

La théorie des parallèles

Jean-Pierre Friedelmeyer
Klaus Volkert
IREM de Strasbourg

Dans le texte qui suit nous décrivons quelques aspects du développement de la géométrie non-euclidienne, en particulier les difficultés épistémologiques qui se sont posées avec cette nouvelle théorie. Nous commençons par une étude détaillée de la théorie des parallèles d'Euclide. Notre motivation en est double : d'abord la théorie d'Euclide est la base de toutes les théories postérieures et de plus elle est même aujourd'hui la base de l'enseignement scolaire. Nous insisterons sur le théorème de la somme des angles intérieurs du triangle qui est un théorème fondamental.

Puis nous donnerons quelques informations sur la critique de la théorie d'Euclide par Proclus et sur le développement postérieur. Pour terminer nous étudierons le modèle de Poincaré.

1. La théorie des parallèles chez Euclide

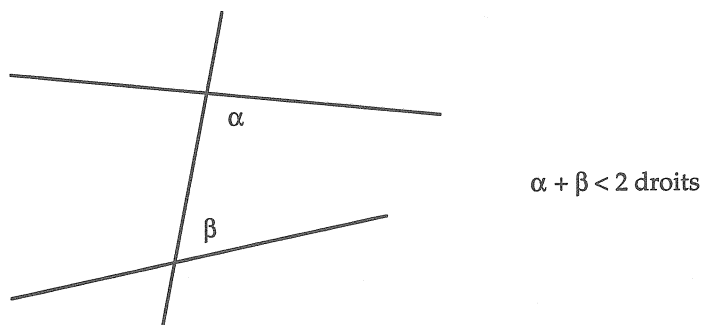
Dans le premier livre des *Eléments* d'Euclide (~ 300 av. J. C.) nous trouvons une théorie élaborée des parallèles fournissant la base de tous les développements postérieurs. Par conséquent nous commençons par une étude détaillée de la théorie euclidienne en particulier de sa structure logique et du rôle du postulat des parallèles.

La **définition 23** du premier livre énonce que des droites **parallèles** "sont celles qui étant dans un même plan et indéfiniment prolongées de part et d'autre, ne se rencontrent pas, ni d'un côté ni de l'autre". (Vitrac : Euclide, *les Eléments*, p. 166).

Plus tard on a proposé d'autres définitions tel la suivante : Deux droites sont dites parallèles si et seulement si leur distance est constante dans tous leurs points. Cette définition, qui revient à un mathématicien peu connu Posidonius (~150 av. J.C.), a l'avantage qu'elle ne parle pas de l'infini. Il est évident que deux parallèles dans le sens de Posidonius ne se coupent pas, mais on peut montrer que la réciproque est équivalente au postulat des parallèles. Mais revenons à Euclide.

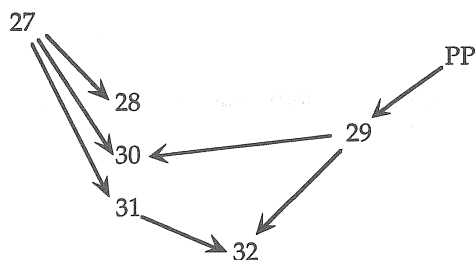
La définition 23 ne dit rien sur l'existence des parallèles. Ce problème est attaqué par Euclide par son célèbre postulat V, le **postulat des parallèles [PP]**. (On parle aussi de l'**axiome des parallèles** ou l'**axiome 11**, parce qu'après Euclide on a abandonné la distinction entre postulats et axiomes.) :

On demande que, si une droite tombant sur deux droites fait les angles intérieurs du même côté plus petits que deux angles droits, ces droites, prolongées à l'infini, se rencontrent du côté où les angles sont plus petits que deux angles droits.



D'un point de vue logique cet énoncé est un énoncé d'existence : étant donnée l'hypothèse on est assuré de l'existence d'un point d'intersection. (Rappelons que les postulats 1, 2 et 3 sont aussi des énoncés d'existence¹.) Donc le postulat des parallèles traite le cas du non-parallélisme, ce qui est un peu surprenant. Sa fonction est double : 1°) Il assure comme nous le verrons tout de suite l'unicité des parallèles (propositions 30 ou 31 & PP); 2°) Il fournit un critère d'existence d'un point d'intersection qui peut se contrôler dans un domaine limité et fini. Imaginez qu'on ait deux droites et qu'on veuille savoir si ces droites se coupent. Pour trouver leur point d'intersection il faut peut-être les prolonger jusqu'au soleil. A l'aide du postulat des parallèles il suffit de construire une droite transversale et de mesurer les angles ainsi obtenus.

Les propositions 1 à 28 du premier livre des *Eléments* ne dépendent pas du PP; ce sont des propositions de la **géométrie absolue** (c'est un terme introduit par János Bolyai en 1832 pour désigner la partie de la géométrie qui est indépendante du PP). Les démonstrations de ces propositions n'utilisent pas le PP. Les propositions 27 à 32 du premier livre sont appelées la **théorie des parallèles** d'Euclide. Donc il y a une partie de la théorie des parallèles qui ne dépend pas du PP! Comparez le schéma déductif pour la théorie des parallèles chez Euclide :

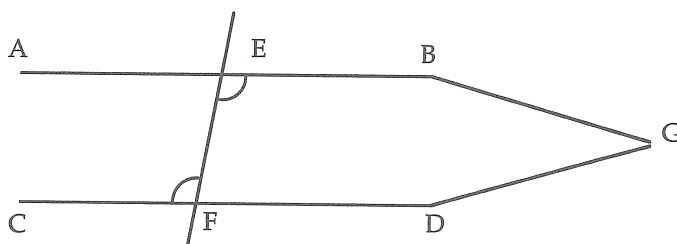


¹ 1. Qu'il soit demandé de mener une ligne droite de tout point à tout point. 2. Et de prolonger continuellement en ligne droite une ligne droite limitée. 3. Et de décrire un cercle à partir de tout centre et au moyen de tout intervalle (Vitrac p. 167-168).

Les axiomes sont appelés aussi notions communes (N.C.), les postulats aussi demandes (Dem.).

Commençons par la **proposition 27** :

Si une droite, tombant sur deux droites, fait des angles alternes égaux entre eux, ces droites seront parallèles l'une à l'autre.



(Les angles alternes sont les angles situés de part et d'autre de la droite (cf. la figure en haut).

La démonstration d'Euclide en est la suivante :

En effet que la droite EF, tombant sur les droites AB et CD, fasse des angles alternes, ceux sous AEF et EFD, égaux entre eux. Je dis que AB est parallèle à CD.

Sinon, en effet, AB et CD, prolongées se rencontreront, soit du côté où sont B, D, soit du côté où sont A, C. Qu'elles soient prolongées, et qu'elles se rencontrent du côté où sont B, D en G.

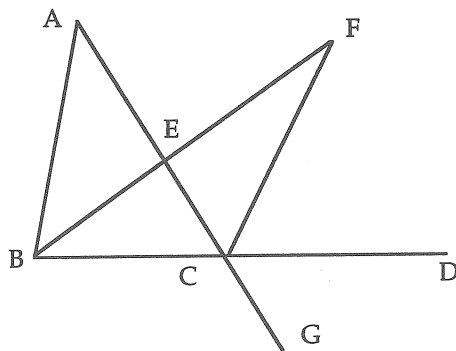
Alors, dans le triangle GEF, l'angle extérieur sous AEF est égal à l'angle sous EFG, intérieur et opposé. Ce qui est impossible (Prop. 16). Donc les droites AB, CD, prolongées, ne se rencontreront pas du côté où sont B, D. Alors, semblablement, il sera démontré qu'elles ne se rencontrent pas non plus du côté où sont A, C. Mais les droites qui ne se rencontrent ni d'un côté ni de l'autre sont parallèles (Df. 23). Donc, AB est parallèle à CD.

Cette démonstration se fait par un raisonnement par l'absurde, une technique très courante dans les *Eléments* et analysée postérieurement par Aristote. L'idée principale de la démonstration est l'utilisation de la proposition 16 - le reste est tout à fait simple. Si on veut comprendre les fondements de la démonstration donnée par Euclide, il est par conséquent nécessaire d'analyser la proposition 16, en particulier sa démonstration.

Proposition 16. *Dans tout triangle, un des côtés étant prolongé, l'angle extérieur est plus grand que chacun des angles intérieurs et opposés.*

Démonstration : *Soit le triangle ABC, et que l'un de ses côtés, BC, soit prolongé au-delà jusqu'au point D.*

Je dis que l'angle extérieur, celui sous ACD, est plus grand que chacun des angles intérieurs et opposés, ceux sous CBA, BAC.



Que AC soit coupée en deux parties égales au point E (Prop. 10), et que la droite BE soit jointe (Dem. 1) et prolongée en ligne droite jusqu'en F (Dem. 2); que soit placée EF égale à BE (Prop. 10) et que FC soit jointe (Dem. 1); que AC soit conduite jusqu'à G (Dem. 2).

Or puisque d'une part AE est égale à EC, d'autre part BE à EF, alors les deux droites AE, EB sont égales aux deux CE, EF, chacune à chacune; et l'angle sous AEB est égal à l'angle sous FEC, car ils sont au sommet (Pro. 15). Donc la base AB est égale à la base FC et le triangle ABE est égal au triangle FEC, et les angles restants sont égaux aux angles restants, chacun à chacun, c'est-à-dire ceux que sous-tendent les côtés égaux (Prop. 4). Donc celui sous BAE est égal à celui sous ECF; or celui sous ECD est plus grand que celui sous ECF (Notion Commune 8); donc celui sous ACD est plus grand que celui sous BAE. Alors semblablement, BC étant coupée en deux, il sera démontré que celui sous BCG, c'est-à-dire celui sous ACD, est aussi plus grand que celui sous ABC.

Cette démonstration repose sur trois faits : 1°) Si on a un segment, on peut toujours construire un segment de longueur double (cf. BE et BF en haut); 2°) un théorème de congruence (deux triangles sont congruents s'il y a deux paires de côtés égaux plus les angles égaux sous-tendant ces deux côtés [= prop. 4 chez Euclide]); 3°) on peut comparer les angles selon leur grandeur (les angles sont des grandeurs).

Le premier fait n'est pas justifié dans le système d'Euclide. Il existe une géométrie dans laquelle on ne peut pas doubler tout segment - c'est la géométrie sphérique (où par définition la longueur d'un segment ne peut pas excéder R, si R est le rayon de la sphère : si on dispose d'un segment de longueur $(2/3)R$, on ne peut pas former un segment de double longueur parce qu'il n'existe pas de segment d'une longueur $(4/3)R$!). Par conséquent le théorème sur les angles extérieurs n'est plus vrai dans la géométrie sphérique. Si on construit par exemple un triangle avec trois angles droits (prenez l'équateur et un pôle) on dispose d'un contre-exemple! De plus le théorème 27 d'Euclide n'est plus intéressant dans la géométrie sphérique parce qu'il n'existe aucune parallèle dans cette géométrie! Cependant les faits 2°) et 3°) sont donnés dans toutes les géométries "normales". Ce qui est important c'est le fait que la théorie des parallèles dépend des propriétés d'une géométrie qui semblent tout à fait étrangères à cette théorie. Ce fait complique la situation d'une manière considérable.

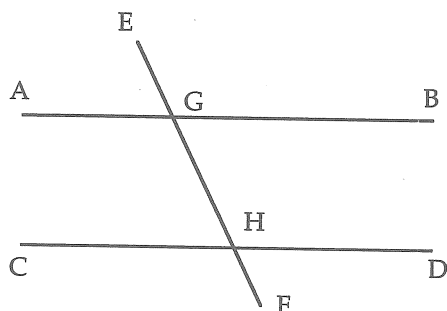
Mais revenons à la théorie des parallèles d'Euclide. La proposition 28 est une simple conséquence de la proposition 27.

Proposition 28 : *Si une droite tombant sur deux droites fait l'angle extérieur égal à l'angle intérieur et opposé du même côté, ou les angles intérieurs et du même côté égaux à deux droits, les droites seront parallèles l'une à l'autre.*

La démonstration se fait par un simple raisonnement sur les angles sur la base de la proposition précédente. Comme la proposition 27 est indépendante du PP, la proposition 28 l'est aussi. Autrement dit ces propositions sont des propositions de la géométrie absolue. Par contre PP joue un rôle décisif dans la démonstration du théorème 29. (**Attention :** Le fait que Euclide utilise ce postulat dans sa démonstration ne prouve pas qu'il faut l'utiliser! En principe il n'est pas exclu que quelqu'un puisse trouver une démonstration pour la proposition 29 sans utilisation du PP! Vous voyez : il y a ici des problèmes logiques compliqués. L'impossibilité d'une démonstration du théorème 29 sans utilisation du PP ou d'un énoncé équivalent ne fut démontrée qu'après 1860.)

Proposition 29 : *Une ligne droite tombant sur des droites parallèles fait des angles alternes égaux entre eux, et aussi l'angle extérieur est égal à l'angle intérieur et opposé, et les angles intérieurs et du même côté sont égaux à deux droits.*

[Donc d'un point de vue logique la proposition 29 est la réciproque des propositions 27 et 28; Euclide savait très bien distinguer une proposition et sa réciproque.]



Démonstration : En effet, que la droite EF tombe sur les droites parallèles AB, CD. Je dis qu'elle fait des angles alternes égaux : ceux sous AGH, GHD, et l'angle extérieur, celui sous EGB, égal à celui sous GHD, intérieur et opposé, et les angles intérieurs et du même côté, ceux sous BGH, GHD, égaux à deux droits.

En effet, si celui sous AGH n'est pas égal à celui sous GHD, l'un d'entre eux est plus grand. Que celui sous AGH soit le plus grand. Que celui sous BGH soit ajouté de part et d'autre. Ceux sous AGH, BGH sont donc plus grands que ceux sous GHD, BGH (N.C. 4). Mais ceux sous AGH, BGH sont égaux à deux droits (Prop. 13). Donc ceux sous BGH, GHD sont plus petits que deux droits. Les droites sur des angles plus petits que deux droits, prolongées indéfiniment, se rencontrent (Dem. 5 [=PP]). En contradiction avec notre hypothèse!

Le reste de la démonstration est encore une fois un simple raisonnement sur les angles.

Quelle est la fonction du PP dans cette démonstration? Evidemment ce postulat entraîne l'unicité de la parallèle. Si on a une droite et une autre tombant sur la première et si on fixe un point quelconque sur la deuxième droite on peut mener seulement une droite par ce point qui soit parallèle à la première. La raison en est que l'angle en ce point entre la parallèle et la droite donnée est déterminé sans ambiguïté par PP : la somme des deux angles intérieurs et du même côté doit évaluer deux droits. Nous reviendrons sur ce problème (cf. la proposition 31 ci-dessous).

La proposition 30 montre que la relation de parallélisme est transitive sous l'hypothèse du PP.

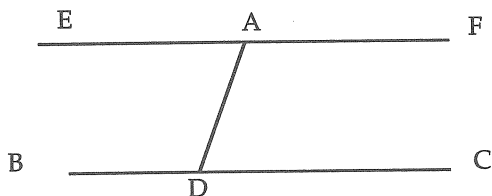
Proposition 30 : *Les parallèles à une même droite sont aussi parallèle l'une à l'autre.*

La démonstration en est une simple conséquence de la proposition 29 [donc dépendant du PP!] plus la transitivité de l'égalité (des angles). Notez que la proposition 30 garantit elle-aussi l'unicité de la parallèle à une droite par un point non situé sur cette droite : S'il y en avait deux par le même point P, ces parallèles seraient aussi parallèles entre elles. Mais ce n'est pas vrai, parce qu'elles ont un point commun.

Très importante est la proposition 31, qui est un problème, c'est à dire qui nécessite une construction.

Proposition 31 : *Par un point donné, mener une droite parallèle à une droite donnée.*

Démonstration : *Soit d'une part, le point donné A, d'autre part, la droite donnée BC. Il faut alors, par le point A, mener une droite parallèle à la droite BC.*



Que soit pris, au hasard, un point D sur BC et que AD soit jointe (Dem. 1). Et, sur la droite DA, et au point A qui est sur elle, que soit construit, égal à l'angle sous ADC, celui sous DAE (Prop. 23). Et que la droite AF soit le prolongement en ligne droite de EA.

Et puisque la droite AD, tombant sur les deux droites BC, EF a fait les angles alternes, ceux sous EAD, ADC, égaux entre eux, EAF est donc parallèle à BC (Prop. 27).

Donc, par le point donné A, la droite EAF a été menée, parallèle à la droite donnée BC. Ce qu'il fallait faire.

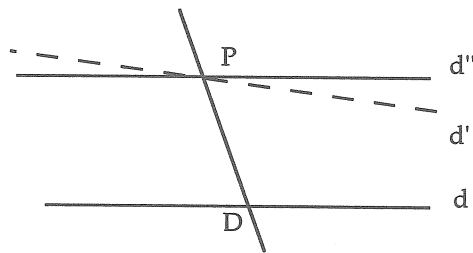
Cette construction repose sur le fait qu'on peut transporter des angles d'un endroit à un autre sans les altérer. C'est garanti dans le système d'Euclide par la proposition 23 (qui est un peu compliquée parce que Euclide travaille avec des triangles pour transporter les angles). De plus elle repose sur la proposition 27 qui garantit le parallélisme entre les deux droites qui sont construites. En somme la proposition 31 ne dépend pas du PP!

Notez bien que 31 ne dit rien sur l'**unicité de la parallèle** à la droite donnée par le point donné. Nous avons construit une parallèle, c'est vrai, mais nous ignorons s'il n'y en a pas d'autres! Si on veut l'unicité il faut citer le PP, par exemple la proposition 30. Il semble que Euclide n'a pas compris que la proposition 31 ne mène pas à l'unicité de la parallèle : dans la suite du premier livre il cite cette proposition comme donnant une parallèle unique.

La proposition 31 vous rappelle certainement la forme dans laquelle on formule aujourd'hui l'axiome des parallèles :

Etant donnée une droite et un point non situé sur cette droite, il existe une et seulement une parallèle par ce point à la droite donnée.

L'idée d'utiliser cette forme de l'axiome revient au mathématicien anglais John Playfair (1748 - 1819) [*Elements of geometry*, 1796]; par conséquent on parle de l'**axiome de Playfair**. Si on suppose la géométrie absolue, l'axiome de Playfair est équivalent au PP. L'implication $PP \Rightarrow$ axiome de Playfair était démontrée plus haut (cf. le commentaire à la proposition 31), la réciproque axiome de Playfair $\Rightarrow$ PP se démontre comme suit : Soit donnée une droite d et un point P non situé sur d . Nous raisonnons par l'absurde. Donc nous supposons que l'hypothèse : "Par P il existe une parallèle d' à d pour laquelle l'énoncé du PP n'est pas vrai". C'est à dire qu'il y a une droite tombant sur d (en un point D) et sur d' (en P) pour laquelle les angles alternes ne sont pas égaux.



Construisons par P une droite d'' selon la proposition 31. Pour cette droite d'' les angles alternes sont égaux par construction, donc d'' est aussi parallèle à d (selon 27; c'est à dire sans utilisation de PP). Par conséquent nous avons trouvé deux parallèles d' et d'' à d par P , ce qui est en contradiction avec l'axiome de Playfair. Donc une droite qui est en accord avec les hypothèses du PP doit couper la droite d . Ce qu'il fallait démontrer.

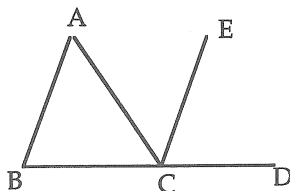
On a souvent dit que la forme donnée par Playfair est plus évidente que la forme du PP d'Euclide.

La proposition 32 est très célèbre, c'est le théorème sur la somme des angles intérieurs du triangle.

Proposition 32 : *Dans tout triangle, un des côtés étant prolongé, l'angle extérieur est égal aux deux angles intérieurs et opposés, et les trois angles intérieurs du triangle sont égaux à deux droits.*

[La première partie est une variante plus forte de la proposition 16.]

Démonstration :



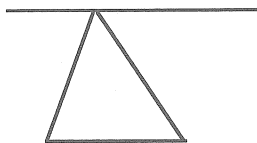
Soit le triangle ABC , et qu'un de ses côtés, BC , soit prolongé au-delà jusqu'en D . Je dis que l'angle extérieur, celui sous ACD , est égal aux deux angles intérieurs et opposés, ceux sous CAB , ABC , et que les trois angles intérieurs du triangle, ceux sous ABC , BCA , CAB , sont égaux à deux droits.

En effet, que par le point C , soit mené CE parallèle à la droite AB (Prop. 31 [plus PP parce que il faut savoir que cette parallèle est unique!]).

Puisque AB est parallèle à CE et que AC tombe sur elles, les angles alternes, ceux sous BAC , ACE sont égaux entre eux. Ensuite, puisque AB est parallèle à CE et que la droite BD tombe sur elles, l'angle extérieur, celui sous ECD , est égal à celui sous ABC , intérieur et opposé (Prop. 29). Et il a été aussi démontré que celui sous ACE est égal à celui sous BAC . L'angle tout entier sous ACD est donc égal aux deux angles intérieurs et opposés, ceux sous BAC , ABC (N.C. 2).

Que soit ajouté de part et d'autre celui sous ACB . Ceux sous ACD , ACB sont donc égaux aux trois sous ABC , BCA , CAB . Mais ceux sous ACD , ACB sont égaux à deux droits (Prop. 13); donc ceux sous ABC , BCA , CAB sont aussi égaux à deux droits (N.C. 1).

Evidemment cette proposition dépend du PP à travers de la proposition 29 qui est indispensable pour créer un lien entre les angles considérés. La forme de la démonstration qu'on connaît aujourd'hui (contenue dans la figure ci-dessous) est attribuée par Proclus aux Pythagoriciens.



Beaucoup plus tard Adrien Marie Legendre (1752 - 1833) attirait l'intérêt des mathématiciens sur le théorème de la somme des angles intérieurs du triangle (TSAT). En effet ce théorème est (sur la base de la géométrie absolue) équivalent

Théorème : Si la somme des angles intérieurs de tout triangle est égale à deux droits, deux droites faisant des angles intérieurs avec une troisième droite, tombant sur ces deux droites, plus petits que deux droits, se coupent toujours.

Pour y arriver nous construisons en P la perpendiculaire e sur la perpendiculaire. Par la proposition 28, e et d sont parallèles, parce que la somme des angles intérieurs est égale à deux droits. [Souvenez-vous que la proposition citée est indépendante du PP! Donc on a le droit de l'utiliser ici.] Nous choisissons un point A sur la droite d du côté où se trouve l'angle avec $d(A,Q) = d(Q,P)$ [$d(A,Q)$ est la distance des points A et Q , c'est à dire la longueur du segment AQ] et nous construisons le triangle PQA . Par construction ce triangle est isocèle, donc les angles $\angle QPA$ et $\angle PAQ$ sont égaux. Parce que l'angle en Q est droit, on a

$$\angle QPA = \angle PAQ = \pi/4$$

Maintenant nous construisons un point A' sur d avec $d(A',A) = d(P,A)$. Le triangle PAA' est aussi isocèle par construction. Donc les angles de base $\angle APA'$ et $\angle AA'P$ sont égaux. Par l'hypothèse sur la somme des angles intérieurs d'un triangle on obtient de plus l'égalité ($\angle PAA' = -\pi/4$)

$$\angle APA' = \angle AA'P = \pi/8$$

$$\angle A'PQ = \pi/2 - (\pi/4 + \pi/8)$$

Actes de l'Université d'Été 95 : Épistémologie et Histoire des Mathématiques (Besançon)

droite d' est à l'intérieur du triangle $A^{(n)}PQ$. Selon l'axiome de Pasch cette droite doit aussi quitter ce triangle. Parce la droite d' ne peut pas couper ni le segment PQ (dans ce cas on aurait deux points d'intersection de d' et de PQ) ni le segment $PA^{(n)}$, on obtient un point d'intersection de d' et de d . Ce qu'il fallait démontrer. Legendre a démontré deux théorèmes importants sur la somme des angles intérieurs d'un triangle.

Premier théorème de Legendre : Dans la géométrie absolue la somme des angles intérieurs d'un triangle ne peut pas excéder deux droits.

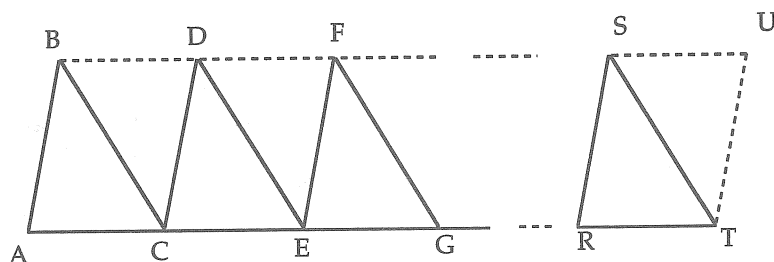
[Nous voyons ici encore une fois que la géométrie sphérique est incompatible avec la géométrie absolue parce que dans la géométrie sphérique il est très facile de construire des triangles dont la somme des angles intérieurs est plus grande que deux droits.]

Second théorème de Legendre : Si la somme des angles intérieurs d'un seul triangle est égale à deux droits la somme des angles intérieurs dans tout triangle est égale à deux droits.

Le second théorème de Legendre est très fort parce que par lui on peut réduire le problème à un seul triangle.

De plus Legendre croyait avoir démontré un troisième théorème disant que la somme des angles intérieurs d'un triangle ne peut pas être inférieure à deux droits. Mais sa démonstration utilisait un énoncé qui est équivalent au PP.

Nous allons donner ici les démonstrations des deux théorèmes de Legendre.



Démonstration du premier théorème : (Se fait par un raisonnement par l'absurde) Soit ABC un triangle dans lequel la somme des angles intérieurs est supérieure à deux droits. Sur le prolongement du côté AC nous construisons le point E avec $d(A,C) = d(C,E)$ de plus nous construisons sur le segment CE le triangle CDE congruent c'est-à-dire égal (au sens de superposable) à ABC (les points B et D sont situés dans le même demi-plan). Parce que la somme des angles en ABC est par hypothèse plus grande que deux droits l'angle $\angle BCD$ est inférieur à l'angle $\angle ABC$; par conséquent le segment BD est plus grand que le segment BC , ou autrement dit, la différence $AC - BD = \varepsilon > 0$. Maintenant nous répétons la construction décrite suffisamment souvent. Nous obtiendrons des triangles $ABC, CDE, EFG, \dots, RST$ et $BCD, DEF, \dots, STU$, qui sont tous congruent entre eux.

Par conséquent la différence du segment AT et de la somme des segments $BD + \dots + SU$ est égale à ne ; par conséquent elle peut devenir aussi grande que l'on veut, en particulier plus grande que $AB + UT$. Donc on a

$$AT - (BD + \dots + SU) > AB + UT$$

ou

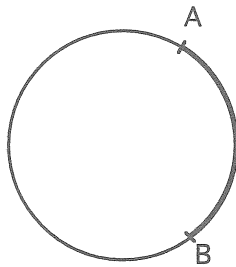
$$AT > AB + (BD + \dots + SU) + UT$$

ce qui est impossible parce qu'un côté d'un polygone ne peut jamais excéder la somme des autres (c'est une conséquence de l'inégalité triangulaire). C.Q.F.D.

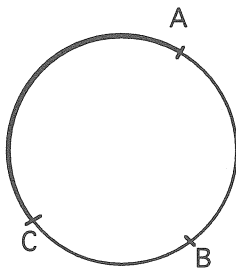
Cette démonstration n'est plus valable dans la géométrie sphérique, parce que dans celle-ci il n'est pas toujours possible de former le segment AT en additionnant suffisamment souvent le segment AC à lui-même. Ce problème est relié à une qualité qu'on appelle aujourd'hui le caractère archimédien d'une géométrie.

Remarque : Ce point mérite quelques explications car on pourrait imaginer que sur une sphère on peut également mettre bout à bout les segments $AC, CE, \dots$, pour arriver à AT quitte à faire plusieurs fois le tour de la sphère.

Nous pouvons nous limiter à la sphère unité. Alors la longueur d'un grand cercle est 2π . Puisqu'il s'agit de lignes formées de points, chaque point ne peut advenir qu'une seule fois; on ne peut donc parcourir un grand cercle plusieurs fois. Cela ne devient possible que lorsque l'on considère des arcs paramétrés qui soient des applications continues d'une partie de $\mathbb{R}$ sur la sphère. Dans ce cas, oui, des réels distincts peuvent avoir le même point image. En général on part du principe qu'en géométrie sphérique, les longueurs sont inférieures ou égales à π , pour la raison suivante : par deux points diamétralement opposés, on peut faire passer une infinité de droites (c'est-à-dire de grands cercles). De sorte que l'on ne peut construire une géométrie (avec la propriété que par deux points il passe une droite et une seule) que si l'on identifie deux points diamétralement opposés sur la sphère. Par contre, pour deux points qui ne sont pas diamétralement opposés, il n'existe qu'une ligne droite qui les joigne, si l'on admet que leur distance est inférieure ou égale à π .



Donc si l'on a deux lignes AB et BC dépassant chacune par exemple $\pi/2$ et appartenant au même grand cercle, la ligne qui relie A à C n'est pas celle passant par B !

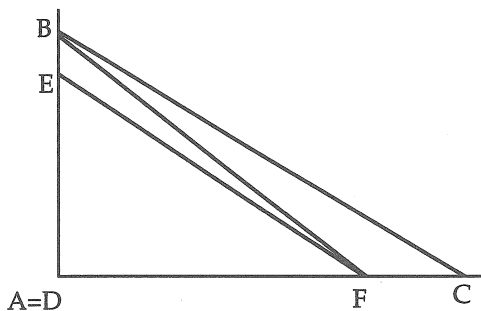


Tout le problème vient en fait de ce que les longueurs en géométrie sphérique sont bornées

Démonstration du second théorème :

Il est prudent de réduire un peu le problème avant d'entrer dans les détails de la démonstration. Si on a un triangle, on peut toujours le découper par une hauteur en deux triangles rectangles. De plus : si la somme des angles dans le grand triangle est égale à deux droits, la somme des angles intérieurs des deux triangles rectangles est aussi égale à deux droits. Pour prouver cette hypothèse il faut calculer la somme des angles des deux triangles et appliquer le premier théorème de Legendre.

Donc il suffit de démontrer l'énoncé pour des triangles rectangles : *Si la somme des angles intérieurs d'un seul triangle rectangle est égale à deux droits la somme des angles intérieurs de tout triangle rectangle est égale à deux droits.*



Soit donné le triangle ABC rectangle en A dans lequel la somme des angles intérieurs est égale à deux droits. Soit donné un autre triangle DEF rectangle en D . Nous superposons les deux triangles de sorte que les angles droits en A et en D coïncident. Si $AB \geq DE$ et $AC \geq DF$, on peut construire le segment BF .

Si la somme des angles intérieurs au triangle auxiliaire ABF n'est pas égal à deux droits, elle est par le premier théorème de Legendre inférieure à deux droits. Par conséquent la somme des angles $\angle ABF$ et $\angle AFB$ est inférieure à un angle droit.

On démontre maintenant que cette hypothèse est impossible. Considérons la somme des angles $\angle ABF + \angle FBC + \angle BCF + \angle CFB + \angle BFA$. Les angles $\angle FBC$, $\angle BCF$ et $\angle CFB$ sont les angles intérieurs du triangle BCF . Selon le premier théorème de Legendre leur somme n'excède pas deux droits. Donc la somme complète $\angle ABF + \angle FBC + \angle BCF + \angle CFB + \angle BFA$ est strictement inférieure à

trois droits (rappelez-vous notre hypothèse). Mais $\angle ABF + \angle FBC = \angle ABC$ et $\angle BFC + \angle AFB = \pi$. Par conséquent :

$$\angle ABC + \angle BCF < (3\pi/2)$$

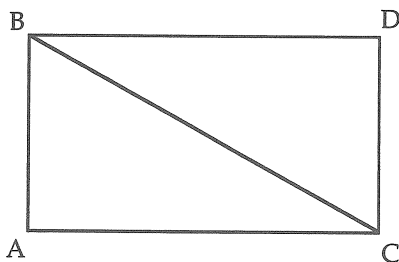
ou

$$\angle ABC + \angle BCF < \pi/2$$

Mais cela c'est impossible parce que la somme des angles intérieurs du triangle ABC est égale à deux droits.

Par conséquent la somme des angles intérieurs du triangle AFB est égale à deux droits. D'une manière tout à fait analogue on peut démontrer l'énoncé sur la somme des angles intérieurs du triangle DEF.

Si le triangle DEF a un côté plus grand que AB et que AC la superposition utilisée au-dessus n'est plus possible. Ce qu'il faut faire dans ce cas c'est agrandir le triangle ABC. Sur le segment BC nous construisons une copie congruente du triangle ABC et nous obtiendrons un rectangle ABCD. On peut aisément composer des rectangles pour former des rectangles d'une grandeur arbitraire.



Si on trace une diagonale dans un rectangle on obtient deux triangles congruents dans lesquels la somme des angles intérieurs est égale à deux droits. Donc nous avons démontré : si on dispose d'un seul triangle rectangle avec une somme des angles intérieurs égale à deux droits on peut construire un tel triangle d'une grandeur arbitraire.

Par conséquent nous pouvons démontrer le second théorème de Legendre aussi dans le cas où le triangle DEF est plus grand que le triangle ABC. C.Q.F.D.

2. La critique par Proclus

Proclus de Lycie (412 - 485), un philosophe néoplatonicien et le dernier chef du Lycée à Athènes, a écrit un commentaire sur le premier livre des *Eléments* d'Euclide. Ce commentaire est une source très importante pour nos connaissances des mathématiques de l'Antiquité.

Le postulat V (PP) est commenté par Proclus de la manière suivante :

Cela aussi [c'est à dire comme le postulat IV] doit être absolument rayé des postulats; car c'est un théorème qui offre de nombreuses difficultés, que Ptolémée [c'est l'astronome célèbre Claudius Ptolémée (~ 85 - ~165)] s'est proposé d'étudier dans un certain livre, et dont la démonstration exige beaucoup de définitions et de théorèmes. Euclide nous montre d'ailleurs la réciproque de ce postulat comme étant aussi un théorème, ...

(p. 168)

Un peu plus loin Proclus donne un autre argument en faveur de sa critique, c'est l'existence des asymptotes : *ce qui paraît improbable, mais est vrai cependant, et a été découvert pour d'autres forme de lignes. Dès lors, ce qui est possible pour ces dernières ne l'est-il pas aussi pour les lignes droites? ... Il résulte manifestement de ce qui précède, qu'il faut chercher une démonstration du théorème proposé, et qu'il diffère de la nature particulière du postulat.*

(p. 170)

En somme Proclus donne deux arguments : PP ne doit pas être un postulat parce que Euclide démontre sa réciproque (d'un point de vue logique c'est un argument pas du tout valable) et un comportement asymptotique n'est pas exclu pour des droites. Plus tard on a ajouté un troisième argument disant que le postulat V ne possède pas la qualité d'une évidence.

L'importance de la critique par Proclus vient du fait qu'il a bien formulé le problème qui a occupé les mathématiciens jusqu'à 1800 :

Peut-on démontrer l'énoncé du PP sur la base de la géométrie absolue?

Si la réponse est oui, la solution sera une démonstration de cet énoncé qui n'utilise rien d'autre que les faits de la géométrie absolue. Mais que faut-il faire si la réponse était non? Dans ce cas il faut démontrer qu'on ne peut pas démontrer l'énoncé du PP sur la base de la géométrie absolue. Comment y arriver? La solution est l'idée de **modèle** qui fut découverte dans la deuxième moitié du XIX^e siècle (voir 4. ci-dessous).

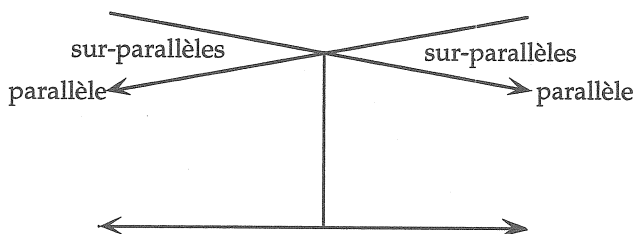
Il y avait un autre aspect qui a compliqué la situation. C'était le fait que le système d'Euclide connaît des lacunes. Donc personne ne savait exactement ce que c'est que la géométrie absolue. En général on se contentait des faits qui sont démontrés par Euclide dans les propositions 1 à 28 du premier livre. Les lacunes ne furent éliminées que par les systèmes axiomatiques de la géométrie trouvés vers la fin du XIX^e siècle (le système de Hilbert (1899/1900) en est le meilleur connu).

3. Diverses approches du problème posé par le Postulat des Parallèles

La question posée par Proclus a conduit à une histoire très importante pour les mathématiques - l'histoire de la géométrie **non-euclidienne**. Par ce terme qui fut créé par Gauß (Lobatschewsky a parlé de la géométrie imaginaire [comme Descartes a parlé des nombres imaginaires] ou de la pangéométrie; on a aussi proposé les termes de géométrie astrale et pseudo-géométrie) on entend la géométrie qui est fondée sur la négation du PP en conservant tout le reste de la géométrie euclidienne, c'est à dire en conservant la géométrie absolue. Si l'on accepte comme point de départ l'axiome de Playfair, on peut en former deux négations : Par un point P non situé sur une droite d on ne peut mener aucune parallèle à d . La première négation n'est pas compatible avec la géométrie absolue parce que celle-ci garantit qu'il existe au moins une parallèle. Par conséquent la seule négation possible est :

Axiome de Bolyai - Lobatschewsky : Par un point P non situé sur la droite d , on peut mener deux parallèles.

Une analyse plus détaillée montre qu'il est nécessaire dans la géométrie non-euclidienne de distinguer deux sortes de droites qui ne coupent pas une droite donnée. Ce sont les parallèles et les sur-parallèles. Les parallèles sont définies comme les premières droites qui ne coupent pas la droite donnée. Il en existe deux, une de chaque côté :



Toutes les droites situées entre les deux parallèles sont des sur-parallèles; donc il y en a une infinité.

Dans l'histoire de la géométrie non-euclidienne on peut distinguer plusieurs étapes.

Première approche : Essais de démontrer le postulat des parallèles en voie directe sur la base de la géométrie absolue. Donc il n'est pas permis d'utiliser des propositions qui sont équivalentes au postulat des parallèles.

Pendant des siècles on a trouvé beaucoup de propositions de ce type comme par exemple :

La ligne des points qui sont équidistants à une droite donnée (dans un demi-plan) est une droite. (Posidonius)

Pour chaque figure il existe une figure semblable d'une grandeur arbitraire. (Wallis)

Par un point qui est situé dans un angle on peut toujours mener une droite qui coupe les deux demi-droites qui forment l'angle. (Legendre)

Par trois points non situés sur la même droite il passe toujours un cercle. (W. Bolyai)

Il existe un triangle dont la somme des angles est deux droits. (G. Saccheri)

Il existe des triangles d'une aire aussi grande qu'on veut. (C. F. Gauß)

Dans le plan les translations et les rotations sont des isométries indépendantes. (B. Thibaut)

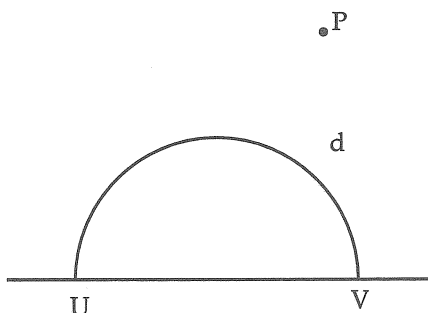
Deuxième approche : Essais de démontrer le PP par un raisonnement par l'absurde. On suppose la négation du PP et on veut la mener à une contradiction. Nous rencontrons cette idée chez l'italien G. Saccheri (1667 - 1733) et un peu plus tard chez l'alsacien J. H. Lambert (1728 - 1777).

Cette idée nécessite un travail dans la géométrie non-euclidienne parce qu'on est obligé de déduire des théorèmes sur la base de la négation du PP (pour arriver à une contradiction). Par exemple G. Saccheri a démontré dans son livre *Euclides ab omni naevo vindicatus* (1733) beaucoup de théorèmes de la géométrie non-euclidienne comme les suivants :

même des traductions de ces deux théorèmes, faites à l'aide de notre dictionnaire, mais ces traductions sont des théorèmes de géométrie ordinaire et personne ne doute que la géométrie ordinaire ne soit exempte de contradiction. ...

Ce n'est pas tout. La géométrie de Lobatchevsky, susceptible d'une interprétation concrète, cesse d'être un vain exercice de logique et peut recevoir des applications;
 ... (p. 68-69)

Pour terminer ce chapitre nous voulons étudier la question des parallèles par un point P à une droite d qui ne contient pas ce point. Supposons que la droite d (c'est à dire un demi-cercle) coupe la droite fondamentale aux points U et V .



Il est très facile à trouver des droites par P qui ne coupent pas la droite donnée d , ce sont toutes les droites non-sécantes. Mais dans cet ensemble de droites il y a deux exemplaires exceptionnels. Ce sont les deux droites (demi-cercles) passant par P qui coupent la droite fondamentale en U ou en V . Parce que ces points ne sont pas des points de notre modèle, ces droites seront non-sécantes avec la droite d . Mais ces droites sont les premières avec cette propriété – ce sont celles qui se rapprochent indéfiniment de la droite d . Donc ces deux droites sont les parallèles. Par conséquent nous avons trouvé que le modèle de Poincaré réalise l'axiome de Lobatchevsky.

Dans le modèle on peut aisément étudier la géométrie non-euclidienne parce que maintenant on dispose d'une intuition. Vous pouvez par exemple démontrer que par deux points il passe une et une seule droite. Il est intéressant de remarquer qu'on peut effectuer toutes les constructions dans le modèle de Poincaré avec une règle et un compas. Allez-y !

Avec le modèle de Poincaré nous terminons notre étude de l'histoire de la géométrie non-euclidienne.

5. Sources

- | | |
|----------------|---|
| Chabert, J. L. | <i>Les géométries non Euclidiennes</i> (Repères 1 (1990), 69 - 91). |
| Euclide | <i>Les Eléments</i> . Traduit par Vitrac (Paris : Vrin, 1990). |

- Legendre, A.-M. *Réflexions sur différentes manières de démontrer la théorie des parallèles* (Mémoires de l'Académie Royale des Sciences de l'Institut de France 12 (1833), 367 - 410).
- Poincaré, H *La science et l'hypothèse* (Paris : Flammarion, 1968).
- Pont, J. C. *L'aventure des parallèles* (Bern : Lang, 1986).
- Proclus de Lycie *Les Commentaires sur le Premier Livre des Eléments d'Euclide*. Traduit par P. Van Eecke et all. (Bruges, 1948 - réédité par Blanchard (Paris), 1959).