De quelques constructions instrumentales, "exactes" ou approchées de l'heptagone régulier.

Didier BESSOT & Jean-Pierre LE GOFF.

INTRODUCTION.

La question de la construction des polygones réguliers traverse l'histoire des mathématiques : problème géométrique à l'origine, problème arithmético-algébrique, dès lors que s'est posée la question de la mesure des grandeurs en termes trigonométriques et de divisibilité à l'infini, puis en termes de résolubilité d'équations dans le cadre de la théorie des structures algébriques. De même que pour cette question de la résolubilité des équations algébriques, qui connaît une longue période de tâtonnements entre algébristes italiens du XVIème siècle et théorie de Galois, on peut recenser, après les travaux d'Euclide au Livre IV de ses *Éléments* - sans doute hérités d'Hippocrate de Chio -, de nombreuses recherches sur les cas résistants, à commencer par celui de l'heptagone : ainsi des tentatives d'Archimède. Faute de rendre compte d'un atelier où furent étudiés une vingtaine de textes autour des polygones réguliers (d'Euclide à Gauss [1]), cet article évoque quelques-unes des recherches portant sur l'heptagone régulier. On y évaluera en particulier la place qu'occupent parmi elles les propositions, peu connues, d'Archimède (287-212 av. J.-C.), dont une sous la forme d'une version arabe restituée au XVIIIème siècle, de François de Foix de Candalle (1502-1594), donnant une "construction exacte" de l'heptagone, qu'il a cru devoir insérer à la suite du Livre VI de son édition des *Éléments* d'Euclide, parue en 1578 [2], et de François Besson (actif au XVIIème siècle), proposant plusieurs constructions approchées, tant dans sa *Pratique de Geometrie* que dans sa *Poligonometrie*, imprimées en 1626.

---

1 En passant par Albrecht Dürer, François de Foix, François Besson, Jean-François Nicéron et Sébastien Le Clerc. Un cycle de formation pour le P. A. F. du CAFPEN de Caen a prolongé ce travail par l'étude d'un fascicule plus complet puisque comportant, outre ceux déjà cités, des textes d'Archimède, d'Abraham Bosse, de Bernard Lamy, de Manesson-Mallet, de P. L. Wantzel et d'Eugène Catalan. L'ensemble de ces travaux fera l'objet d'une publication spécifique, comportant textes, traductions et analyses, à paraître.

2 *Euclidis Megarensis Mathematici Clarissimi Elementa, Libris XV...*, 2de éd., Paris, 1578. Le Livre VI traite de la similitude des figures rectilignes, et en particulier de la "section dorée". La construction de l'heptagone, imprimée en 1593, est insérée dans un exemplaire de cette édition, le seul venu à notre connaissance à ce jour.

LA QUESTION DES POLYGONES RÉGULIERS : POSITION DU PROBLÈME CHEZ EUCLIDE.

La question des polygones réguliers - si l'on excepte les problèmes de la construction du triangle équilatéral et de la description du carré, qui font l'objet des proposition 1 et 46 du Livre I -, est abordée de façon systématique par Euclide au Livre IV. En voici les sept définitions et les seize énoncés, dont deux lemmes (1 et 10), qui sont tous - fait exceptionnel dans les *Éléments* -, des problèmes de construction [3] :

LIVRE IV des *Éléments*.

Définitions.

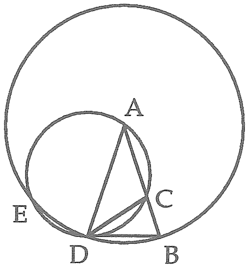
1. *Une figure rectiligne est dite être inscrite dans une figure rectiligne quand les angles de la figure inscrite touchent chacun à chacun les côtés de celle dans laquelle elle est inscrite.*
2. *Et semblablement une figure est dite être circonscrite autour d'une figure quand les côtés de la figure circonscrite touchent chacun à chacun les angles de celle autour de laquelle elle est circonscrite.*
3. *Une figure rectiligne est dite être inscrite dans un cercle quand chaque angle de la figure inscrite touche la circonférence du cercle.*
4. *Et une figure rectiligne est dite être circonscrite autour d'un cercle quand chaque côté de la figure circonscrite est tangente à la circonférence du cercle.*
5. *Et semblablement un cercle est dit être inscrit dans une figure quand la circonférence du cercle touche chaque côté de celle dans laquelle il est inscrit.*
6. *Et un cercle est dit être circonscrit autour d'une figure quand la circonférence du cercle touche chaque angle de celle autour de laquelle il est circonscrit.*
7. *Une droite est dite être ajustée dans un cercle quand ses limites sont sur la circonférence du cercle.*

Propositions.

1. *Dans un cercle donné, ajuster une droite égale à une droite donnée qui n'est pas plus grande que le diamètre du cercle.*
2. *Dans un cercle donné, inscrire un triangle équiangte à un triangle donné.*
3. *Autour d'un cercle donné, circonscrire un triangle équiangle à un triangle donné.*
4. *Inscrire un cercle dans un triangle donné.*
5. *Circonscrire un cercle autour d'un triangle donné.*
6. *Inscrire un carré dans un cercle donné.*
7. *Circonscrire un carré autour d'un cercle donné.*
8. *Inscrire un cercle dans un carré donné.*
9. *Circonscrire un cercle autour d'un carré donné.*

3 Cf. *Euclide. Les Éléments. Volume 1. Introduction générale. Livres I à IV*, trad. B. Vitrac, Paris, P. U. F., coll. *Bibliothèque d'Histoire des Sciences*, 1990, pp. 194 & 279]. Pour la distinction entre "construction" et "description", ibidem, pp. 280-281.

10. Construire un triangle isocèle ayant chacun des angles à la base double de l'angle restant.



Que soit proposée une certaine droite AB et qu'elle soit coupée au point C de sorte que le rectangle contenu par AB, BC soit égal au carré sur CA. Et que du centre A avec l'intervalle AB soit décrit le cercle BDE. Et que dans le cercle BDE, la droite BD soit ajustée, égale à la droite AC, qui n'est pas plus grande que le diamètre du cercle BDE. Et que AD, DC soient jointes ; et que le cercle ACD soit circonscrit autour du triangle ACD. Et puisque le rectangle contenu par AB, BC est égal au carré sur AC, que AC est égale à BD, le rectangle contenu par AB, BC est donç égal au carré sur BD.

Et puisqu'un certain point, B, a été pris à l'extérieur du cercle ACD, et qu'à partir de B, deux droites BA, BD ont été menées à la rencontre du cercle ACD, que d'une part l'une le coupe, d'autre part l'autre le rencontre, et que le rectangle contenu par AB, BC est égal au carré sur BD, la droite BD est donc tangente au cercle ACD.

Or puisque BD est tangente et qu'à partir du point de contact en D, DC a été conduite à travers le cercle, l'angle sous BDC est donc égal à l'angle dans le segment alterne du cercle, celui sous DAC. Or puisque celui sous BDC est égal à celui sous DAC, que celui sous CDA soit ajouté de part et d'autre. L'angle entier sous BDA est donc égal aux deux angles sous CDA, DAC. Mais l'angle extérieur sous BCD est égal à ceux sous CDA, DAC. Et donc celui sous BDA est égal à celui sous BCD. Mais celui sous BDA est égal à celui sous CBD puisque le côté AD est aussi égal au côté AB. De sorte que celui sous DBA est égal à celui sous BCD. Donc les trois angles, ceux sous BDA, DBA, BCD, sont égaux entre eux. Et puisque l'angle sous DBC est égal à celui sous BCD, le côté BD est aussi égal au côté CD. Mais BD a été supposé égal à CA. Et donc CA est égal à CD ; de sorte que l'angle sous CDA est aussi égal à l'angle sous DAC. Donc les angles sous CDA, DAC sont doubles de celui sous DAC. Or celui sous BCD est égal à ceux sous CDA, DAC. Et donc l'angle sous BCD est double de celui sous DAC. Et l'angle sous BCD est égal à chacun de ceux sous BDA, DBA. Et donc chacun des BDA, DBA est double de celui sous DAB.

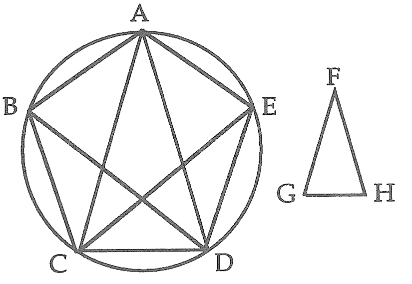
Donc un triangle isocèle a été construit, ABD, ayant chacun des angles à la base DB double de l'angle restant. Ce qu'il fallait faire.

11. Dans un cercle donné, inscrire un pentagone équilatéral et équiangle.

Soit ABCDE le cercle donné. Il faut alors inscrire un pentagone équilatéral et équiangle dans le cerçle ABCDE. Que soit proposé un triangle isocèle FGH ayant chacun des angles en G, H double de celui en F.

Et que dans le cercle ABCDE soit inscrit un triangle ACD, équiangle au triangle FGH de sorte que, d'une part l'angle sous CAD soit égal à l'angle en

F, d'autre part chacun de ceux en G, H soit égal à chacun de ceux sous ACD, CDA. Et donc chacun de ceux sous ACD, CDA est double de celui sous CAD. Alors que chacun des angles sous ACD, CDA soit coupé en deux parties égales par chacune des droites CE, DB. Et que AB, BC, {CD}, DE, EA soient jointes.



Or puisque chacun des angles sous ACD, CDA est double de celui sous CAD et qu'ils ont été coupés en deux parties égales par les droites CE, DB, les cinq angles, ceux sous DAC, ACE, ECD, CDB, BDA sont donc égaux entre eux.

Or les angles égaux s'appuient sur des circonférences égales. Donc les cinq circonférences AB, BC, CD, DE, EA sont égales entre elles. Et les circonférences égales sont sous-tendues par des droites égales. Donc les cinq droites AB, BC, CD, DE, EA sont égales ; donc le pentagone ABCDE est équilatéral. Je dis alors qu'il est aussi équiangle.

En effet, puisque la circonférence AB est égale à la circonférence DE, que BCD soit ajoutée de part et d'autre. La circonférence ABCD toute entière est donc égale à la circonférence EDCB toute entière, or d'une part l'angle sous AED s'appuie sur la circonférence ABCD, d'autre part l'angle sous BAE sur la circonférence EDCB. L'angle sous BAE est donc aussi égal à l'angle sous AED. Pour les mêmes raisons alors chacun des angles sous ABC, BCD, CDE est aussi égal à chacun des deux sous BAE, AED. Donc le pentagone ABCDE est équiangle. Et il a été aussi démontré équilatéral.

Donc dans le cercle donné, un pentagone équilatéral et équiangle a été inscrit. Ce qu'il fallait faire.

12. *Circonscrire un pentagone équilatéral et équiangle autour d'un cercle donné.*
13. *Inscrire un cercle dans un pentagone donné, lequel est équilatéral et équiangle.*
14. *Circonscrire un cercle autour d'un pentagone donné, lequel est équilatéral et équiangle.*
15. *Inscrire un hexagone équilatéral et équiangle dans un cercle donné.*

Porisme. À partir de ceci il est évident que le côté de l'hexagone est égal au rayon du cercle.

16. *Inscrire un pentadécagone équilatéral et équiangle dans un cercle donné.*

La construction du pentagone, qui présuppose établis plusieurs résultats des trois premiers Livres - et en particulier le partage en moyenne et extrême raisons (*Éléments*, II-22) -, repose essentiellement sur la proposition 10. Celle-ci fonctionne, dans la démarche synthétique euclidienne, comme un lemme dont l'utilité ne s'apprécie qu'après lecture de la proposition 11 ; dans une démarche didactique, il supposerait une analyse préalable, ici occultée. Ce lemme et l'analyse qu'il implique ne sont peut-être pas d'Euclide mais plus probablement d'un des géomètres antérieurs à Platon qui ont traité de la question des figures régulières, polygones ou polyèdres ; quoi qu'il en soit, il est à la base de certaines spéculations ultérieures sur la constructibilité des polygones réguliers à l'aide d'un triangle isocèle ayant des angles à la base multiples de l'angle au sommet : c'est la méthode adoptée, en particulier, par Archimède ; on verra en outre que François de Foix adoptera ce point de vue, largement développé auparavant par certains géomètres arabes. Le principe de la méthode d'Euclide appelle quelques remarques d'ordre géométrique.

PROLÉGOMÈNES GÉOMÉTRIQUES.

Rappelons que dans un n-polygone régulier [4], l'angle au centre α qui sous-tend chaque côté vaut $\frac{2\pi}{n}$, et qu'en conséquence, l'angle au sommet β du polygone vaut $\frac{(n-2)\pi}{n}$. Cet angle au centre permet le calcul immédiat du côté C_n et de l'apothème A_n d'un polygone régulier à n sommets, inscrit dans un cercle de rayon R : $C_n = 2\,R \sin\frac{\alpha}{2}$, et $A_n = R \cos\frac{\alpha}{2}$. Pour toute construction approchée qui se propose de trouver un bon écartement de compas E_n pour placer les sommets successifs du polygone sur un cercle donné, on pourra mesurer le degré d'approximation relative par l'écart à 1 du rapport de la valeur obtenue pour le côté E_n et de celle qui est attendue, et définissable trigonométriquement pour C_n :

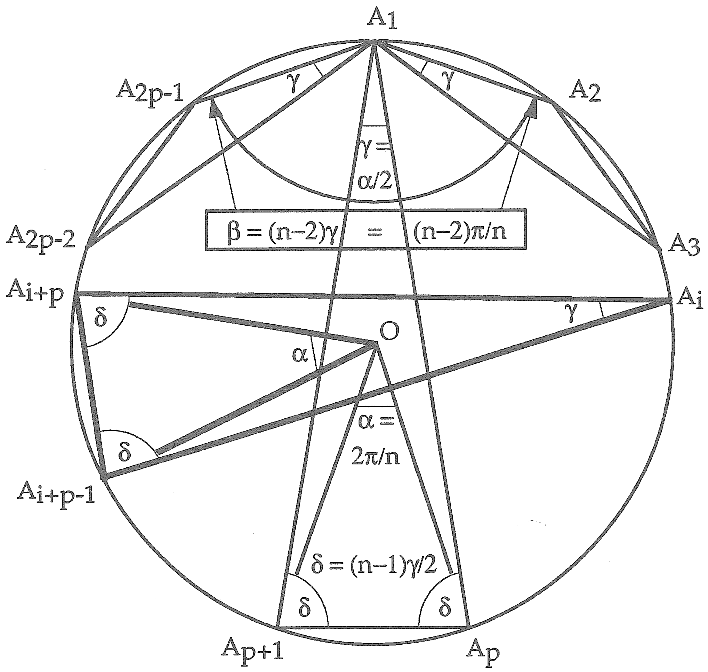
$$\text{Erreur relative} = \left|1-\frac{E_n}{C_n}\right| = \left|1-\frac{E_n}{2R\sin\frac{\alpha}{2}}\right| = \left|1-\frac{E_n}{2R\sin\frac{\pi}{n}}\right|.$$

Il est à noter cependant que le calcul effectif de cette erreur relative théorique, est lui-même entaché d'une approximation (bien sûr estimable), du fait qu'il conduit

4 Un tel polygone, inscriptible dans un cercle, est équilatère (ses n côtés sont égaux), et équiangle (ses n angles au sommet sont égaux), mais les deux conditions ne sont pas équivalentes : il est assez facile de le "voir" pour n pair, puisqu'un losange est équilatère mais non équiangle, et que l'on peut trouver du carrelage hexagonal en forme de tomette (hexagone régulier) comme en forme de navette (hexagone équilatéral oblong) ; en revanche un (2n+1)-polygone équilatère convexe n'apparaît pas d'emblée comme un polygone "déformable", sauf à considérer que l'on peut translater un sommet de ce polygone, régulier à l'origine - par exemple un pentagone -, sur la médiatrice du côté opposé et dans les limites imposées par l'inégalité triangulaire sur les quatre autres côtés, pris deux par deux : par exemple, la seconde construction d'un pentagone équilatère par Dürer produit un pentagone non équiangle ; on pourra voir à ce propos l'article de D. Bessot : "Quelques Problèmes de Constructions chez Dürer (un exemple de Géométrie Pratique)" in *Rôle des Problèmes dans l'Histoire et l'activité mathématique*, Actes du Colloque inter-IREM d'Histoire et d'Épistémologie des Mathématiques de Montpellier (31/05-01/06 1995), IREM de Montpellier, 1986.

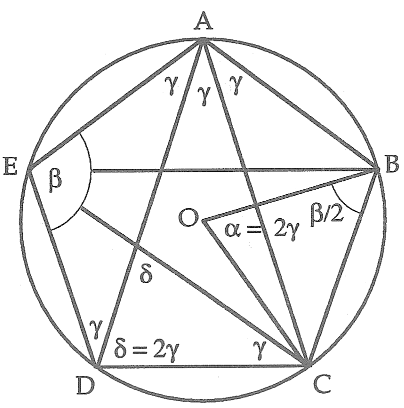
HORS-TEXTE 1.

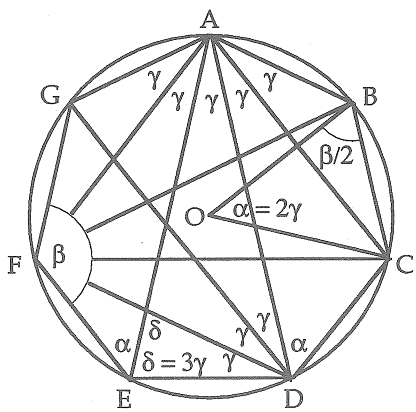
Cas impair : $n = 2p - 1$



Cas du pentagone : $n = 5$
$\alpha = 2\pi/5$, $\beta = 3\pi/5$, $\gamma = \pi/5$, $\delta = 2\pi/5$

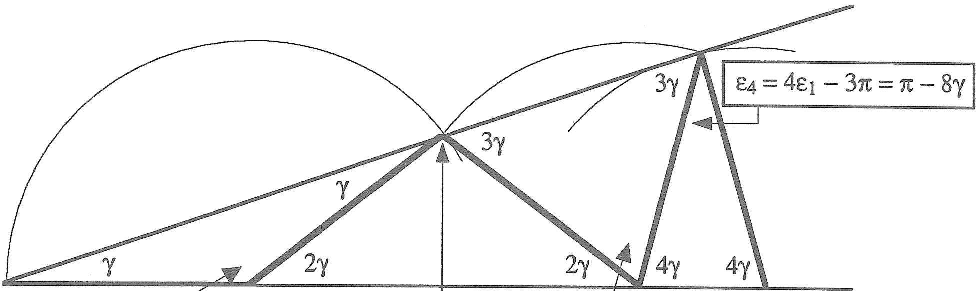
Cas de l'heptagone : $n = 7$
$\alpha = 2\pi/7$, $\beta = 5\pi/7$, $\gamma = \pi/7$, $\delta = 3\pi/7$





HORS-TEXTE 2.

La suite finie des triangles isocèles d'angles à la base multiples entiers d'un angle donné γ, s'inscrit entre deux droites d'angle γ, et sa longueur est déterminée par l'angle γ : pour que $\varepsilon_k = \pi - 2k\gamma$ existe il faut que $\gamma < \pi/2k$.



$\varepsilon_4 = 4\varepsilon_1 - 3\pi = \pi - 8\gamma$

$\varepsilon_1 = \pi - 2\gamma$

$\varepsilon_2 = 2\varepsilon_1 - \pi = \pi - 4\gamma$

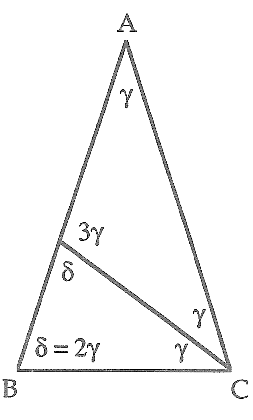
$\varepsilon_3 = 3\varepsilon_1 - 2\pi = \pi - 6\gamma$

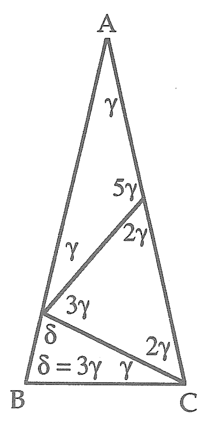
Une suite finie de tels triangles isocèles, lorsqu'ils forment un triangle isocèle d'angles à la base multiples entiers (p) de son angle au sommet, est déterminée par : $(2p+1)\gamma = \pi$. Donc, avec $n = 2p+1$, si $\gamma = \pi/n$, i. e. si $\varepsilon_1 = (n-2)\pi/n$, alors $\varepsilon_p = \gamma$.

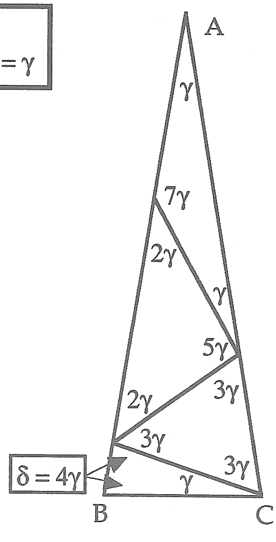
Cas du pentagone (le triangle d'or) : $n = 5$, $\gamma = \pi/5$, $\varepsilon_1 = 3\pi/5$, $\varepsilon_2 = \pi/5 = \gamma$

Cas de l'ennéagone : $n = 9$, $\gamma = \pi/9$, $\varepsilon_1 = 7\pi/9$, $\varepsilon_2 = 5\pi/9$, $\varepsilon_3 = 3\pi/9$, $\varepsilon_4 = \pi/9 = \gamma$

Cas de l'heptagone : $n = 7$, $\gamma = \pi/7$, $\varepsilon_1 = 5\pi/7$, $\varepsilon_2 = 3\pi/7$, $\varepsilon_3 = \pi/7 = \gamma$







le plus souvent à user d'une valeur approchée de C_n, celui-ci n'étant pas exprimable en des termes comparables à ceux de E_n : en effet, C_n n'est pas, dans les cas de non constructibilité à la règle et au compas, réductible à une expression de racines carrées emboîtées, et par conséquent on ne peut espérer de "simplification" avec l'expression de E_n, qui résulte le plus souvent de tentatives à la dite règle et au dit compas et se présente donc comme un tel emboîtement.

Si n est impair, égal à 2p - 1, et si l'on note A_1, A_2, ... , A_{2p-1}, ses sommets, on démontre aisément les trois points suivants :

1°) tout triangle $A_i A_{i+p-1} A_{i+p}$ est isocèle de sommet A_i ;

2°) son angle au sommet, capable, comme les (n - 3) autres angles inscrits de même sommet qui interceptent des arcs égaux sous-tendus par des côtés égaux, vaut $\gamma = \frac{\alpha}{2}$;

3°) chaque angle à la base, δ,vaut $\frac{\pi}{2} - \frac{\gamma}{2} = \frac{\pi}{2} - \frac{\alpha}{4} = \frac{(n-1)\pi}{2n}$ ou encore $\frac{(n-1)\gamma}{2}$.

De là résulte que la construction du pentagone régulier ressortit à celle d'un triangle isocèle dont les angles à la base sont doubles, chacun, de l'angle au sommet : c'est le fameux triangle qu'Euclide introduit en IV-10, avant de construire le pentagone en IV-11, et après avoir montré (en IV-2) que l'on peut inscrire un triangle semblable (ou équiangle) à un triangle donné, dans un cercle donné ; d'aucuns qualifieront "d'or" ce triangle. Dans le cas de l'heptagone, un triangle "d'or" serait tel que chaque angle à la base mesure trois angles au sommet ; c'est le point de départ de la "construction" d'Archimède, et de celle de François de Foix (voir les figures du Hors-texte 1).

De ce fait, un certain nombre de recherches à propos de l'heptagone régulier ou de polygones réguliers d'ordre impair vont tourner autour la mise en place d'une série finie de triangles isocèles dans un triangle isocèle donné, ABC : ceux-ci auront des angles au sommet et à la base multiples entiers de l'angle au sommet A ; par voie de conséquence, une voie de recherche alternative sera la division des côtés AB et AC en segments adéquats, bases ou côtés de ces triangles isocèles, de façon que le dernier triangle s'appuie sur la base BC du triangle donné et lui soit homothétique (voir les figures du Hors-texte 2). On trouve une première trace de ces préoccupations dans les textes d'Archimède, du moins tels qu'ils nous ont été transmis ; elles ont perduré dans le monde arabo-musulman, puis dans les recherches ultérieures d'un Viète, par exemple.

Notons que la constructibilité à la règle et au compas d'un polygone régulier dépend de celle d'un angle de mesure $\frac{2\pi}{n}$, ce qui équivaut à la constructibilité du segment de longueur $R \cdot \cos\left(\frac{2\pi}{n}\right)$ à partir du rayon R d'un cercle donné pour y circonscrire un tel polygone : dans la pratique, c'est d'ailleurs bien la connaissance de la corde ou côté du polygone, en fonction du rayon - corde égale au rayon, par exemple, dans le cas de l'hexagone -, qui conduit à celle du polygone par simple report de compas.

De là résulte que sont constructibles, par exemple, les polygones à 3, 4, 5, 6, et 15 côtés, envisagés par Euclide, ainsi que ceux dont le nombre de côtés est multiple des nombres précédents par une puissance de 2 : $n = 8, 12, 20$, etc., ce qui conduit un lecteur du Livre IV des *Éléments* à savoir construire les polygones réguliers à $3 . 2^p$, $4 . 2^p$ (ou 2^p, avec $p \geq 2$), $5 . 2^p$, et $15 . 2^p$ côtés.

Le polygone à 17 côtés est constructible lui aussi : cela sera en partie démontré en 1796 par Gauss, puis géométriquement par Ampère [5] et le 17-gone sera effectivement construit à la règle et au compas par H. Richmond en 1893. En revanche, les polygones à 7, 9, 11, 13, 14, 18, 19 côtés, par exemple, ne sont pas constructibles. En fait, Gauss montrera plus généralement, en 1801, qu'un polygone à $2^p . p_1 . p_2 ... p_r$ côtés, avec des p_i tous nombres de Fermat distincts et premiers [6], est constructible à la règle et au compas (la condition est nécessaire et suffisante, quoique seulement suffisante chez Gauss). Puis Pierre Laurent Wantzel (1814-1848) parachèvera en 1837 la question de la constructibilité à la règle et au compas dans ses *Recherches sur les moyens de reconnaître si un problème de Géométrie peut se résoudre avec la Règle et le Compas* [7].

UNE PREMIÈRE TENTATIVE : LES PROCÉDURES "INSTRUMENTALES" ATTRIBUÉES À ARCHIMÈDE (287-212 av. J.-C.).

Deux constructions attribuées à Archimède.

Nous avons connaissance des recherches d'Archimède sur cette question, par une source arabe ; il s'agit d'un écrit de Abū'l-Ḥasan Thābit ibn Qurra (826-901), intitulé : *Sur la Description de l'Heptagone régulier*, que l'auteur donne pour être la transcription d'un écrit du géomètre syracusain [8]. Les dix-sept propositions de cet ouvrage semblent relever de la méthode dite de *"neusis"*, c'est-à-dire de résolution par les coniques du fait de la "solidité" du problème, qui ressortit à la trisection de l'angle et relève donc, pour nous, du troisième degré : Archimède s'est d'ailleurs servi d'une telle méthode, par exemple dans *Le Livre*

---

5 Eugène Charles Catalan (1814-1894) reprend cette démonstration aux Théorèmex VI à VIII de ses *Théorèmes et Problèmes de Géométrie élémentaire*, éd. consultée : 3ème éd., chez Victor Dalmant, Paris, 1858, pp. 171-174.

6 Il s'agit des nombres de la forme $2^p + 1$, avec $p = 2^q$, dont les cinq premiers (pour $q = 0$ à 4 : 3, 5, 17, 257, 65537) sont premiers, mais dont le sixième, 4 294 967 297, contrairement à une conjecture de Fermat sur la primarité de tout terme de sa suite, est divisible par 641.

7 *"Recherches sur les moyens de reconnaître si un Problème de Géométrie peut se résoudre avec la règle et le compas"*, in *Journal de Mathématiques Pures et Appliquées* (dit de Liouville), t. 2, 1837, pp. 366-372. En particulier §§ I à IV.

8 Cf. 1°) *The Ancient Tradition of Geometric Problems*, de W. R. Knorr, éd. Birkhäuser, Boston, 1986, rééd. Dover, 1993, pp. 178-187 ; 2°) *Greek and Arabic Constructions of the regular Heptagon*, de J. P. Hogendijk, in *Archive for History of Exact Sciences*, vol. 30, n° 3/4, 1-X-1984, Éd. Springer-Verlag. Berlin, Heidelberg, New York, Tokyo, 1984, pp. 197-330.

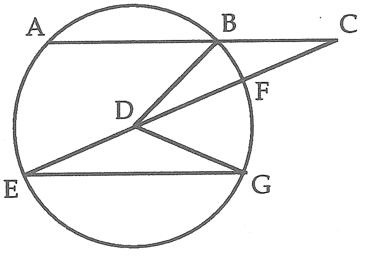
des Lemmes, où il s'emploie à quarrer l'*arbelon* et le *salinon*. On y relève d'ailleurs un lemme sans descendance théorématique, qui touche au problème de la triplication sans donnée [9], et qui pourrait bien ressortir aux recherches sur la trisection de l'angle ou sur la construction de l'heptagone régulier.

Construction d'un arc et de son triple : extrait du *Livre des Lemmes*.

Voici la proposition 8 du *Livre des Lemmes* (apocryphe ?), d'après la version arabe de Abū'l-Ḥasan Thābit ibn Qurra et la version latine d'Abraham Ecchellensis (1661) [10]. Cette proposition traite de la construction simultanée d'un arc et de son triple.

8.

Si on prolonge une corde quelconque AB d'un cercle, si on porte sur le prolongement un segment de droite BC égal au rayon du cercle, si on joint C au centre D du cercle par la droite CD et qu'on prolonge CD jusqu'au point E [sur le cercle], *l'arc AE sera triple de l'arc BF.*



Menons la parallèle EG à AB et les droites DB et DG. Comme les deux angles DEG et DGE sont égaux, l'angle GDC sera double de l'angle DEG [Euclide, I-32]. *D'autre part, l'angle BDC étant égal à l'angle BCD et l'angle CEG égal à l'angle ACE* [Euclide, I-29], *l'angle GDC sera double de l'angle CDB, l'angle entier BDG sera triple de l'angle BDC, et l'arc BG, qui est égal à l'arc AE, sera triple de l'arc BF* [Euclide, III-26], *ce que nous avons voulu démontrer.*

Construction d'un cercle divisé en sept parties égales : traduction du traité *Sur la Description de l'Heptagone régulier* d'Archimède d'après la traduction arabe de Thābit ibn Qurra.

La première construction connue d'un heptagone régulier se trouve dans *Le Livre de la Construction du Cercle divisé en sept Parties égales* (ou *Sur la Description de l'Heptagone régulier*), tel qu'il nous est parvenu dans une version arabe de Abū'l-Ḥasan Thābit ibn Qurra (826-901), corrigée et éditée au XVIIIème siècle par le Faqīr Muṣṭafā Ṣidqī. En voici les propositions 17 et 18 [11] :

---

9 Cf. 1°) *Œuvres d'Archimède*, T. III, trad. fr. de Ch. Mugler, Les Belles Lettres. Paris, 1971 ; ou 2°) *Les Œuvres d'Archimède*, trad. fr. de P. Ver Eecke, Bruges, 1945.

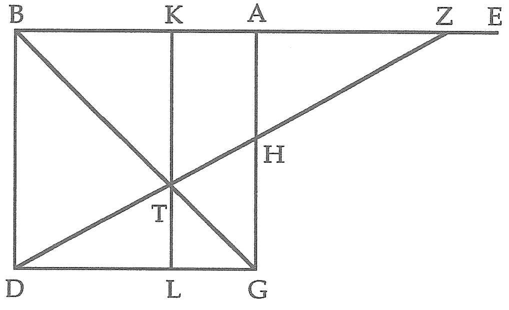
10 Trad. du latin par Ch. Mugler, *op. cit.*, pp. 148-149.

11 Trad. de l'arabe par J. P. Hogendijk, *op. cit.*, pp. 288-290 ; trad. de l'anglais par J.-P. Le Goff.

17.

Soit donné un carré, dont les sommets sont A, B, G et D. Prolongeons le côté AB en ligne droite, du côté de A, vers E. Traçons la diagonale BG.

Plaçons l'une des extrémités d'une règle au point D et l'autre sur la ligne EA, de sorte qu'elle coupe la ligne EA au point Z et que le triangle ZAH soit égal au triangle GTD [en aire].



Étendons à partir de T une ligne KTL parallèle à AG.

Je dis [1°)] *que le rectangle contenu par les lignes AB et KB est égal au carré sur la ligne ZA,* [2°)] *que le rectangle contenu par les lignes ZK et AK est égal au carré sur la ligne KB, et* [3°)] *que chacune des lignes BK et ZA est plus longue que la ligne AK.*

La raison en est la suivante : le rectangle contenu par les lignes GD et TL est égal au rectangle contenu par les lignes ZA et AH. De ce fait le rapport de la ligne GD, qui est [égale à] la ligne AB, à la ligne ZA est égal à celui de la ligne AH à la ligne TL.

Du fait que chacun des triangles ZAH et ZKT est semblable au triangle TLD, le rapport de la ligne AH à la ligne TL est égal à celui de la ligne ZA à la ligne LD, qui est [égale à] la ligne KB.

Donc le rapport de la ligne AB à la ligne ZA est égal au rapport de la ligne ZA à la ligne KB [c. q. f. d., 1°)].

Mais aussi, le rapport de la ligne TL, qui est [égale à] la ligne AK, à la ligne KT, qui est [égale à] la ligne KB, est égal à celui de la ligne LD, qui est [égale à] la ligne KB, à la ligne ZK [c. q. f. d., 2°)].

Donc le rectangle contenu par les lignes AB et KB est égal au carré sur la ligne ZA, le rectangle contenu par les lignes ZK et AK est égal au carré sur la ligne KB, et chacune des lignes ZA et KB est plus longue que la ligne AK. C'est ce que nous avions demandé.

18.

Soit à construire un cercle divisé en sept parties égales.

Traçons la ligne AB d'extrémités données. Marquons sur cette ligne deux points G et D tels que le rectangle contenu par AD et GD soit égal au carré sur la ligne DB, que le rectangle contenu par GB et DB soit égal au carré sur la ligne AG, et que chacune des lignes AG et DB soit plus longue que GD, au moyen de la construction précédente.

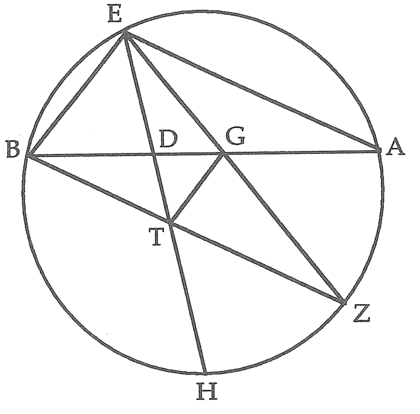
Construisons à l'aide des lignes AG, GD et DB un triangle GED tel que le côté GE soit égal à la ligne AG, et la ligne DE soit égale à la ligne DB.

Traçons les lignes AE et EB et circonscrivons autour du triangle AEB le cercle AEBHZ.

Prolongeons les lignes EG et ED en ligne droite jusqu'à [rencontrer] *la circonférence, et qu'elles s'y arrêtent aux points Z et H.*

Joignons BZ, et étendons à partir de G la ligne GT jusqu'à l'intersection [de BZ avec EH].

Du fait de l'égalité des côtés AG et GE du triangle AGE, l'angle EAG est égal à l'angle AEG, et l'arc AZ [est égal] *à l'arc EB.*



Puisque le rectangle contenu par les lignes AD et GD est égal au carré sur DB, qui est [égale à] la ligne DE, le triangle AED est semblable au triangle GED, et l'angle DAE est égal à l'angle GED, et l'arc ZH est égal à l'arc EB.

Ainsi les trois arcs EB, AZ et ZH sont égaux entre eux.

Donc ZB est parallèle à AE, et l'angle GAE, qui est [égal à] *l'angle GED, est égal à l'angle DBT.*

Puisque l'angle GED est égal à l'angle DBT, que l'angle GDE est égal à l'angle TDB, et que la ligne ED est égale à la ligne DB, la ligne GD est égale à la ligne DT, la ligne GE est égale à la ligne TB, et les quatre points B, E, G et T sont sur un même cercle.

Puisque le rectangle contenu par les lignes GB et DB est égal au carré sur la ligne AG, qui est [égale à] *la ligne EG, et que la ligne GB est égale à la ligne TE, tout pendant que la ligne DB est égale à la ligne DE, le rectangle contenu par les lignes TE et ED est égal au carré sur la ligne EG, et le triangle TEG est semblable au triangle GED. Ainsi l'angle DGE est égal à l'angle ETG.*

Mais l'angle DGE est double de l'angle GAE, donc l'angle GTE est double de l'angle GAE.

L'angle GTD est égal à l'angle DBE, donc l'angle DBE est double de l'angle GAE, et l'arc AE est double de l'arc EB.

Puisque l'angle DEB est égal à l'angle DBE, l'arc HB est aussi double de l'arc EB.

Donc chacun des deux arcs AE et BH peut être divisé en deux moitiés, égales entre elles et égale à l'arc EB.

Donc le cercle AEBHZ a été divisé en sept arcs égaux. C'est ce que nous avions demandé.

Loué soit le seul Dieu et qu'il soit béni celui [Mahomet] *après lequel il n'y a plus de prophète.*

Révision et rédaction de cette noble copie furent accomplies par la plume de son correcteur - qui vit dans la soif du Très-Haut, loué soit-Il -, Ḥajjī Muṣṭafā Ṣidqī ibn Ṣāliḥ, que Dieu lui accorde son pardon ainsi qu'à tous les musulmans.

Le dimanche, septième jour de Jumāda premier de l'année 1153 [31 juillet 1740].

Analyse et commentaires.

La proposition 8 du *Livre des Lemmes* ne manque pas d'étonner : il ne peut s'agir de trisection d'un angle ou d'un arc donné, puisque l'arc AE (ou BG) est un des résultats de la construction ; ce n'est pas non plus une triplication d'un arc donné, puisque l'arc BF n'est pas plus une donnée que l'arc AE ; d'ailleurs le problème de construire un arc triple connaît une solution élémentaire. C'est qu'il ne s'agit pas ici d'un problème, mais d'un théorème : les opérations de tracé étant ce qu'elles sont, il s'agit de démontrer que tel arc est triple de tel autre. On notera en outre que les arcs (ou les angles) résultant de cette construction dépendent du choix de la corde AB et possèdent certaines valeurs limites (de 0 à 45° pour l'arc BF et de 0 à 135° pour l'arc BG). Ce théorème, si l'on en croit le titre de l'ouvrage, est d'ailleurs un "lemme" propre sans doute à résoudre un autre problème, selon le même procédé synthétique que celui rencontré chez Euclide pour l'obtention du pentagone. Et pour une fois, le géomètre syracusain, ou son commentateur, ne nous livre pas son analyse. Cette construction est néanmoins à rapprocher de sa *Description de l'Heptagone régulier*, comme on va le voir, et elle pourrait bien être une trace des tentatives qu'on lui attribue de construire l'heptagone régulier.

À première vue, la proposition 17 de la *Description de l'Heptagone régulier* fonctionne comme le lemme du triangle d'or chez Euclide : une fois établie la ligne DZ de façon qu'il y ait égalité d'aires entre le triangle rectangle ZAH et le triangle DTG, on a la division B, K, A, Z de la ligne BZ, qui a les particularités suivantes : $KZ \cdot KA = KB^2$ et $BK \cdot BA = AZ^2$; établie sur la ligne BA donnée en la proposition 18, cette division selon les points B, D, G, A produit les égalités : $DA \cdot DG = DB^2$ et $BD \cdot BG = GA^2$, qui ont pour conséquence que l'arc EZ est triple de l'arc EB, ce qui permet d'exhiber un triangle isocèle ZEB idoine.

On notera cependant plusieurs écarts significatifs avec la démarche euclidienne pour le pentagone régulier :

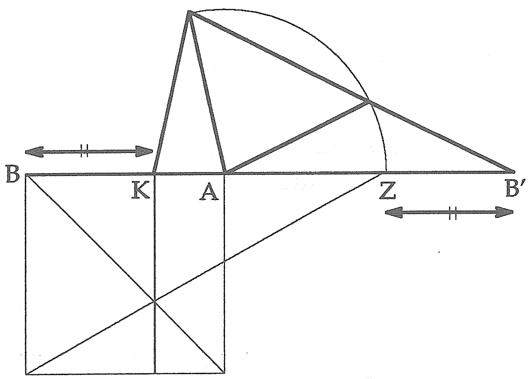
1°) il est clair que l'établissement de la ligne DZ est problématique : il ne peut être que le produit du tâtonnement, si tant est que l'on ait un moyen "d'ajuster" les aires de deux triangles (dont l'un est de hauteur TL variable et l'autre de dimensions AH et AZ variables) ; c'est en quelque sorte une "instrumentation théorique", analogue à celle de Héron dans ses *Mécaniques* pour la détermination de deux moyennes proportionnelles entre deux grandeurs données [12], à ceci près que le procédé de Héron est "praticable" : « s'il m'est donné

12 Rappelons que ce problème, qui consiste à trouver deux grandeurs X et Y telles que A soit à X comme X est à Y, et comme Y est à B, est dérivé et généralisateur de celui de la duplication du cube (X est racine cubique de 2, si A = 1 et B = 2) ; il conduit à un problème "solide", constructible

d'ajuster une règle mobile de façon à obtenir une certaine égalité de grandeurs (linéaires chez Héron, aréales chez Archimède), alors j'obtiens des relations qui produisent les grandeurs souhaitées ; ainsi j'ai inséré deux grandeurs en progression continue ou géométrique entre deux grandeurs - nous dit Héron -, ainsi j'ai déterminé, intérieurement et extérieurement à une ligne AB, deux lignes KA et AZ, qui sont dans le rapport des côtés du triangle "d'or" de l'heptagone - pourrait nous dire Archimède - » ;

2°) une telle construction ne relève pas de la règle et du compas ; une preuve absolue du fait relève de ce que nous en savons aujourd'hui : il est d'ailleurs assez facile, "grâce à Descartes", de montrer que "l'ajustement" de la proposition 17 - établir la droite DZ - revient à une équation du troisième degré telle que, par exemple : $t^3 + 2t^2 = t + 1$, où "t" est le coefficient directeur de DZ dans le repère orthonormé {B, [BA), [BD)} construit sur un carré de côté 1 ;

3°) la construction proposée dans le problème 18 n'est pas : "étant donné un cercle, y inscrire un heptagone régulier", i. e. : un rayon étant donné, trouver le côté de l'heptagone inscrit) ; mais plutôt : "soit à construire un cercle divisé en sept parties égales" ; autrement dit : « je ne sais pas encore construire l'heptagone régulier à rayon circonscripteur donné, faute de quoi, je propose au moins la construction d'un cercle divisé en sept parties égales, figure que je pourrai toujours reproduire à une échelle imposée ».



La démarche d'Archimède, ou de son commentateur, est donc très "imparfaite" en regard des canons imposés par celle d'Euclide. Elle manifeste cependant une volonté de poursuivre dans la voie indiquée par le géomètre alexandrin, avec la recherche d'un triangle "d'or" adapté au cas de l'heptagone, ou de la division adéquate d'une grandeur BA, jambe de ce triangle. Certes ce

par intersection de deux coniques (deux paraboles, $AY = X^2$ et $BX = Y^2$, ou une de ces deux paraboles et l'hyperbole $XY = AB$). Héron propose la construction d'un rectangle MNPQ de côté MN = A et MQ = B ; installant une droite mobile autour du sommet P de ce rectangle de sorte qu'elle coupe les prolongements des côtés MN et MQ en deux points R et S équidistants du centre O du rectangle, les segments NR et QS figurent les grandeurs X et Y. Cf. Héron d'Alexandrie, *Les Mécaniques ou l'élévateur des corps solides*. Texte arabe de Qusta Ibn Luqa et trad. de B. Carra de Vaux. Rééd. Les Belles Lettres, Paris, 1988.

triangle "d'or" n'est pas exhibé dans cette description : il le sera dans des versions arabes ultérieures ; mais il est facile de montrer qu'une fois construite la division B/K/A/Z sur la ligne donnée BA, à une similitude près, KA en est une base et AZ en est une jambe (voir la figure).

Cette démarche, qu'elle soit véritablement d'Archimède ou non, fait néanmoins (quasi sûrement) partie intégrante du corpus géométrique de l'antiquité grecque : la question de la construction approchée d'un heptagone est d'ailleurs évoquée par Héron dans ses *Mécaniques*, et l'on trouve un cercle divisé en sept parties "égales" et gravé près de l'entrée du Propylée à Épidaure ; les recherches grecques ont, en tout état de cause, suffisamment marqué le monde arabo-musulman pour que ses mathématiciens attribuent la tentative rapportée par Thābit ibn Qurra à l'un des géomètres qu'ils ont le plus commentés. On ne s'étonnera donc pas que la question de la description l'heptagone ait connu de multiples "solutions" durant la période florissante des mathématiques arabo-musulmanes ; d'autant que, si la "solution" archimédienne n'était pas satisfaisante pour un lecteur d'Euclide, une solution dans le solide, faisant intervenir les sections coniques, est beaucoup plus "acceptable" pour un géomètre du monde arabo-musulman : ceux-ci ont d'ailleurs produit de nombreux résultats par ce moyen dans le champ des problèmes à traduction algébrique "cubique" ; et François Viète se privera d'autant moins de ces méthodes que la question des équations du troisième degré sera réglée par les abacistes italiens du XVIème siècle. Les descriptions de l'heptagone régulier produites par les géomètres arabes, qu'elles soient dérivées de celle d'Archimède, comme par exemple celles de Aḥmad ibn Muḥammad ibn ᶜAbdaljalīl al-Sijzī [13] (qui exhibe une figure de l'heptagone inscrit et du triangle associé, analogue à celle d'Euclide, IV-11) et de Ibn-al-Haytham, ou qu'elles soient obtenues par intersection de coniques ont fait l'objet de traductions et d'études auxquelles le lecteur pourra se réferer[14].

*

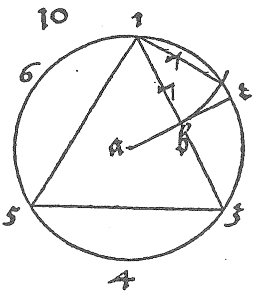
* *

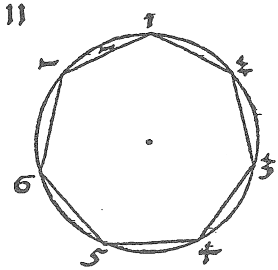
13 Texte arabe et trad. angl. par J. P. Hogendijk, *op. cit.*, pp. 290-316.

14 Outre les deux études de W. R. Knorr et de J. P. Hogendijk citées plus haut, il faut signaler : 1°) C. Schoy, "Græco-Arabische Studien nach mathematischen Handschriften der Vizeköniglichen Bibliothek zu Kairo, als Festgruss zum 70. Geburtstag des Herrn Prof. J. L. Heiberg, Kopenhagen, dargestellt", in *Isis*, n° 8, 1926, pp. 21-40, 2°) Roshdi Rashed, "La construction de l'heptagone régulier par Ibn-al-Haytham", in *Journal for the History of Arabic Science*, vol. 3, 1979, pp. 309-387, 3°) M. Clagett, *Archimedes in the Middle Ages*, vol. I, *"The Arabo-Latin tradition"*, Madison, 1964, et 4°) E. J. Dijksterhuis, *Archimedes*, Princeton, 1987.

UNE DESCRIPTION D'ALBRECHT DÜRER.

Albrecht Dürer (1471-1528), au début du Livre II de l'*Underweysung der Messung* ... [15], consacré à l'étude des surfaces, présente des constructions de polygones réguliers le plus souvent à partir de la donnée du cercle circonscrit ; ces constructions sont tantôt exactes, tantôt approchées, sans que ce caractère soit systématiquement souligné par Dürer. Il donne en tête la construction "usuelle" de l'hexagone régulier dont il déduit celle du triangle équilatéral inscrit dans le même cercle, en sautant un sommet sur deux. Il prend ensuite pour côté de l'heptagone régulier, toujours inscrit au même cercle, le demi-côté du triangle équilatéral [16].





Si R désigne le rayon du cercle donné, la longueur du côté supposé de l'heptagone est $E_7 = \sqrt{3}/_2\ R$ de valeur approchée à 10^{-4} près par défaut 0,8660 . R ; le côté C_7 de l'heptagone régulier étant égal à $2\,R \sin\frac{\pi}{7}$ et de valeur approchée à 10^{-4} près par excès : 0,8678, l'erreur relative commise dans cette construction est inférieure à $2{,}1 \,.\, 10^{-3}$.

C'est une construction assez voisine, fondée sur un triangle équilatéral, que l'on va retrouver chez François de Foix, à ceci près que l'auteur veut en faire la démonstration puisqu'il la donne pour être "exacte". Il est à noter cependant que Jérôme Cardan (1501-1576) s'est attaqué à cette question de la construction de l'heptagone, comme on peut le voir en ouvrant son *De Subtilitate Libri XXI,*

15 Albrecht Dürer, *Underweysung der Messung, mit dem zirckel und richtscheyt, in Linien ebnen und gantzen corporen*, Nuremberg, 1525. Plus récemment, a été publiée une traduction en français sous le titre: A. Dürer, *Géométrie*, trad. de l'allemand, introd., notes et annexes par J. Peiffer, Paris, éd. du Seuil, 1995.

16 Pour une étude des constructions par Dürer des autres polygones, voir : D. Bessot, "Quelques Problèmes de Constructions chez Dürer (un exemple de Géométrie Pratique)", *op. cit.*

publié à Lyon en 1554, au Livre XVI[17]. La construction de l'heptagone y est approchée et le commentaire de Cardan sur les propriétés de l'heptagone, qui précède sa construction montre qu'il a eu connaissance de plusieurs démonstrations défectueuses ou paralogistiques, pour produire une construction ou pour en montrer l'exactitude.

LA "CONSTRUCTION" DE L'HEPTAGONE RÉGULIER PAR FRANÇOIS DE FOIX (1593) : DANS LE DROIT FIL D'ARCHIMÈDE.

Quelques repères chronologiques.

François de Foix, comte de Candalle et évêque d'Aire [18], vécut de 1502 à 1594. Montucla nous dit qu'à l'instar de Ramus, il créa une chaire de géométrie à Bordeaux :

> *"et comme il s'étoit beaucoup adonné à la théorie des corps réguliers, il voulut qu'on ne pût être admis au concours qu'autant qu'on auroit trouvé quelque chose de nouveau sur ces corps. Cette loi étoit encore en vigueur au commencement de ce siècle ; car l'académie des sciences fut en 1703 prise pour juge d'une contestation élevée à ce sujet entre deux concurrens. On doit à M. de Candalle deux éditions des Elémens d'Euclide, augmentés de trois livres sur les corps réguliers et certains autres, qu'il nomme régulièrement irréguliers. Ces derniers qui avoient aussi fort occupé Hermolao Barbaro, patriarche d'Aquilée* [19]*, ne méritoient peut-être pas tant d'attention de leur part. Je dis peut-être ; car malgré l'inutilité apparente de ces spéculations, qui peut dire en géométrie qu'une vérité est absolument inutile ?"* [20]

IREM de LYON
BIBLIOTHEQUE
Université Claude Bernard -LYON I

---

17 *Hieronymi Cardani Mediolanensis Medici, De Subtilitate Libri XXI. Nunc Demum ab ipso autore recogniti atque perfecti.* Lugduni, Apud Guliel. Rouillium. 1554, Liber XVI, pp. 559-570. Le texte latin original et sa traduction sont à paraître aux côtés de ceux réunis ici.

18 Il s'agit de l'évêché d'Aire et de Dax. La cathédrale d'Aire-sur-L'Adour, dans les Landes, date du XIIème siècle.

19 Il s'agit sans doute de Daniele (et non *Hermolao*) Barbaro (1513-1570), auteur d'un traité de perspective, compilation de méthodes diverses empruntées à Piero della Francesca et à Dürer. L'ouvrage, paru à Venise en 1568 et incluant une étude des corps platoniciens, inspirée des traités de Piero della Francesca et Luca Pacioli, s'intitule : *La Pratice della Prospettiva di Monsignor Daniel Barbaro eletto Patriarca d'Aquileia, opera molto utile a Pittori, a Scultori, e Architetti.* Cet intérêt pour les corps réguliers est particulièrement vif chez les perspectivistes, qui y trouvent matière à exercices de style et à représentations spectaculaires. L'étude des corps réguliers et de leurs dérivés par troncature est, par exemple, l'objet essentiel de l'ouvrage de Wenzel Jamnitzer (1508-1585), paru à Nuremberg en 1568 : *Perspectiva corporum regularium...*

20 Montucla : *Histoire des Mathématiques*, Tome premier, Paris, An VII, p. 578. Pp. 208-9 du même tome, Montucla fustige déjà F. de Foix et évoque la stérilité des considérations sur les solides, dans les termes suivants : *"Après le 13e. livre* [des *Éléments* d'Euclide], *où la théorie des corps réguliers est ébauchée, on en trouve d'ordinaire un 14e. et un 15e. qui sont d'*Hypsicle *d'Alexandrie. Le préambule de ces livres le prouve évidemment. La théorie des corps réguliers*

François de Foix s'est donc signalé par une des nombreuses éditions des *Éléments* d'Euclide au XVIème siècle. Elle parut d'abord en 1566, à Paris chez Jacques du Puys, et comptait alors les XV Livres d'Euclide [21], auxquels il avait adjoint un XVIème Livre développant la théorie des solides réguliers. La seconde édition, en 1578 et chez le même libraire, vit l'adjonction nouvelle de deux Livres (XVII et XVIII) roulant sur le même sujet [22], que l'on retrouve aussi dans l'édition de 1602.

Dans cet ouvrage, François de Foix avait inséré un scholie à la proposition 16 du Livre IV, donnant une construction de l'heptagone, sans "démonstration" : cette construction s'avérant approchée, elle fit l'objet de critiques de la part de Clavius, dont on trouve la trace dans sa *Geometria practica* [23], après une critique de la construction de Dürer. Ce sont peut-être ces critiques, si elles ont été exprimées de vive voix par Clavius ou un autre avant que d'être imprimées, qui amenèrent François de Foix à rechercher une "démonstration" de sa construction et de son "exactitude", car il en livrera la teneur en 1593, en deux pages imprimées, retrouvées dans un exemplaire de la deuxième édition de cet ouvrage [24]. Viète, la même année, critiqua ce texte : il a donc été lu en 1593, mais il n'était guère connu depuis que par la version assez fidèle que Viète donna du

---

y est beaucoup plus profondément creusée, mais l'addition de ces deux livres n'étoit pas bien nécessaire, et ils auroient pu faire l'objet d'un traité à part. C'est probablement Théon *d'Alexandrie qui les y a joints. Nonobstant le peu d'utilité de ces livres, au moins dans l'ordre des élémens de la géométrie, un éditeur d'*Euclide, *M. de* Foix-Candalle, *n'a pas laissé d'y ajouter trois autres, où il semble avoir entrepris d'épuiser tout ce qu'on peut imaginer sur la comparaison des corps réguliers entre eux. Il y examine même de nouveaux corps régulièrement irréguliers, et formés en recoupant les réguliers d'une certaine manière ; sujet qui méritoit assez peu qu'un géomètre s'en occupât sérieusement. Au surplus cette théorie des corps réguliers pourroit être aujourd'hui comparée à ces anciennes mines abandonnées, parce que le produit n'en vaut pas la dépense. Les géomètres la regardent tout au plus comme un objet d'amusement, ou l'occasion de quelque problème singulier."*

21 Ou plutôt les XIII qui sont de lui, et les deux livres complémentaires sur les solides platoniciens, qui ont été rédigés sans doute par Hypsicle et adjoints vers le VIème siècle de notre ère ; ils étaient attribués à Euclide par extension.

22 Cf. Montucla, tome I, p. 565, et M. Caveing, dans son *Introduction générale* à l'édition des *Éléments* par B. Vitrac, Vol. 1, Paris, 1990, p. 77. M. Caveing signale que la version latine de F. de Foix suit la terminologie de l'édition de Zamberti, mais combine, pour les démonstrations, les apports de Campanus et ceux de Théon (repris par Zamberti).

23 *Christophori Clavii Bambergensis e Societate Jesu. Geometria practica.* Moguntiæ, chez Jean Albini, 1606, pp. 362-364.

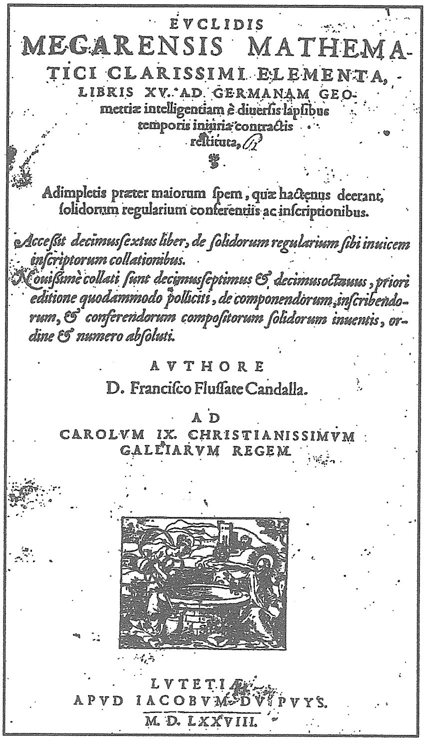
24 C'est un heureux hasard qui a mis entre les mains d'un auteur de cet article un exemplaire de la seconde édition (1578) de la version latine des *Éléments* d'Euclide par François de Foix, qui se trouvait en vente chez Madame Frérot, libraire-antiquaire de Caen. Qu'elle soit ici remerciée d'avoir permis que soit faite copie des deux pages dont il sera ici question.

premier théorème de François de Foix dans le Livre VIII de ses *Variorum de Rebus Mathematicis Responsorum* [25].

Deux pages de François de Foix sur la construction de l'heptagone.

A) Descriptif.

Les deux pages imprimées qui rendent compte de cette "construction" sont datées de 1593, - "*ætatis vero. 81.*", i. e. "à l'âge de 81 ans", précise son auteur -. Elles ont été insérées dans au moins un exemplaire de son édition d'Euclide de 1578 [26]. La page de titre de cet ouvrage est ainsi conçue :


EVCLIDIS
MEGARENSIS MATHEMA-
TICI CLARISSIMI ELEMENTA,
LIBRIS XV. AD GERMANAM GEO-
metriæ intelligentiam è diuersis lapsibus
temporis iniuria contractis
restituta,

Adimpletis præter maiorum ſpem, quæ hactenus deerant,
ſolidorum regularium conferentiis ac inſcriptionibus.

Acceßit decimuſſextus liber, de ſolidorum regularium ſibi inuicem inſcriptorum collationibus.
Nouiſſimè collati ſunt decimusſeptimus & decimusoctauus, priori editione quodammodo polliciti, de componendorum, inſcribendorum, & conferendorum compoſitorum ſolidorum inuentis, ordine & numero abſoluti.

AVTHORE
D. Franciſco Fluſſate Candalla.
AD
CAROLVM IX. CHRISTIANISSIMVM
GALLIARVM REGEM.

LVTETIÆ,
APVD IACOBVM DV PVYS.
M. D. LXXVIII.

EUCLIDIS / MEGARENSIS MATHEMA-/TICI CLARISSIMI ELEMENTA, / LIBRIS XV. AD GERMANAM GEO-/metriæ intelligentiam è diversis lapsibus / temporis injuria contractis / restituta, / ❦ / Adimpletis præter majorum spem, quæ hactenus deerant, / solidorum regularium conferentiis ac inscriptionibus. / *Acceßit decimusſextus liber, de ſolidorum*

---

25 *Variorum de Rebus Mathematicis Responsorum* (1593), in *Opera Mathematica, recognita Francisci à schooten*, rééd. Georg Olms, Hildesheim, 1970, pp. 359-364.

26 Voir la note précédente. Ces deux pages ne figurent pas, par exemple, dans les deux exemplaires de la B. N. de cet ouvrage (aux cotes V 1406 et Rés. V 108), ni dans les exemplaires de la Médiathèque de Nantes et de la Bibliothèque Sainte-Geneviève (Rés. V. fol. 30 - Inv. 36).

regularium ſibi invicem / inſcriptorum collationibus. / Noviſſimè collati sunt decimusſeptimus & decimusoctavus, priori / editione quodammodo polliciti, de componendorum, inſcribendo- / rum, & conferendorum compoſitorum ſolidorum inventis, or- / dine & numero absoluti. / AUTHORE / D. Francisco Flussate Candalla. / AD / CAROLUM IX. CHRISTIANISSIMUM / GALLIARUM REGEM. / [Vignette] / LUTETIÆ ; / APUD JACOBUM DU PUYS. / M. D. LXXVIII.

C'est-à-dire :

Les Éléments en XV Livres d'Euclide de Mégare[27]*, Mathématicien des plus illustres, restitués pour l'intelligence véritable de la Géométrie et en raison de diverses erreurs occasionnées par les injures du temps. Complétés de corollaires et d'écrits sur les solides réguliers, qui manquaient jusqu'à ce jour, en dépit de l'espoir des Anciens. On a ajouté un seizième Livre, consistant en la collection des solides réguliers inscrits mutuellement les uns dans les autres. Sont joints, tout nouvellement, un livre dix-septième et un livre dix-huitième, promis en quelque sorte dès la première édition, parachevés point par point et par ordre, traitant de l'invention des manières de composer, d'inscrire et de comparer les solides composés. L'Auteur en est le Seigneur François de Foix, de Candalle. [L'ouvrage est dédié] Au Roi très chrétien des Gaules, Charles IX. À Paris, chez Jacques du Puys. 1578.*

Les deux pages ajoutées dans le volume comportent deux figures à la plume, et courent sur une page de gauche et une belle page à la suite, verso et recto de deux feuilles reliées entre les pages 140 et 141 du volume. La page 140 comporte les propositions XXXVII et XXXVIII, qui traitent de la puissance d'un point par rapport à un cercle[28], et s'achève sur l'énoncé et la démonstration de la proposition XXXIX du Livre VI des *Éléments*, suivant ainsi les ajouts de Campanus : *"Si deux droites coupent des droites parallèles, elles sont découpées elles-mêmes dans les mêmes rapports"*[29]. Le Livre VI de cette édition de F. de Foix s'achève lui-même en page 141, sur un Corollaire, "réciproque" de la proposition précédente, ainsi rédigé : *"Si une ligne droite située entre deux parallèles découpe, sur des sécantes à ces parallèles, des lignes droites ayant des*

27 Suivant une confusion persistante à cette époque, Euclide d'Alexandrie est confondu avec le philosophe Euclide de Mégare.

28 Elles reprennent en fait, dans le cadre de la théorie des proportions, les propositions 35 et 36 du Livre III, où les énoncés font état de l'égalité de rectangles et non d'égalité d'un rapport et de l'inverse du rapport homologue, ou d'un carré et d'un rectangle dans le cas tangentiel, au lieu de l'insertion d'un moyen terme entre deux grandeurs. Ces propositions, interpolées, relèvent sans doute des remarques de l'un des premiers éditeurs d'Euclide, Campanus.

29 Propositio XXXIX. *"Si binæ rectæ à parallelis rectis secentur, ab eisdem in easdem rationes secantur."* Il s'agit d'une version "plus générale" de la propriété dite de Thalès, énoncée au Livre VI par Euclide, dans un triangle (Prop. VI-2).

rapports égaux, cette droite sera parallèle aux dites parallèles" [30]. Cette même page 141 se poursuit par un préambule aux Livres VII, VIII et IX.

Dans l'exemplaire consulté, le recto de la première feuille insérée reprend, sous forme imprimée, le Corollaire du haut de la page 141, permettant ainsi une lecture suivie du Livre VI, puis des propositions de F. de Foix sur l'heptagone, qui nécessitent, semble-t-il, la théorie des proportions. On voit par là que cette insertion a été programmée par l'auteur et ne doit rien au hasard ; on peut penser que les figures à la plume ont été le fait de l'auteur lui-même ou de copistes (choisis parmi ses élèves ?), pour pallier le manque de gravures aux emplacements réservés par l'imprimeur.

B) Traduction des deux propositions [31].

Description de l'Heptagone, insérée dans le Livre Sixième des Éléments, *œuvre de François de Foix de Candalle ; démonstration mathématique, tirée de son fonds en un ultime effort, en l'an de grâce 1593, et en vérité, à l'âge de 81 ans.*

PROPOSITION 40. PROBLÈME 12.

Construire un triangle isocèle, ayant chacun de ceux de ses angles qui sont à la base, triple de l'angle restant.

Soit donnée une ligne droite AB sur laquelle on établit un triangle équilatéral ABC, dont la hauteur CE soit divisée en deux au point D ; du centre A et de l'ouverture de compas AB, soit décrit le cercle BFC. Soit conduite une parallèle à la ligne droite AB, par le point D, à savoir la ligne droite DF, jusqu'à ce qu'elle rencontre le cercle, et soit achevé le triangle ABF qui sera isocèle. Qu'en outre, les lignes droites AB, AF soient menées au centre, et que la perpendiculaire CE les coupe en I et E [32]. *Que soit alors prolongée à volonté la ligne droite FB, jusqu'en H, et que, sur la ligne droite FI et au point I de celle-ci, soit construit l'angle FIH, égal à l'angle FBA (ce qui est possible par la 23ème proposition du Ier Livre des Éléments* [33]*) ; par le point I soit menée la ligne droite IK parallèle à FB ; et par le point B, soit menée, parallèlement à la ligne droite FI, la ligne droite BG, soit menée la ligne de jonction BI, et soit conduite sur IH la perpendiculaire BN. Je dis que les angles ABF, AFB, sont, chacun d'entre eux, triples de l'angle restant BAF. Comme ABF est isocèle, et que les angles du triangle HIF sont égaux, et que l'angle AFH est commun aux deux, les deux triangles isocèles ABF et HIF*

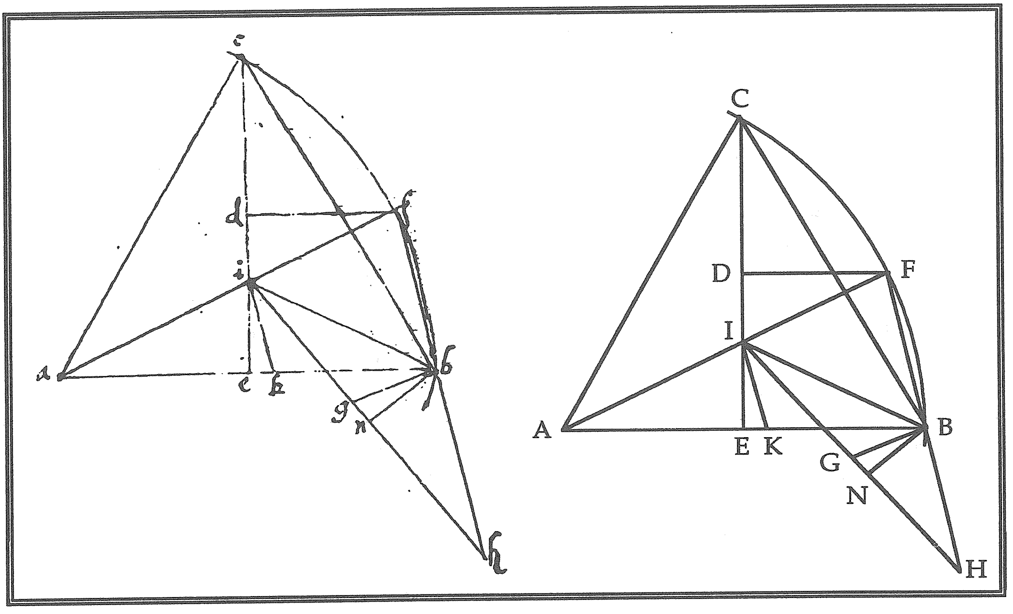
30 Corollarium. *"Si recta linea inter paralellas secuerit rectas à paralellis sectas, in easdem rationes, ipsa paralellis paralella erit"*. C'est en fait la réciproque de la proposition XXXIX.

31 Trad. du latin par J.-P. Le Goff. Le lecteur intéressé par le texte original trouvera une édition en fac-similé de ce texte et la transcription du texte latin original dans une publication sur les polygones réguliers, en préparation à l'IREM de B.-N.

32 Non pas respectivement, mais dans l'ordre où cette hauteur, abaissée de C, rencontre le couple de droites AB, AF.

33 Cette proposition d'Euclide énonce : *"Sur une droite donnée, et en un point sur elle, construire un angle rectiligne égal à un angle rectiligne donné"*, cf. [EUCLIDE, trad. Vitrac, t. I, 1990, p. 238].

seront équiangles et semblables. De ce qu'en vérité la hauteur CE du triangle ABC coupe la base AB au point E en deux parties égales et à angles droits, à savoir AEI, BEI, cela fait que les côtés AI, IB et les angles EAI, EBI, sont égaux mutuellement (d'après la 4ème proposition du VIème Livre des Éléments [34]*) vu que les côtés sont dans des rapports d'égalité. Au surplus, comme les trapèzes BFIK et IFBG* [parties] *des triangles ABF et HIF sont équiangles, qu'ils soient divisés en triangles semblables, par exemple en BIG, et IFB, semblables chacun à IBK, et IFB, avec les angles opposés coupés* [par IB] *(d'après la 20ème proposition du VIème Livre des Éléments* [35]*) et le triangle IBF qui leur est commun ; il s'ensuit (d'après le même argument) que la base BF de l'un* [des trapèzes] *est à sa diagonale BI comme la base FI de l'autre est à cette même diagonale BI, et en conséquence que BF et FI sont égales (par la 9ème proposition du Vème Livre des* Éléments [36]*).*



En outre et deuxièmement, comme les bases et les autres côtés des triangles isocèles ABF et HFI sont proportionnelles, si l'une quelconque des bases [des trapèzes], *comme BF était plus grande que l'autre, FI, le côté FI*

---

34 Cette proposition d'Euclide énonce : *"Dans les triangles équiangles sont en proportion les côtés autour des angles égaux, et homologues ceux qui sous-tendent les angles égaux"*, cf. [EUCLIDE, trad. Vitrac, t. II, 1994, p. 167].

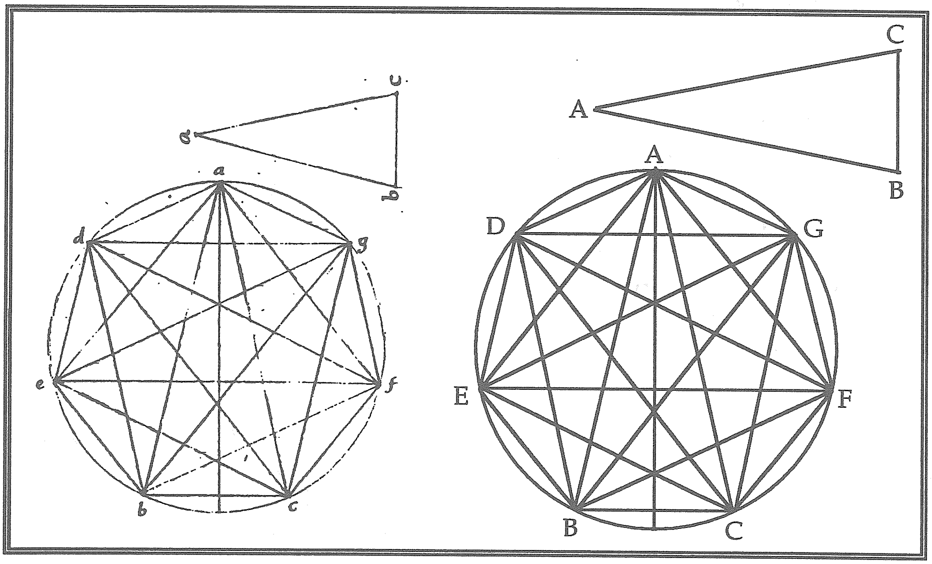
35 Cette proposition d'Euclide énonce : *"Les polygones semblables se divisent en triangles [qui sont] à la fois semblables, égaux en multitude, et homologues aux [polygones] entiers, et le polygone a relativement au polygone, un rapport doublé de celui du côté homologue au côté homologue."*, cf. [EUCLIDE, trad. Vitrac, t. II, 1994, p. 202].

36 Cette proposition d'Euclide énonce : *"Les [grandeurs] qui ont le même rapport relativement à une même [grandeur] sont égales l'une à l'autre ; et celles relativement auxquelles la même [grandeur] a le même rapport sont égales."*, cf. [EUCLIDE, trad. Vitrac, t. II, 1994, p. 87].

serait plus grand que le côté BF (du fait que sont semblables les triangles BFI et IFB) mais [ce côté FI serait] *aussi plus petit* [que BF] *puisqu'il est sans nul doute égal à la base IF supposée la plus petite, ce qui ne saurait être, donc les lignes droites BF et IF sont égales. De plus et en troisième lieu, dans les triangles égaux BFI, IFB, qui ont un angle BFI égal à l'angle IFB, l'une et l'autre des lignes droites FI et FB est commune à la base de l'un et au côté de l'autre des deux triangles semblables ABF & HFI, et réciproquement. Donc la base FB sera à la base FI, qui entourent des angles égaux* [FBI et IFB], *comme le côté FI est au côté FB et réciproquement (par la 15ème proposition du VIème Livre des* Éléments [37]*) et de là seront égaux les côtés du triangle isocèle IFB, IF et BF, et seront égaux les angles à la base IB. Donc l'angle extérieur FIB, ou FBI, du triangle AIB est égal aux deux angles intérieurs IAB et IBA* [à leur somme], *auquel l'on ajoute IBA (égal à celui qui est en A* [FAB]*), ce qui fait au total que l'angle AFB et par conséquent aussi l'angle restant ABF sera triple de l'angle BAF qui est de reste. Donc nous avons établi un triangle isocèle ABF ayant chacun des angles ABF et AFB qui sont à la base, triple de l'angle restant, qui est en A.*

PROPOSITION 41. PROBLÈME 13.

Dans un cercle donné, construire un heptagone équilatère et équiangle.



Étant proposé un cercle ABF, qu'y soit inscrit (par la 2ème proposition du IVème Livre des Éléments [38]*) un triangle ABC semblable au triangle*

37 Cette proposition d'Euclide énonce : *"Dans les triangles égaux ayant un angle égal à un [angle], les côtés autour des angles égaux sont inversement [proportionnels] ; et parmi les triangles ayant un [angle] égal à un angle, ceux dont les côtés autour des angles égaux sont inversement [proportionnels], ceux-là sont égaux."*, cf. [EUCLIDE, trad. Vitrac, t.II, 1994, p. 190].

38 Cette proposition d'Euclide énonce : *"Dans un cercle donné, inscrire un triangle équiangle à un triangle donné."*, cf. [EUCLIDE, trad. Vitrac, t. I, 1990, p. 470].

donné ABC (d'après la proposition précédente) ayant chacun des angles à la base BC, triple de l'angle restant en A ; soit construit dans ce même cercle, l'angle EAB en un point A, par exemple, de la ligne droite AB, et l'angle DBA au point B de la ligne droite AB, l'angle ACG au point C de la ligne droite AC, et l'angle GAF au point A de la ligne droite AG, tous égaux chacun à l'angle BAC du triangle donné ; une fois jointes les lignes droites AD, AG, BE, CF, BD, CG, DE, et GF, je dis que l'heptagone ADEBCFG est équilatère et équiangle. Comme l'angle ACB du triangle donné ABC est triple de l'angle BAC, et que les angles BCE et DCA sont (par construction) égaux chacun à l'angle qui est en A, ces deux angles BCE et DCA constituent les deux tiers de l'angle BCA (d'après ce qui précède), alors l'angle restant ECD (ce qui reste pour compléter l'angle BCA) sera égal à ce même angle BAC, et les trois angles ACD, DCE et ECB sont chacun égaux à cet angle BAC, dans le dit cercle ; sont donc égales à la base BC de ce triangle, les lignes droites qui sous-tendent ces angles, à savoir AD, DE, EB (par la 29ème proposition du IIIème Livre des Éléments [39]) et qu'ils comprennent des angles égaux tels que AED, DBE, ECB, etc., puisqu'ils sont constitués par des sections égales d'un même cercle (par la 26ème proposition du IIIème Livre des Éléments [40]) ; ensuite il est manifeste que les côtés restants de l'heptagone, CF, FG, GA sont aussi égaux ; et que les sept côtés de l'heptagone sous-tendent et forment des angles égaux. En conséquence, nous avons construit un heptagone équilatère et équiangle, ADEBCFG, inscrit dans le cercle ABF donné.

C) Analyse et commentaires.

La méthode est clairement celle du triangle "d'or", puisque François de Foix cherche à établir un triangle isocèle aux angles à la base triples de l'angle au sommet. C'est une construction à la règle et au compas, qui donne d'ailleurs une approximation satisfaisante du côté de l'heptagone inscrit dans le cercle circonscrit au triangle ABF, dont le centre est situé sur IE ; mais elle ne répond pas à la déclaration d'intention : "*Dico angulorum ABF, AFB unumquemque triplum esse reliqui BAF*".

François de Foix a commis un paralogisme en se laissant entraîner par l'effet visuel d'un résultat graphique proche de la symétrie parfaite : c'est la qualité de son approximation qui l'a sans doute induit à voir, donc à penser les trapèzes BFIG et BFIK comme égaux et superposables, et à utiliser abusivement la 20ème proposition du VI *Élément*. Mais une construction analogue à la sienne, pour une autre position de F sur le cercle (ou de D sur la médiane), par exemple, convaincra rapidement tout un chacun que deux triangles isocèles semblables ne se découpent pas nécessairement mutuellement en trapèzes semblables : ceux-ci

39 Cette proposition d'Euclide énonce : " *Dans les cercles égaux, les circonférences* [i. e. les arcs] *égales sont sous-tendues par des droites égales*", cf. [EUCLIDE, trad. Vitrac, t. I, 1990, p. 445].

40 Cette proposition d'Euclide énonce : "*Dans les cercles égaux s'appuient sur des circonférences* [i. e. les arcs] *égales, qu'ils soient situés aux centres, ou sur les circonférences*", cf. [EUCLIDE, trad. Vitrac, t. I, 1990, p. 442].

seront isocèles et d'angles égaux, mais leurs côtés ne sont pas nécessairement homologues, comme ne le sont pas, par exemple, ceux de deux trapèzes découpés par trois parallèles sur deux concourantes : l'équiangularité est une condition suffisante de similarité pour les triangles, pas pour les trapèzes... En revanche, l'égalité de FI et de FB, si elle était établie, entraînerait bien l'égalité des angles FIB et FBI, donc de l'angle FIB avec le double de IAB (ou FAB), dans la mesure où AIB est isocèle, et par conséquent de l'angle FBA avec le triple de FAB. La seconde partie du raisonnement est donc syllogistique. Le choix du point D détermine une position de F très voisine de cette situation idéale où FI = FB, d'où le trompe-l'œil.

Quelle est donc cette approximation qui a abusé les sens de François de Foix ? L'angle γ au sommet du pseudo triangle "d'or" aura ici pour sinus : DE/AF. Ce qui donne un écart absolu entre le sinus de $\pi/7$, attendu, et $DE/AF = \sqrt{3}/4$, obtenu, de $0{,}87 \cdot 10^{-4}$, et une erreur relative de $2 \cdot 10^{-3}$.

CONSTRUCTIONS EXUBÉRANTES ET APPROXIMATIONS RATIONNELLES : LES PROCÉDURES DE FRANÇOIS BESSON.

François Besson, greffier du bureau des Finances de la charge et généralité de Languedoüy, établi à Bourges, ne semble avoir laissé trace dans l'histoire des mathématiques que par la publication en 1626 d'un ouvrage de géométrie en trois parties [41]. Son titre, *La Pratique de Geometrie*, vaut aussi pour la première partie, elle-même divisée en trois livres ; le premier traité de "macrométrie" à savoir, selon Besson, de la mesure des lignes droites, le deuxième de "l'holométrie" ou mesure des surfaces planes et le troisième de "stéréométrie" ou mesure des corps solides. Cette première partie n'ayant pas été utilisée lors des séances de travail, il n'en sera pas rendu compte, sinon pour mentionner brièvement que le livre II contient une reprise des résultats obtenus par Archimède sur la mesure du cercle, complétée par Besson de la proposition d'autres approximations rationnelles de rapports tels que $\frac{\textit{diamètre}}{\textit{circonférence}}$ et $\frac{\textit{carré du diamètre}}{\textit{aire du disque}}$ inspirées pour certaines, au dire de Besson, des travaux du père Clavius. Cette reprise est suivie d'une proposition originale de quadrature du cercle, évidemment approchée, sans que ce caractère soit mentionné par Besson ; outre une construction effective d'un carré équivalent au disque donné, Besson donne, comme pour toutes les constructions proposées, des évaluations numériques rationnelles des rapports

41 François Besson, *La Pratique de Geometrie de M. François Besson,* [...] *divisée en trois livres. Le I. desquels traicte de la Macrometrie* [...], *Le II. de l'Holometrie* [...], *Et le III. de la Stereometrie* [...]. *Ensemble les IV. & XIII. livres des Elemens d'Euclide, qu'il applique aux nombres, ce qu'avait aussi encores esté faict par aucun Autheur. Et une Poligonometrie,* Paris, chez Jean Moreau, 1626.

lignes GX, HV, celles-ci couperont la circonférence du dit cercle, à savoir, en la partie supérieure aux points I, K, et en l'inférieure à ceux Y, Z ; de l'arc de chaque portion de circonférence, étant tirées les cordes, celles-ci seront en ladite supérieure partie FI, ou KB, et en l'inférieure YD, ou ZD, chacune étant côté d'heptagone régulier inscript au dit cercle, d'autant que chacune des lignes FI, KB, YD, DZ, pour être plus grande chacune que celles FQ, PB, hD, Dk, perpendiculaires [à la base] [46] *de chacun des triangles FQI, BPK, DhY, DkZ, à cause qu'elles sont soustendantes de chacun de ces triangles rectangles, et par la 47. du premier* [47], *plus longues que les dites perpendiculaires pour n'être que chacune égale à la moitié de celle de FB, côté du triangle régulier FBD, inscrit au dit cercle, qui est prouvée trop petite pour [être] côté du dit heptagone régulier inscrit au cercle, [elles] seront côtés du même heptagone, comme il est dit est ci-dessus.* [..]

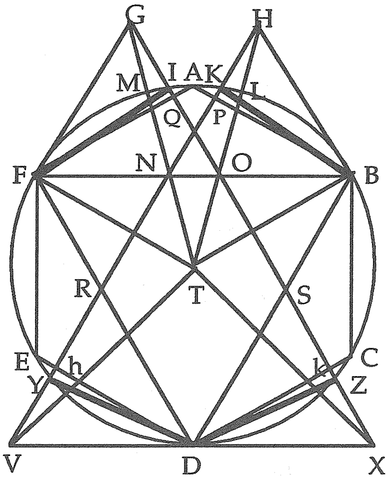


Figure 1

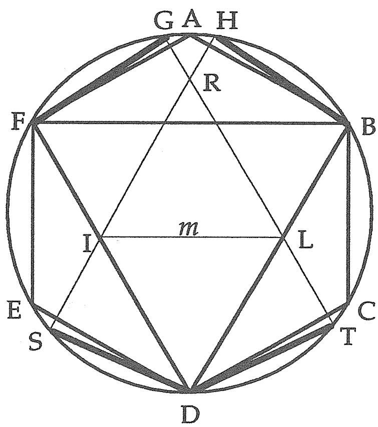


Figure 2

On peut encore inscrire l'heptagone régulier dans le cercle par un autre moyen plus bref que le précédent, néanmoins conforme à celui-ci en cette sorte. Soit le cercle donné BCDEFA, [Figure 2] *dans lequel nous désirons inscrire le dit heptagone régulier ; il faut, pour y parvenir, inscrire dans ce cercle l'hexagone aussi régulier BCDEFA , dont en tirant les soustendantes FB, BD, DF, il se formera le triangle régulier FBD ; si sur les côtés DF, DB, du point D, sommité du dit triangle FBD, sont appliquées les lignes DI, DL, chacune égale à celle AB, ou AF, côté du dit hexagone, rayon ou semidiametre du dit cercle, et des points de leur application I, L, sur la ligne pointée IL, égale à chacune de celles DI, DL, par la premiere du premier livre des Éléments d'Euclide est construit le triangle régulier IRL, égal à celui IDL, dont sa sommité sera R, de ce point de sommité R, par celui L tirant et*

46 Il s'agit ici de l'apothème du polygone, perpendiculaire à un côté du polygone menée par le centre du cercle circonscrit.

47 Il s'agit de la 47ème proposition du premier *Élément* d'Euclide, abusivement nommée aujourd'hui "théorème de Pythagore".

continuant la ligne GT, parallèle à celle FD, aboutissant à la circonférence du dit cercle aux points G, T ; de la même sommité R, par le point I, faisant de même, nous aurons la ligne HS, parallèle à celle DB, aboutissant aussi à la dite circonférence aux points H, S ; finalement chacune des lignes FG, BH, DS, DT, sont chacune égale au côté de l'heptagone régulier inscrit au dit cercle BCDEFA, plus longues que chacune de celles FN, BO, DP, DQ, par les raisons déduites en la précédente démonstration.

Premier que de donner le moyen d'inscrire le dit heptagone régulier dans un cercle par les nombres, il faut être averti que la raison du diametre d'un cercle au côté du dit heptagone est telle que de 302 à 131 et du rayon ou semidiametre au même côté de 151 à 131 et le dit côté à chaque perpendiculaire des sept triangles isocèles qui le composent telle que de 131 à 136 ; le carré du côté de l'heptagone a à sa superficie telle raison que de 17161 à 62356 et à la superficie de chaque triangle de 120127 à 62356 ; le même côté d'heptagone au côté du carré qui lui est égal [en aire] à telle raison que de 130607 à 248963.

Plus le dit côté d'heptagone, base d'un triangle isocèle, ayant les angles de la base triples à l'autre, a à chacun de ses côtés raison telle que de 655 à 1471, la dite base à la perpendiculaire de 131 à 287 et les dits côtés à la même perpendiculaire, comme de 1471 à 1434. Suivant les dites raisons, s'il nous est donné le diametre d'un cercle, comme de 10, le côté de l'heptagone qui lui est inscrit sera $4\frac{51}{151}$ *et sa superficie* $68\frac{8432}{22801}$ *à cause que la raison du carré du diametre d'un rond inscrivant à la superficie de l'heptagone inscrit est telle que de 22801 à 15589.*

Analyse et commentaires.

Besson fournit donc deux constructions de l'heptagone, clairement équivalentes puisque la seconde n'est qu'une version abrégée de la première. Toutefois l'une et l'autre restent assez embrouillées et paraissent redondantes puisqu'elles conduisent toutes deux à la construction de quatre côtés, évidemment isométriques : dans la figure 1, FI, BK d'une part, DY, DZ d'autre part s'échangent par la réflexion d'axe AD, tandis que FI devient DY par la rotation de 120° autour de T. La présentation et l'étude de la substance géométrique de cette construction seront plus aisées à partir de la réécriture simplifiée et de style plus moderne qui suit, accompagnée d'une figure elle-même obtenue en débarrassant la figure 1 d'éléments superflus pour une première lecture (Figure 3) :

Dans un cercle de centre T, inscrire un triangle équilatéral BDF ; sur un des côtés de ce triangle, par exemple FB, et vers l'extérieur de ce triangle, construire un triangle équilatéral FOG, de côté égal au rayon FT du cercle, le point O étant sur le segment FB. Le côté OG coupe le cercle en I ; FI est pris pour côté de l'heptagone régulier inscrit dans le cercle (BDF).

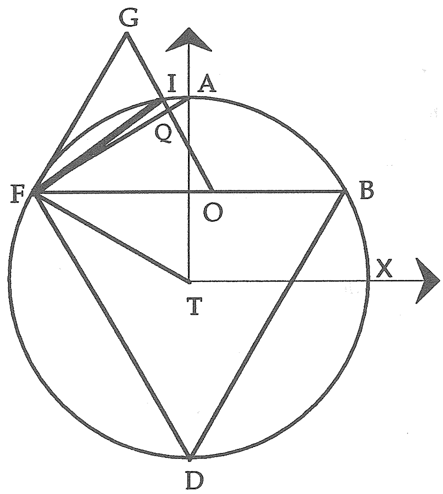


Figure 3.

Une évaluation exacte de la longueur FI peut être obtenue par recours à la géométrie analytique. Dans le repère orthonormé $(T;\ \overrightarrow{TX}, \overrightarrow{TA})$, le rayon du cercle étant pris pour unité de longueur,

- le point F a pour coordonnées $\left(\sqrt{3}/_{2}, {}^{1}/_{2}\right)$
- le cercle a pour équation : $x^2 + y^2 = 1$
- la droite (OG) a pour équation : $\sqrt{3}x + y + 1 - \sqrt{3} = 0$.

Les coordonnées de I s'en déduisent : $x_I = \dfrac{3-\sqrt{3}-\sqrt{2\sqrt{3}}}{4}$, $y_I = \dfrac{\sqrt{3}-1+\sqrt{6\sqrt{3}}}{4}$,

La longueur de la corde FI est alors $FI = \dfrac{\sqrt{2}}{2}\sqrt{3+\sqrt{3}-\sqrt{6\sqrt{3}}} = E_7$.

Une valeur approchée de E_7 à 10^{-4} près par défaut est : 0,8684, tandis que le côté C_7 de l'heptagone régulier, pour un rayon $R = 1$, égal à $2 \sin \frac{\pi}{7}$ a pour valeur approchée à 10^{-4} près par excès : 0,8678. L'erreur relative commise dans cette construction est inférieure à $8 \cdot 10^{-4}$, de meilleure qualité que celle de Dürer.

Le rapport proposé par Besson pour $\dfrac{\textit{côté du polygone}}{\textit{rayon du cercle}}$ est $\dfrac{131}{151}$, qui a pour valeur approchée à 10^{-4} près par défaut : 0,8675.

Ainsi : $$\frac{131}{151} < \frac{C_7}{R} < \frac{E_7}{R}.$$

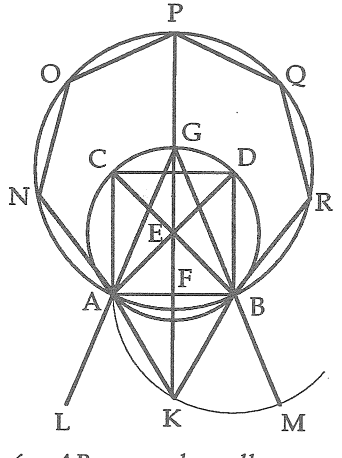
Il est laissé au lecteur le soin et le plaisir d'évaluer "exactement" les autres grandeurs généréés par la construction de Besson : apothème, superficie, et de comparer ces évaluations avec, d'une part les valeurs "exactes", et d'autre part les approximations rationnelles fournies par Besson.

Il reste à noter que, dans un passage qui n'est pas reproduit dans l'extrait donné ci-dessus, Besson montre par des considérations de mesure d'arc que, la corde FI étant côté d'heptagone régulier, la corde IK (Figure 1) est côté du polygone régulier à 21 côtés inscrit dans le même cercle et que la corde ML est côté du dodécagone régulier. En effet, pour IK, l'arc FAB vaut 120°, soit 1/3 de circonférence, et la somme des arcs FMI et BLK est supposée valoir 2/7èmes de circonférence ; par différence, l'arc IAK vaut 1/21ème de circonférence.

Construction d'un heptagone sur un côté donné.

PROPOSITION II.

Sur une ligne droicte donnée, descrire un heptagone equiangle & equilateral;



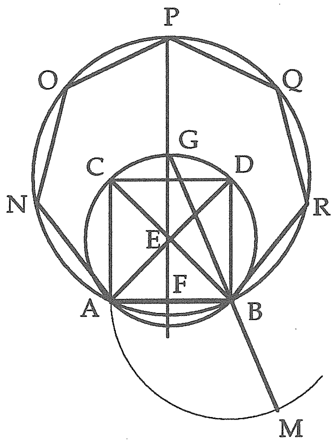
Soit la ligne donnée AB, sur laquelle nous désirons décrire un heptagone équiangle et équilateral ; pour ce faire il faut premièrement décrire le carré isopleure [48] *ACDB, par la quarante-sixième proposition du premier livre des Éléments d'Euclide, et tirer ses diagonales AD, CB, pour trouver le centre E, point d'intersection de celles-ci ; chacune des lignes AE, CE, DE, BE, sera le rayon du cercle inscrivant, et du dit centre E, étant abaissée la perpendiculaire EF, celle-ci, continuée de part et d'autre par la deuxième commune sentence, coupera la circonférence au point G ; et étant tirées les lignes GB et GA, de plus sur la même ligne AB, au-dessous de celle-ci, sera construit le triangle régulier ABK, à la ligne GB, ou GA, ayant adjousté celle AK, ou KB, les toutes seront GL, ou GM, diametre du cercle circonscrivant l'eptagone ANOPQRB, contruict sur la ligne AB.*

48 Adjectif tombé en désuétude signifiant "équilatéral". On le trouve, dans le *Dictionnaire de la Langue française du seizième Siècle*, d'Edmond Huguet, Paris, Didier, 1928-1967, sous les formes : "Isopleurant" (formant un triangle avec des côtés égaux) et "Ysoplevre" ("*ung triangle ysoplevre... est celuy qui a les trois costes esgaulx*", Tory, *Champ fleury*).

Commentaire.

Comme pour la construction précédente, la description et la figure données par Besson peuvent être simplifiées.

Sur le segment AB construire le carré ABDC, dont les diagonales AD et BC se coupent en E, ainsi que le cercle circonscrit à ce carré; par E, mener la perpendiculaire à AB, ou CD, qui coupe le "grand" arc AB en G ; sur la droite (GB), prolonger le segment GB d'un segment BM égal à AB. GM est pris pour diamètre du cercle circonscrivant l'heptagone régulier de côté AB.



En posant AB = a, il vient : GE = BE = $a\frac{\sqrt{2}}{2}$ puis GF = $a\frac{\sqrt{2}+1}{2}$, ce qui donne

GB = $a\sqrt{\frac{2+\sqrt{2}}{2}}$, et enfin GM = $a\left[1+\sqrt{\frac{2+\sqrt{2}}{2}}\right]$.

Le rayon du cercle circonscrit à l'heptagone à construire est donc $R = \frac{a}{2}\left[1+\sqrt{\frac{2+\sqrt{2}}{2}}\right]$, et le rapport $\frac{\textit{côté du polygone}}{\textit{rayon du cercle}}$, $\frac{a}{R}$, vaut :

$$\frac{2}{1+\sqrt{\frac{2+\sqrt{2}}{2}}} = 2\left(\sqrt{2+\sqrt{2}}-\sqrt{2}\right),$$ dont une valeur approchée à 10^{-4} près par excès est 0,8671 ; celle retenue précédemment pour C_7 étant 0,8678, l'erreur relative est ici encore inférieure à $8 \,.\, 10^{-4}$.

CONCLUSION.

La diversité des travaux suscités par la recherche d'une construction rigoureuse de l'heptagone régulier n'a d'égale que la complexité réelle d'un problème d'énoncé simple (diviser également la circonférence) et de portée pratique immédiate (graduer la deuxième ligne *Élément*aire : le cercle).

Cette diversité est tout à la fois le reflet d'une histoire "problématique" des mathématiques, avec ses errements et ses abandons féconds, et le support possible de démarches pédagogiques, de la maternelle à l'université, de la rosace hexagonale à la théorie de Galois...

C'est ainsi que les difficultés rencontrées dès les premiers âges de la mathématique pour accéder à une construction exacte de l'heptagone, entre autres, ont fécondé d'autres champs et, loin d'avoir stérilisé les recherches, les ont amenées sur le terrain numérique. Faut-il rappeler que, pour les étudiants aussi, l'intime et réciproque sujétion du nombre à la grandeur ne prend sens que dans une démarche dialectique ? De l'intérêt de relire les petits maîtres comme les grands classiques...

Bibliographie :

Archimède, 1945 : *Les Œuvres d'Archimède*, trad. fr. de P. VerEecke, Bruges, 1945.

Archimède, 1971 : *Œuvres d'Archimède*, T. III, trad. fr. de Ch. Mugler, Les Belles Lettres, Paris, 1971.

Barbaro, D., 1568 : *La Pratice della Prospettiva di Monsignor Daniel Barbaro eletto Patriarca d'Aquileia, opera molto utile a Pittori, a Scultori, e Architetti*, Venise, 1568.

Besson, F., s. d. : *La Ciclométrie, moyen de dedans un cercle donné inscrire les Pentagone, heptagone, nonogone et autres polygones en nombre impair de leur costez a l'infini*, manuscrit, Bibliothèque Nationale (Paris), cote Fr. 1336.

Besson, F., s. d. : *Moyen du tétragonisme du cercle par François Besson*, manuscrit, Bibliothèque Nationale (Paris), cote Fr. 661.

Besson, F., 1626 : *La Pratique de Geometrie de M. François Besson,* [...] *divisée en trois livres. Le I. desquels traicte de la Macrometrie* [...], *Le II. de l'Holometrie* [...], *Et le III. de la Stereometrie* [...]. *Ensemble les IV. & XIII. livres des Elemens d'Euclide, qu'il applique aux nombres, ce qu'avait aussi encores esté faict par aucun Autheur. Et une Poligonometrie*, Paris, chez Jean Moreau, 1626.

Bessot, D., 1986 : "Quelques Problèmes de Constructions chez Dürer (un exemple de Géométrie Pratique)" in *Rôle des Problèmes dans l'Histoire et l'activité mathématique*, Actes du Colloque inter-IREM d'Histoire et d'Épistémologie des Mathématiques de Montpellier (31/05-01/06 1985), IREM de Montpellier, 1986.

Cardano, G., 1554 : *Hieronymi Cardani Mediolanensis Medici, De Subtilitate Libri XXI. Nunc Demum ab ipso autore recogniti atque perfecti.* Lugduni, Apud Guliel. Rouillium. 1554, Liber XVI, pp. 559-570.

Catalan, E. Ch., 1858 : *Théorèmes et Problèmes de Géométrie élémentaire*, éd. consultée : 3ème éd., chez Victor Dalmant, Paris, 1858, pp. 171-174.

Clagett, M., 1964 : *Archimedes in the Middle Ages*, vol. I, *"The Arabo-Latin tradition"*, Madison, 1964.

Clavius, Ch., 1606 : *Christophori Clavii Bambergensis e Societate Jesu. Geometria practica*. Moguntiæ, chez Jean Albini, 1606, pp. 362-364.

Dijksterhuis, E. J., 1956 (1987) : *Archimedes*, Princeton University Press, Princeton, New Jersey, 1987.

Dürer, A., 1525 (1995) : *Underweysung der Messung, mit dem zirckel und richtscheyt, in Linien ebnen und gantzen corporen*, Nuremberg, 1525. Trad. fr. : A. Dürer, *Géométrie*, trad. de l'allemand, introd., notes et annexes par J. Peiffer, Paris, éd. du Seuil, 1995.

Euclide, 1990 : *Euclide. Les Éléments. Volume 1. Introduction générale. Livres I à IV*, trad. B. Vitrac, Paris, P. U. F., coll. *Bibliothèque d'Histoire des Sciences*, 1990, pp. 194 & 279.

Foix, F. (de), 1578 : *Euclidis Megarensis Mathematici Clarissimi Elementa, Libris XV...*, 2de éd., Paris, 1578.

Foix, F. (de), 1593 : *Heptagoni descriptio sexto elementorum libro unserenda, Francisci Flussatis Kendallæ opera, demonstratione mathematica, aspirante supremo, deprompta, anno salutis 1593. ætatis vero. 81.*, 2 pages imprimées dans un ex. du précédent.

Héron d'Alexandrie 1988 : *Les Mécaniques ou l'élévateur des corps solides*. Texte arabe de Qusta Ibn Luqa et trad. de B. Carra de Vaux. Rééd. Les Belles Lettres, Paris, 1988.

Hogendijk, J. P., 1984 : *Greek and Arabic Constructions of the regular Heptagon*, in *Archive for History of Exact Sciences*, vol. 30, n° 3/4, 1-X-84, Springer-Verlag. Berlin, Heidelberg, New York, Tokyo, 1984, pp. 197-330.

Knorr, W. R., 1993 : *The Ancient Tradition of Geometric Problems*, éd. Birkhäuser, Boston, 1986, rééd. Dover, 1993, pp. 178-187.

Montucla 1799 (An VII) : *Histoire des Mathématiques*, Tome premier, Paris, An VII, pp. 208-9 et p. 578.

Rashed, R., 1979 : "La construction de l'heptagone régulier par Ibn-al-Haytham", in *Journal for the History of Arabic Science*, vol. 3, 1979, pp. 309-387.

Schoy, C., 1926 : "Græco-Arabische Studien nach mathematischen Handschriften der Vizeköniglichen Bibliothek zu Kairo, als Festgruss zum 70. Geburtstag des Herrn Prof. J. L. Heiberg, Kopenhagen, dargestellt", in *Isis*, n° 8, 1926.

Viète, F., 1593 (1970) : *Variorum de Rebus Mathematicis Responsorum* (1593), in *Opera Mathematica, recognita Francisci à schooten*, rééd. Georg Olms, Hildesheim, 1970, pp. 359-364.

Wantzel, P. L., 1837 : *"Recherches sur les moyens de reconnaître si un Problème de Géométrie peut se résoudre avec la règle et le compas"*, in *Journal de Mathématiques Pures et Appliquées* (dit de Liouville), t. 2, 1837, pp. 366-372. En particulier §§ I à IV.