les formules trigonométriques sont tout à fait indispensables à trois professions éminemment respectables :

- 1°) les astronomes
- 2°) les arpenteurs
- 3°) les auteurs de manuels de trigonométrie.

Et puis, doit-on considérer que l'enseignement secondaire est destiné à accumuler toute une série de connaissances particulières, plus ou moins hétéroclites, en vue de préparer à toutes les profession imaginables : ou bien au contraire, faut-il essayer avant tout d'apprendre aux enfants à penser, sur un petit nombre de notions générales bien choisies, et laisser les techniques spéciales se ranger plus tard sans effort dans une " tête bien faite ".

Une autre caractéristique de la méthode mathématique contemporaine (sans doute trop connue pour qu'il faille beaucoup insister) est qu'elle permet de regrouper suivant leurs affinités profondes des théories d'aspect superficiel souvent fort différent. Or, plus sans doute que nulle part ailleurs, le cloisonnage des disciplines a atteint dans l'enseignement traditionnel un degré dont le ridicule peut difficilement être dépassé. On enseigne en effet peu ou prou, dans les années terminales des lycées et même jusqu'il y a peu de temps dans les

classes préparatoires des grandes Écoles (ainsi que dans beaucoup d'Universités étrangères) toute une impressionnante liste de "sciences":

- la "Géométrie pure",
- la "Géométrie analytique",
- la "Trigonométrie",
- la "Géométrie projective",
- la "Géométrie conforme",
- la "Géométrie non-euclidienne",
- la "Théorie des nombres complexes".

Non seulement toutes ces disciplines sont-elles en général **présentées isolément**, mais encore est-il fréquent de voir chacune s'efforcer d'ignorer totalement les autres et se targuer de son "indépendance"....."

Jean Dieudonné pose admirablement le problème de l'unité des mathématiques. Ce livre, écrit en 1964, réclame une modernisation de l'enseignement. Elle eut effectivement lieu et fut abandonnée rapidement.

Quelques lignes plus loin, Dieudonné écrit :

"Or on sait que sous ces défroques d'un autre âge se cache toujours une seule et même discipline, l'Algèbre linéaire des mathématiciens modernes, une des théories centrales et des plus efficaces de la Mathématique contemporaine, riche en applications les plus variées, de la théorie des nombres à la physique théorique, en passant par l'Analyse, la Géométrie, et la Topologie. Il me semble qu'il y a intérêt à familiariser le débutant le plus tôt possible avec les notions essentielles de cette discipline, à lui apprendre à "**penser linéairement**"....."

Dieudonné termine de préciser le thème de l'atelier. Nous savons aujourd'hui que la première tentative d'enseignement des mathématiques à partir de l'Algèbre linéaire fut abandonnée au profit d'un enseignement très différent basé sur la géométrie des transformations. Le langage algébrique fut ainsi supplanté par les activités géométriques.

L'unification de "toute une impressionnante liste de sciences" ne put se faire autour de l'Algèbre linéaire. Et chacune de reprendre son "indépendance"!

En relisant "l'impressionnante liste des sciences", on remarquera bien vite le point commun : la géométrie !

(La trigonométrie est la géométrie du triangle; pour les nombres complexes, voir plus loin). Nous ne pouvons consacrer autant de temps aux autres textes, mais celui d'Einstein est fondamental.

B) Le problème de l'espace, de l'éther et du champ physique - Albert Einstein, Études scientifiques (sic!).

"La pensée scientifique perfectionne la pensée préscientifique.

Puisque dans cette dernière, le concept d'espace a déjà une fonction fondamentale, établissons et étudions ce concept. Deux façons d'appréhender les concepts sont l'une et l'autre essentielles pour en saisir les mécanismes.

La première méthode s'appelle l'analytique logique. Elle veut résoudre le problème : comment les concepts et les jugements dépendent-ils les uns des autres ? Notre réponse nous place d'emblée sur un terrain relativement assuré ! Cette sécurité, nous la trouvons et la respectons dans la mathématique.

Mais cette sécurité s'obtient au prix d'un contenant sans contenu.

Car les concepts ne correspondent à un contenu que s'ils sont liés, même le plus indirectement aux expériences sensibles. Cependant aucune recherche logique ne peut affirmer cette liaison. Elle ne peut être que vécue. Et c'est justement cette liaison qui détermine la valeur épistémologique des systèmes de concepts.

Exemple : un archéologue d'une future civilisation découvre un traité de géométrie d'Euclide, mais sans figures. Par la lecture des théorèmes, il reconstituera bien l'emploi des mots point, droite, plan. Il reconstituera aussi la chaîne des théorèmes et même, d'après les règles connues, il pourra en inventer de nouveaux. Mais cette élaboration de théorèmes restera pour lui un vrai jeu avec des mots, tant qu'il ne pourra "se figurer quelque chose" avec les expressions point, droite, plan, etc... Mais s'il le peut et seulement s'il le peut, la géométrie deviendra pour lui un réel contenu.

Le même raisonnement s'applique à la mécanique et en général à toutes les sciences logico-déductives".

Texte très important pour la suite dans la mesure où l'Algèbre linéaire fut remplacée par la géométrie, science de l'espace, de la mesure de l'espace.

En fait la géométrie vectorielle et l'Algèbre linéaire proposaient la disparition des figures au profit de l'écriture algébrique seule, faisant des mathématiques une science fondée seulement sur le langage algébrique et le raisonnement axiomatique.

Cependant, l'Algèbre linéaire, espaces vectoriels, $\mathbb{R}^n$, IMPOSENT une bonne connaissance de l'espace, connaissance dont les concepteurs de la réforme des "maths modernes" n'avaient pas fait l'économie durant leurs études!

Quand un "archéologue" des années quatre-vingt-dix relit un livre de "maths modernes", le texte d'Einstein est limpide.

C) Cours de géométrie algébrique - Jean Dieudonné, 1974

Une courte phrase du début de l'introduction me semble importante :

"En premier lieu, et contrairement à ce que l'on croit souvent, la géométrie des Grecs est tout le contraire d'une géométrie "pure", c'est-à-dire d'où les calculs ont été éliminés le plus possible : une telle conception ne remonte qu'au XIX^{ème} siècle."

II) VERS UNE SOLUTION DÉDUITE DE L'HISTOIRE

Einstein nous oriente vers l'épistémologie pour tenter de préciser notre approche des mathématiques. Commençons par la définition du dictionnaire de sémiotique de Courtès : "L'épistémologie est l'analyse des axiomes, des hypothèses et

des procédures, voire des résultats qui spécifient une science donnée; elle se donne, en effet, comme objectif d'examiner l'organisation et le fonctionnement des approches scientifiques et d'en apprécier la valeur Toute théorie repose sur un nombre plus ou moins grand de concepts non définis qui sont à verser dans ce qu'on appelle l'inventaire épistémologique. Elle doit tout de même viser à réduire au maximum le nombre de ces concepts ”.

Avouons que nous sommes au coeur du débat géométrique, première science rédigée de façon axiomatique, doit-on le rappeler.

Courtès donne aussi une version très synthétique de cette définition :

ÉPISTÉMÉ: Attitude socioculturelle d'un groupe vis-à-vis de ses propres signes.

Par sa concision et sa précision, cette définition mérite une longue méditation.

A) Psychogenèse et histoire des sciences - Piaget et Garcia.

L'épistémologie génétique distingue 4 stades principaux :

- 1) Le stade sensori-moteur (0 à 2 ans)
- 2) Le stade préopératoire (2 à 6 ans)
- 3) Le stade des opérations concrètes (7 à 10 ans)
- 4) Le stade des opérations formelles (11 à 12 ans)

Dans le chapitre 4 de leur livre, les auteurs montrent la structuration, en 3 stades successifs, de l'espace géométrique chez l'enfant.

Piaget a enseigné pendant 10 ans l'histoire de la pensée scientifique. Pour ce qui nous intéresse, les 3 stades dégagés par Piaget et Garcia – intrafigural, interfigural et transfigural – suivent chronologiquement 3 étapes importantes de la construction du savoir mathématique.

1) LE STADE INTRAFIGURAL (avant 7 ans)

Le jeune perçoit et se représente à l'intérieur de la figure, du dessin, de l'objet observé. Il dessinera une cheminée penchée, perpendiculairement au toit d'une maison, et non pas verticale. Piaget précise : “ A ces relations intrafigurales, nous pouvons rattacher celles qui résultent d'une comparaison entre les propriétés internes de deux ou plusieurs figures, ce qui est bien différent de l'interfigural en tant que position des figures dans un espace englobant dont la structuration est alors nécessaire ”.

Remarque importante : La géométrie d'Euclide est une géométrie intrafigurale y compris les cas d'égalités des triangles qui résultent de la comparaison de propriétés internes de deux figures.

2) LE STADE INTERFIGURAL (7 à 8 ans)

Le jeune se repère par rapport à un espace englobant la figure.

Piaget précise : “ Ils comprennent d'emblée la nécessité de deux mesures conjointes pour fixer la position du point ”. (page 135)

Piaget continue : “ A passer aux directions, il est clair que le tracé d'une horizontale ou d'une verticale par le sujet exige des références interfigurales, en

opposition avec les perpendiculaires quelconques dont il a été question plus haut". (cheminée ou liquide dans un bocal)

Le jeune atteint ici la notion de repère dégagée par Descartes avec ses deux directions privilégiées bien différente de la notion d'angle droit tracé au hasard dans le plan. Selon ses auteurs, ce repérage se fait vers 7 ou 8 ans. Dès cet âge, un enfant peut situer

un objet (un point ?) dans le plan par 2 mesures (abscisse et ordonnée).

Piaget et Garcia précisent : " Tout changement de forme d'une figure est dû à des déplacements de parties et tout déplacement peut se traduire en relations interfigurales puisqu'il s'agit de comparer des positions initiale et finale avec leurs références respectives ".

Précision : Une transformation unique agissant sur un objet relève du stade interfigural par mesures des positions initiale et finale de l'objet. La géométrie des transformations des collèges relève du stade interfigural tant qu'on ne compose pas deux transformations (en 3^{ème} un peu).

3) LE STADE TRANSFIGURAL (11 à 12 ans)

Nous venons de dire qu'il ne s'agit pas seulement de transformer une figure. Pour atteindre ce 3^{ème} stade, le jeune doit comprendre la composition des transformations mais aussi il doit savoir " revenir en arrière " avec la transformation réciproque et prendre ainsi conscience de la notion de groupe de transformations. Bien entendu, ces travaux datent de l'époque du structuralisme. Page 143, Piaget écrit : " Le problème que soulève ces premiers faits et que nous retrouvons à propos de tous les autres est de comprendre pourquoi ces compositions de mouvements sont si tardives ".

RÉSUMÉ

STADE	GÉOMÉTRIE	EXEMPLE	ESPACE
INTRAFIGURAL 0 à 7 ans	Géométrie d'Euclide Propriétés des figures	Angle droit Cas d'égalités des triangles	Espace limité à la figure
INTERFIGURAL 7 à 8 ans	Géométrie analytique Transformation unique	Repère cartésien Homothétie	Compréhension de tout l'espace
TRANSFIGURAL 11 à 12 ans	Géométrie des transformations	Groupe des translations	Structuration de tout l'espace

B) L'Aperçu historique sur l'origine et le développement des méthodes en géométrie particulièrement de celles qui se rapportent à la géométrie moderne - M. Chasles, 1875

M. Chasles commence son "Aperçu" par une histoire de la géométrie en 5 époques de laquelle nous retiendrons les arguments suivants. (Ne pas oublier que "géométrie" signifie ici "mathématiques")

Première époque

"La géométrie prit naissance chez les Chaldéens et les Égyptiens. Thalès qui, né en Phénicie, alla s'instruire en Égypte et vint ensuite s'établir à Milet, y fonda l'école ionienne, d'où sont sorties les sectes des philosophes de la Grèce, et où commencèrent les premiers progrès de la géométrie.

Pythagore, né à Samos, disciple de Thalès, qui, comme lui, avait voyagé en Égypte, puis dans les Indes, vint se retirer en Italie, et y fonda son école, beaucoup plus célèbre que celle d'où il dérivait. Ce fut principalement à Pythagore, qui incorpora la Géométrie dans sa philosophie, et à ses disciples que cette science dut ses premières découvertes.....

Platon, comme les sages de la Grèce qui l'avait précédé, alla s'instruire dans les mathématiques chez les prêtres égyptiens, puis en Italie auprès des pythagoriciens.

De retour à Athènes, ce chef du lycée introduisit dans la Géométrie la *méthode analytique*, les *sections coniques* et la doctrine des *lieux géométriques*;

Découvertes mémorables qui firent de la Géométrie, pour ainsi dire, une science nouvelle, d'un ordre plus élevé que la Géométrie élémentaire cultivée jusque-là, et que les disciples de Platon appelèrent *Géométrie transcendante*.

Deuxième époque

"L'état de stagnation où languirent les lettres, chez les Arabes et les autres nations, après la destruction du Musée d'Alexandrie, dura près de mille ans; ce ne fut que vers le milieu du XV^e siècle que la Géométrie, suivant le mouvement général des sciences, reprit faveur".

Nous noterons que si les sciences languirent pendant plus de mille ans, on peut remercier les Arabes d'avoir récupéré les textes grecs puis d'avoir créé et développé l'Algèbre.

.....

"Viète, après avoir complété la méthode analytique de Platon, par l'invention de l'Algèbre, ou *logistique spéculaire*, destinée à mettre cette méthode en pratique dans la science des nombres, eut encore la gloire d'introduire cet instrument admirable dans la science de l'étendue, et d'initier les géomètres, par une construction graphique des équations du second degré, à l'art de représenter géométriquement les résultats de l'Algèbre; premiers pas vers une alliance plus intime entre l'Algèbre et la Géométrie, qui devait conduire aux grandes découvertes de Descartes, et devenir la "clef universelle des mathématiques".

Conclusion : Tout est là !

Les Grecs n'ont pas attendu l'Algèbre pour calculer en géométrie.

Mieux, ils sont allés s'instruire en Égypte, chez les Chaldéens et en Inde d'où ils ont ramené le système de mesure créé par ces civilisations !

Ce système de mesure - encore en vigueur aujourd'hui - associe un nombre à une figure géométrique. Dès lors, relire Dieudonné : " la géométrie des Grecs est tout le contraire d'une géométrie " pure ", c'est-à-dire d'où les calculs ont été éliminés le plus possible : une telle conception ne remonte qu'au XIX^e siècle ".

Et pour cause, les Grecs découvrirent en Afrique et en Asie un merveilleux système de mesure des segments, des surfaces et des solides indispensable au " bon " fonctionnement des sociétés.

Les Grecs ne créèrent pas les figures de la géométrie !

Les Grecs ne créèrent pas le système de mesure des éléments de ces figures !

Mais, admirable contribution, les Grecs - plus précisément les démocraties grecques - introduisirent la logique, la raison, dans ce système de mesure.

Par la création de l'Algèbre, les Arabes donnèrent aux systèmes d'écriture des nombres les règles qui leur manquaient. La règle d'Algèbre étant la première d'entre elles.

Viète et Descartes donnèrent beaucoup plus tard à l'Algèbre une écriture très performante encore utilisée de nos jours.

Avec eux, la géométrie numérique (pléonasme!) des Grecs devint la Géométrie algébrique moderne, cette même géométrie algébrique, " clef universelle des mathématiques " qui fédère aujourd'hui les recherches mathématiques du XX^e siècle.

C) La géométrie - Descartes, 1637

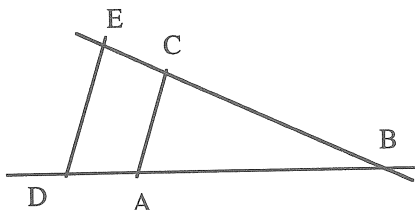
Livre fondamental du développement des mathématiques. Descartes met en place la géométrie algébrique. Voici le début du seul livre de mathématiques écrit par Descartes : " Tous les problèmes de géométrie se peuvent facilement réduire à tels termes, qu'il n'est besoin après que de connaître la longueur de quelques lignes droites, pour les construire.

Et comme toute l'arithmétique n'est composée, que de quatre ou cinq opérations, qui sont l'addition, la soustraction, la multiplication, la division, et l'extraction des racines, qu'on peut prendre pour une espèce de division : Ainsi n'a-t-on autre chose à faire en géométrie touchant les lignes qu'on cherche, pour les préparer à être connues, que leur en ajouter d'autres, ou en ôter, ou bien en ayant une, que je nommerai l'unité pour la rapporter d'autant mieux aux nombres, et qui peut ordinairement être prise à discrétion puis en ayant encore deux autres, en trouver une quatrième, qui soit à l'une de ces deux, comme l'autre est à l'unité, ce qui est le même que la multiplication,.....

Et je ne craindrai pas d'introduire ces termes d'Arithmétique en la Géométrie afin de me rendre plus intelligible.

La multiplication : Soit par exemple AB l'unité, & qu'il faille multiplier BD par BC , je n'ai qu'à joindre les points A & C , puis tirer DE parallèle à CA , & BE est le produit de cette multiplication.

La division : Ou bien s'il faut diviser BE par BD , ayant joint les points E & D , je tire AC parallèle à DE , & BC est le produit de cette division."



.....
" Mais souvent on n'a pas besoin de tracer ainsi ces lignes sur le papier, & il suffit de les désigner par quelques lettres, chacune par une seule. Comme pour ajouter la ligne BD à GH , je nomme l'une a & l'autre b , et écris $a + b$, et $a - b$ pour soustraire b d' a , et ab pour les multiplier ".....

Et la géométrie " numérique " des Grecs devint algébrique.

Seulement encore convient-il de se souvenir du système de mesure qui est à l'origine de ces milliers d'années de travail.

Euclide avait basé toute sa géométrie sur les figures. Les mathématiciens de la fin du vingtième siècle ont trop brutalement voulu baser l'enseignement sur le seul langage algébrique. Or, il me semble, pour reprendre les termes de Chasles, que la " clef universelle des mathématiques " est justement dans cette association entre les figures et l'écriture algébrique : la géométrie algébrique.

Ces justifications historiques sont longues mais encore insuffisantes. Pour terminer, voici une remarque de Lebesgue extraite de son petit livre : La mesure des grandeurs.

" Pour un mathématicien, calculer c'est raisonner, c'est analyser plus profondément les FAITS GÉOMÉTRIQUES SOUS-JACENTS ; pour un jeune élève, calculer c'est laisser aux symboles le soin de raisonner à sa place, c'est OUBLIER TOUT FAIT GÉOMÉTRIQUE pour ne plus voir que des symboles.

III) UNE EXPÉRIMENTATION EN PREMIÈRE

A) Mathématiques et certitudes

**Mesure ce qui est mesurable et rends mesurable
ce qui ne l'est pas. Galilée**

Les mathématiques paraissent bien viscéralement liées à la notion de certitude et cette certitude est acquise au moyen de la démonstration. nous sommes tous d'accord là-dessus. Peut-être un peu trop ! Jusqu'en 5è, les élèves ne font pas de démonstrations, alors ils ne feraient pas de maths!

La démonstration : un obstacle épistémologique du professeur.

Sans remettre en cause l'absolue nécessité de la démonstration, l'approche proposée dans l'atelier tente de voir si la certitude du mathématicien ne serait pas antérieure à la démonstration.

Enseigner les mathématiques consiste avant tout à enseigner une connaissance de l'espace (voir le texte d'Einstein). Qu'ils soient de fonctions, normé, métrique, hilbertien, vectoriel, ou même de probabilité, la notion d'espace est la notion centrale en maths, celle qui donne son contenu au contenant. La géométrie est comme son nom l'indique, un système de mesure d'un "espace". Pythagore, Thalès et leurs collègues sont allés apprendre le système de mesure Chaldéo-égyptien. Déjà à l'époque, il n'est pas envisageable de reconstruire toutes les mathématiques. Les géomètres grecs utilisent les mathématiques existantes et ce système de mesure contient déjà une approche de l'espace et des certitudes sur lesquelles ils ne peuvent pas revenir.

Dès lors, il y a deux utilisations possibles du système.

1) MESURE ET INCERTITUDE

Le système de mesure peut être utilisé sous forme d'une règle graduée.

Un enfant mesurant avec une règle graduée est certain de son résultat.

Par contre, un physicien se posera le problème de l'incertitude de sa mesure et le résoudra de façon scientifique.

2) MESURE ET CERTITUDE

Soit un segment de mesure 1 unité que l'on peut répéter "à l'infini" (postulat 2) ou découper pour obtenir des sous-multiples (livre 5 d'Euclide).

Un matheux construit un système de mesure théorique dans le but de mesurer de façon certaine des objets. La géométrie d'Euclide est une méthode de construction d'objets donnant des mesures avec certitude i.e. des objets mesurables et ce, avant d'être un système logico-déductif.

Conclusion : La certitude du géomètre provient - comme son nom l'indique d'abord du système de mesure théorique qu'il a construit avant de provenir de la démonstration.

Corollaires :

1°) L'approche expérimentée tente avant tout de repérer les traces du système de mesure dans les diverses notions de maths au niveau de l'enseignement secondaire.

2°) La démonstration doit rester un moyen au service du système de mesure et ne pas devenir une fin en soi faisant des maths " un contenant sans contenu ".

3°) Les mathématiques sont une recherche de certitudes sur l'espace aussi la notion centrale à mettre en place est la géométrie d'Euclide.

ATTENTION : Pas la géométrie " pure " du XIX^e siècle !!!

B) Présentation de l'approche

Cette présentation est faite en 2 heures lors du premier cours de l'année sous forme de questions - réponses.

Titre de la leçon : " C'est quoi les maths? A quoi ça sert les maths ?

1) LES BRANCHES DES MATHÉMATIQUES

GÉOMÉTRIE :	Figures
ALGÈBRE :	Équations
TRIGONOMÉTRIE :	Étude des triangles
ANALYSE :	Fonctions et suites
STATISTIQUES ET PROBABILITÉS	?????
ARITHMÉTIQUE :	Les nombres

Les colonnes sont remplies par les élèves durant la discussion.

2) LA GÉOMÉTRIE

1^{ère} étape : les figures : construction de figures à la règle et au compas.

Exemples : Tracer un cercle

Construire un triangle équilatéral

Partager un segment en 5 parties égales

2^{ème} étape : Mesurer les éléments des figures.

MESURER <====> Construire un objet géométrique (segment, angle, surface) et lui " attacher " un nombre.

Exemple fondamental : construire un segment-unité.

_____ <====> 1

Ceci nous donne une pré-définition de la géométrie :

Construire des objets mesurables OU Mesurer les éléments des figures.

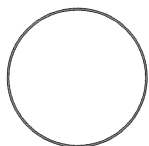
La géométrie comme son nom l'indique est avant tout un système de mesure.

Deux applications très différentes : La règle graduée, expérimentale.

La droite réelle, théorique .

A chaque point M de la droite correspond un nombre x , correspondance assimilée souvent à une identification par l'expression " au point x "!

Cas du cercle et du mythique nombre π :



En théorie, la mesure du cercle est $2\pi R$ et celle du disque πR^2 . Le nombre π est classiquement un nombre mesurant un objet géométrique. Et la valeur EXACTE de π est issue du cercle.

Surface et aire :



Une unité de surface : son aire est 1
nombre $\Longleftrightarrow$ figure

Figure Objet géométrique	Nombre Mesure	Dimension
Segment	Longueur	1
Surface	Aire	2
Solide	Volume	3

3^{ème} étape : la logique, les démonstrations.

Prenons par exemple le théorème de Pythagore.

A) Première version : Euclide

Dans un triangle rectangle, le carré **construit** sur l'hypoténuse est égal à la somme des carrés **construits** sur les côtés de l'angle droit.

B) Deuxième version :

Dans un triangle ABC rectangle en A, on a : $BC^2 = AB^2 + AC^2$

Sous entendu : 1) On **construit** un triangle ABC rectangle en A

2) On **mesure** les côtés AB, AC, BC et l'angle $\hat{A}$

3) On **déduit** la relation : $BC^2 = AB^2 + AC^2$

C) Troisième version :

Hypothèse : Soit un triangle ABC rectangle en A

Alors $\implies$ Conclusion : $BC^2 = AB^2 + AC^2$

L'implication logique : Théorème

Si les hypothèses sont vraies $\implies$ La conclusion est vraie

Les mathématiques deviennent un système de mesure déductif.

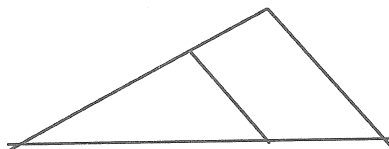
Nous arrivons à une " définition " de la géométrie et par extension de langage des mathématiques.

" Définition " de la géométrie : (pour ce qui nous concerne)

GÉOMÉTRIE $\iff$

- 1) CONSTRUIRE** des objets simples
- 2) MESURER** ces objets avec des nombres
- 3) DÉDUIRE** des théorèmes ou des propriétés avec l'implication logique.

Commentaire : Que ce soit en trigonométrie, en analyse, en calcul intégral, ou en probabilités, nous ne ferons rien d'autre ! Par contre, la géométrie a effectivement connu une extension importante avec la géométrie des transformations qui consiste plutôt à étudier la " position " des objets les uns par rapport aux autres.



En géométrie euclidienne, cette figure donne le **théorème de Thalès** par mesure des côtés proportionnels.

En géométrie des transformations, cette figure donne une **homothétie** et des triangles homothétiques avec les mêmes mesures.

.....et il s'agit de la même figure, des mêmes mesures !

C) Quelques applications

Nous allons rapidement évoquer 2 domaines privilégiés, la trigonométrie et les fonctions numériques, puis évoquer le cas très intéressant des probabilités. Nous terminerons par 2 chapitres dont la lecture selon cette approche est instructive, l'intégrale définie et les nombres complexes.

1) LA TRIGONOMÉTRIE : MESURES DANS LES TRIANGLES

" Penser linéairement " a écrit Dieudonné. Dans son livre, " Algèbre linéaire et géométrie élémentaire ", aucune figure ! Il développe d'ailleurs en 3 pages ce qu'il nomme trigonométrie i.e. les formules usuelles certes mais sans triangle, sorties de leur contexte.

Pourtant, il écrit **" penser linéairement "** et non pas **" penser au premier degré "** ! Il évoque involontairement sans aucun doute la **ligne** alors qu'il va tout écrire sous forme d'**écritures algébriques**. Il décrit des maths " au 1er degré " mais pense " linéairement ", tout le problème est là.

La trigonométrie est la première approche du plan. A ce moment, l'outil dont nous disposons est ce fameux et unique système de mesure.

Prenons 1 point : pas de mesure, pas de maths

Prenons 2 points : nous obtenons une droite sur laquelle nous savons mesurer.

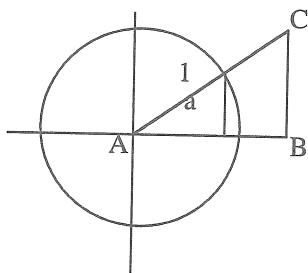
Prenons 3 points : nous obtenons un triangle donc 3 segments et une grande nouveauté, des angles. Nous savons mesurer les segments avec une règle graduée ou à partir d'une unité " prise à discrétion " comme le dit Descartes.

Que reste-t-il à faire ?

Mesurer les angleset relier les mesures des côtés avec les mesures des angles.
La mesure des angles se fait tant bien que mal avec des degrés - vieux souvenir de la base 60 des Babyloniens ? -ou mieux, avec des radians qui utilisent la même unité pour les côtés et les angles. Vieux rêve des mathématiciens : une unique unité !

Relions la mesure des côtés avec la mesure des angles.

Pour cela, nous utilisons le théorème de Thalès :



$$\frac{\cos a}{1} = \frac{AB}{AC}$$

Maintenant, nous savons mesurer et relier entre eux les éléments d'un triangle.
Quelques formules vont nous permettre de mieux relier entre elles ces mesures.

Pas de théorèmes en trigonométrie !

La trigonométrie est bien et uniquement l'utilisation du système de mesure sur la plus simple des figures, le triangle.

Une remarque pour finir : après une tentative en " maths modernes " d'avoir 2 écritures distinctes pour l'angle $\hat{A}$, objet géométrique d'une part, et sa mesure, le nombre a , d'autre part, on confond maintenant ces 2 notions - encore un cas d'identification figure-nombre un peu regrettable.

2) ANALYSE : LES FONCTIONS NUMÉRIQUES

Les fonctions numériques sont un grand domaine d'utilisation du système de mesure. Suivant les époques, on pourra préférer, au choix, l'une des définitions suivantes :

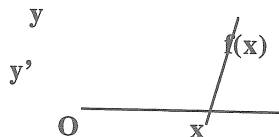
Définition : Une fonction est une relation binaire de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$

$$f : x \longrightarrow f(x)$$

Définition : Une fonction f transforme un nombre x donné en un nombre $f(x)$.
Je préfère aujourd'hui :

Définition Une fonction mesure un phénomène f .

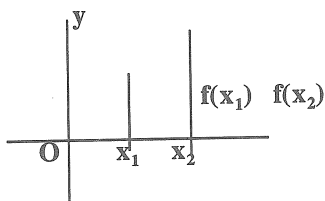
A chaque $x \in \mathbb{R}$ correspond une mesure $f(x)$



Dans un premier temps, l'important n'est pas d'avoir la courbe de la fonction f .
L'important est de porter dans deux directions du plan la mesure de la variable x et la mesure du phénomène étudié $f(x)$.

Dès lors, on utilisera le fait que l'étude des fonctions, qu'elle soit locale ou globale repose avant tout sur la mesure des segments.

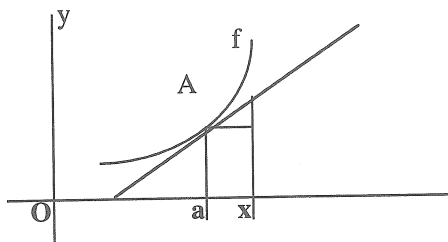
a) **Fonction croissante : comparaison pour les mesures x_1 et x_2 , des mesures $f(x_1)$ et $f(x_2)$.**



$$x_1 < x_2 \implies f(x_1) < f(x_2)$$

b) **Droite-tangente et nombre dérivé :**

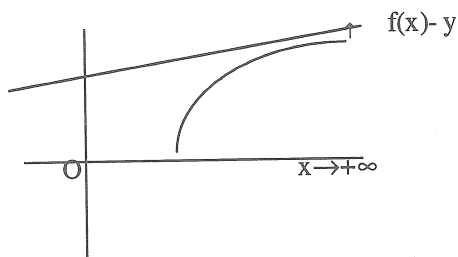
Le triangle caractéristique de Pascal donna l'idée du calcul infinitésimal à Leibniz.



$$\tan \alpha \approx \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

$$\text{et } f'(a) = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

c) **Droite-asymptote : bien sûr, purement un problème de mesure.**



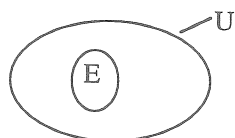
$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) - y = 0$$

PROBABILITÉS

Le cas des probabilités est très intéressant. Les mathématiques étant le domaine des certitudes, nulle probabilité avant le milieu du XVIII^e siècle avec Cardan, Pascal et Fermat. Cette branche des maths reprend alors le processus classique et commence par dénombrer - compter - avec des nombres entiers. Combinaisons et arrangements. Deux siècles plus tard, c'est peu en fait, les probabilités connaissent un grand développement grâce à la théorie de lamesure !

Que fait-on en proba ?

D'abord, on définit un Univers qui, comme son nom l'indique mesure 1 .
Ensuite, on mesure des parties de cet Univers appelées événements E.



$$\implies \Pr(E) = p$$

Nous créons ainsi un **espace de probabilité**.

Que vient faire le nom d' "espace" en probabilité ? Si ce n'est que nous ne sommes pas loin de faire de la géométrie.

Il y a quand même un petit changement :

Un proverbe chinois dit : " Il y a la grande Unité : l'infini, et la petite unité : 1 "

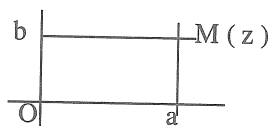
Effectivement, chez Euclide on utilise la grande unité pour mesurer l'Univers et les probabilistes utilisent la petite unité.

A part cela, Géométrie ou probabilité, on définit un espace dont on mesure certaines parties.

d) Les nombres complexes : NON, le plan complexe.

Les nombres complexes apparaissent en 1545 dans la résolution des équations du troisième degré. Cette naissance en Algèbre i.e. hors géométrie va avoir de sérieuses conséquences. Il faudra d'abord 250 ans pour trouver une écriture adéquate, $a + bi$, c'est-à-dire permettant d'imaginer les imaginaires comme pouvant se représenter par les points du plan. (Gauss, 1800, démonstration du théorème fondamental de l'Algèbre et quelques collègues de Gauss)

Nous disposons d'une bijection créant " le plan complexe " induit par un usuel problème de mesure, de 2 mesures dans un repère cartésien.



$$\iff z = a + bi$$

Pourtant 200 ans plus tard, nous enseignons toujours " les nombres complexes ", leurs affixes et leurs images.

e) Les intégrales

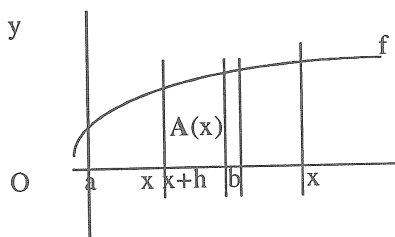
Purement un problème de mesure.

Quelle est la situation vers 1660 ?

Les géomètres savent mesurer les triangles, quadrilatères et polygones, figures délimitées par des segments. Une exception, le cercle.

Que fait-on alors après bien des essais infructueux ?

Nous conservons 3 côtés d'un rectangle et nous remplaçons le 4ème côté par la courbe d'une fonction positive. L'idée classique de la **construction de l'intégrale** est alors la suivante.



Chaque valeur de x donne une valeur $A(x)$ créant une fonction A mesurant la surface étudiée.

$$x \rightarrow A(x)$$

Pour f croissante, on a :

$$f(x).h < A(x+h) - A(x) < f(x+h).h$$

Si $h > 0$ il reste à diviser par h , à utiliser la continuité et une limite pour trouver :

$$A'(x) = f(x)$$

Cette construction de l'intégrale a le mérite d'utiliser des notions mathématiques et de justifier la recherche de primitives et l'intégrale elle-même, de resituer l'intégrale dans le champ des difficultés des mathématiciens, de montrer son utilité en même temps que son origine. De montrer enfin que l'intégrale comme toute l'analyse des fonctions numériques se construit sur des "faits géométriques sous-jacents" d'après Lebesgue.

Petite conclusion

La longueur de cet article ne permet pas de développer les attendus pédagogiques, les arguments historiques, la mise en place de l'approche choisie et les applications. Par exemple, manquent le lien entre la statistique et les barycentres ou l'étude des vecteurs. Les passionnés de la démonstration reprocheront parfois à cette approche d'être "réductrice". Pourtant, la certitude du mathématicien commence par l'usage théorique qu'il fait du système de mesure de l'espace.

Faire des mathématiques ne consiste pas à "laisser les symboles raisonner à notre place" mais bel et bien à faire de la géométrie devenue aujourd'hui algébrique et à étudier l'espace.

Pour cela, le mathématicien :

- 1°) construit des figures simples
- puis 2°) mesure les éléments de ces figures avec des nombres.
- puis 3°) déduit des propriétés avec la logique.