

Modèles (mathématiques) : éléments d'histoire d'une expression

Martin ZERNER

Introduction

On parle beaucoup de modèles et de modélisation. À croire ce qu'on en dit le plus souvent, il s'agirait d'un rapport universel des mathématiques au réel, ou quelque chose de ce genre. L'enjeu d'une histoire et d'une épistémologie des modèles est donc important, en particulier pour l'enseignement. En les étudiant sérieusement, on pourrait peut-être contribuer à éviter des aberrations comme le problème qui vient d'être proposé au baccalauréat ES: on a fait étudier aux candidats des fonctions censées représenter l'amortissement et le coût de maintenance d'une machine sans la moindre réflexion sur la question de savoir s'il était raisonnable de les représenter par ces fonctions là et encore moins sur ce que ces fonctions veulent dire (la maintenance comprend quoi?). Je soupçonne au demeurant, mais c'est sûrement pur mauvais esprit de ma part, que les auteurs du problème sont eux-mêmes incapables de cette réflexion.

Je vais résumer ici ce que je sais de l'aspect historique. J'ai traité la question de façon plus développée la question dans un article à paraître dans un livre collectif de l'équipe REHSEIS (Zerner à paraître (a)) sur l'histoire des applications des mathématiques qui contient aussi des analyses comparatives de modèles; deux points particuliers sont exposés plus en détail dans d'autres articles (Zerner à paraître, (b) et (c)).

Je ne sais pas ce que c'est qu'un modèle mathématique. C'est donc, comme il est indiqué dans le titre, de l'histoire de l'expression que je parlerai. C'est-à-dire que je ne m'occuperai que de travaux où le mot "modèle" figure en toutes lettres. Quant à l'adjectif "mathématique", il est très souvent sous-entendu, ce qui complique la tâche; il faudra recourir au contexte pour en décider.

Nous commencerons cette étude au début du XX^e siècle et nous nous arrêterons dans chaque discipline au moment où le mot "modèle" aura envahi la littérature. Nous verrons que les différences entre les disciplines sont ici le point essentiel. Même ainsi limitée, l'étude comportera forcément des lacunes. Certains domaines n'ont pas été étudiés (par exemple la cosmologie), mais surtout on ne peut jamais être sûr de ne pas avoir laissé échapper certaines occurrences, même dans des domaines qu'on a travaillés. Cependant dans ce cas, on peut être confiant qu'il s'agit d'apparitions isolées dont la signification est faible.

Du début du siècle au tournant de 1944

On trouve le mot modèle employé en physique au début du siècle dans quelques situations, surtout à propos des modèles d'atomes. Celui de Rutherford, publié en 1911 s'est imposé et est bien connu: des électrons gravitant autour d'un noyau lourd formé de particules lourdes, les unes chargées positivement, les autres neutres. Bohr (1913) complète la théorie de ce modèle en quantifiant les orbites des électrons. J'ai employé ses propres termes, c'est seulement bien plus tard, quand les modèles sont devenus à la mode, qu'on a parlé d'un modèle de Bohr. Au demeurant, s'agit-il de modèles mathématiques? Ils sont comparables à des modèles réduits, à cette différence près qu'ils sont très agrandis. Au demeurant le statut épistémologique de ces objets était très controversé (voir par exemple Bellone 1973). À la même époque, on se met à étudier d'autres objets qui seront eux aussi baptisés modèles beaucoup plus tard, par exemple les structures simplifiées d'étoiles. À partir de 1940, Burgers introduit ce qu'il appelle des modèles statistiques de la turbulence; ces travaux mériteraient une étude qui n'est pas faite.

En logique mathématique, le mot modèle apparaît dans un article de von Neumann en 1925 (von Neumann 1961-63, I.4), peut-être a-t-il été utilisé avant, le sens est déjà le sens actuel. Il s'agit donc d'un objet interne à la logique mathématique et le modèle est à un niveau d'abstraction inférieur à celui du système formel (cf. Badiou 1969).

En statistique théorique, l'expression modèle mathématique apparaît dans un article de Neyman et Pearson de 1936 et se répand assez rapidement. La même année, elle commence à être employée en économétrie par Tinbergen (traduit dans Tinbergen 1959). Il faut noter que si, dans les deux domaines, une définition générale est assez souvent donnée au début des publications, l'usage technique du modèle se fait toujours dans un contexte statistique. Dans les années suivantes, ces modèles économétriques sont étudiés systématiquement dans le cadre de la Commission Cowles. Créée par un financier américain, elle regroupe surtout des économistes européens chassés par le nazisme, dont Tinbergen lui-même et le Norvégien Haavelmo qui systématisera la nécessité des modèles probabilistes en économétrie dans un mémoire célèbre (Haavelmo 1944).

Von Neumann et la notion générale de modèle

L'année 1944 marque un tournant avec la parution du livre de von Neumann et Morgenstern sur la théorie des jeux et du comportement économique. C'est là qu'apparaît, et avec force, la conception des modèles mathématiques comme méthode scientifique universelle. Son expression la plus nette se trouve dans un article ultérieur de von Neumann: "Pour commencer, il faut souligner une affirmation dont je suis sûr que vous l'avez déjà entendue mais qu'il faut répéter encore et encore. C'est que les sciences n'essaient pas d'expliquer, elles essaient même à peine d'interpréter, principalement elles font des modèles. Par un modèle, on entend une construction mathématique qui, avec l'addition de

quelques interprétations verbales, décrit des phénomènes observés." (von Neumann 1961-63, VI.36). Dans les textes de cette série, von Neumann confond systématiquement théories et modèles, en particulier en physique.

Avant d'aller plus loin, il est indispensable de confronter ces affirmations aux travaux de physique du même von Neumann. Ces travaux se répartissent en deux périodes: de 1927 à 1934, un livre et 17 articles portant tous sur la physique quantique naissante et de 1941 à 1959, 26 articles traitant, à deux exceptions près, de dynamique des fluides ou de domaines voisins. Dans l'une et l'autre période, le mot "théorie" apparaît souvent, le mot "modèle" rarement. Dans la première, on le trouve trois fois, chaque fois au début d'un article, dans deux cas le sens en est obscur, dans le troisième il désigne une théorie imparfaite, au moment où elle est supplantée par une autre plus perfectionnée (il s'agit des théories de l'électron en rotation de Pauli et Dirac respectivement, von Neumann 1961-63, I.19). La deuxième période est plus cruciale pour notre propos, puisque contemporaine des considérations générales de von Neumann sur la notion de modèle. Des cinq ou six passages où il est question de modèles, un sens précis du mot se dégage: il s'agit de situations pour lesquelles la théorie physique est connue mais elles sont trop compliquées pour déduire de cette théorie les caractéristiques du phénomène, le modèle est alors une situation simplifiée où les calculs théoriques sont possibles; on espère obtenir ainsi une approximation des situations réelles. Le modèle de Burgers (von Neumann 1961-63, VI.32) est à mettre à part: il s'agit d'une équation qui n'a plus d'interprétation physique mais dont on a de bonnes raisons de penser qu'elle a des propriétés mathématiques semblables au système qui régit la mécanique des fluides (les équations de Navier-Stokes).

La contradiction entre la conception des modèles qui est à l'œuvre dans ces travaux de physique de von Neumann et la notion de modèle telle qu'il la présente dans ses déclarations générales sur les sciences est flagrante: dans les travaux de physique, "théorie" et "modèles" sont deux notions nettement distinguées et souvent opposées, les théories sont omniprésentes et les modèles apparaissent comme des pis aller. C'est la notion générale de modèle qui apparaît dans le livre de von Neumann et Morgenstern et elle y remplit deux fonctions. La première est une justification générale du mode de raisonnement adopté obtenue par assimilation à la physique: "À ce point, le lecteur remarquera une grande similitude avec le concept quotidien de jeu. Nous pensons que cette similitude est très essentielle; en fait elle est plus que cela. Pour les problèmes économiques et sociaux, les jeux remplissent - ou devraient remplir - la même fonction que divers modèles géométrico-mathématiques ont accomplie avec succès dans les sciences physiques." (p.32 dans la troisième édition) Il ne faut pas oublier que dans ce contexte il s'agit des sciences physiques fictives de l'essayiste von Neumann, pas de celles de celles qui apparaissent dans le travail du physicien. La deuxième fonction s'accomplit dans un contexte plus technique. Dans l'économie néo-classique, celle dont les auteurs voudraient clarifier les bases, chaque consommateur est susceptible de comparer l'utilité qu'il attache à deux paniers de biens (par exemple une livre de beurre et la moitié d'un micro-

ordinateur d'un côté et un livre de math et un kilo de pommes de terre de l'autre). Mais pour appliquer leur appareil mathématique, von Neumann et Morgenstern ont besoin qu'il sache faire plus: attacher une valeur numérique à chacun de ces paniers de biens. La notion de modèle est abondamment mobilisée pour persuader le lecteur que la construction qu'ils font de cette utilité numérique est de même nature que le passage d'une température simplement repérable à une température grandeur mesurable qu'a connu l'histoire de la physique.

À partir de 1944, l'emploi du mot "modèle" (mathématique) se répand en économie, en dehors de son contexte statistique initial. On commence d'ailleurs à assister à ces rebaptêmes qui sont devenus massifs par la suite. Ainsi von Neumann avait publié en 1937 un exposé intitulé "Sur un système d'équations de l'économie et une généralisation du théorème du point fixe de Brouwer" (en allemand); une traduction anglaise paraît en 1945 sous le titre "A model of general economic equilibrium" (von Neumann 1961-63, VI.3).

De l'économie aux sciences sociales et à la recherche opérationnelle

Le titre du livre de von Neumann et Morgenstern, *Theory of Games and economic Behavior*, de même que son contenu, comportaient un appel à ce que les Américains appelaient les sciences du comportement (*behavioral sciences*), c'est-à-dire la psychologie et la sociologie. Cet appel a été immédiatement entendu. En particulier, c'est dans les années qui suivent immédiatement que des psychologues se sont attelés à des mesures d'utilité en laboratoire (Preston et Baratta 1948, Mosteller et Nogee 1951, Rousseas et Hart 1951). Il faut ajouter que le rapport de ces mesures à la théorie économique est des plus douteux. En 1951, Bush et Mosteller publient les premiers modèles d'apprentissage, sous ce nom. On notera que c'est le même Mosteller qui travaille au même moment sur la mesure de l'utilité, avec une référence très explicite à von Neumann et Morgenstern, la filiation est donc claire.

Le sociologue Lazarsfeld, très intéressé par l'introduction des mathématiques dans son domaine, a suivi ces deux séries de travaux. En 1953, il organise une conférence dont les actes sont publiés l'année suivante sous le titre *Mathematical Thinking in the social Sciences* (Lazarsfeld 1954, *thinking* peut se traduire "pensée" ou "façon de penser"). C'est un peu l'aboutissement de ce mouvement de "modélisation" (un terme qu'on n'emploie pas encore) dans les sciences sociales. L'importation depuis l'économie est marquée, comme Lazarsfeld le marque lui-même dans son introduction, par le fait qu'un des intervenants les plus importants est Marschak, directeur de la Commission Cowles.

Après ce passage de l'économie aux sciences sociales, c'est dans la recherche opérationnelle que le mot "modèle" s'introduit. Les débuts de ce domaine de recherche pendant la guerre sont difficiles à étudier, étant couverts par le secret militaire. Ce secret est levé en 1951 pour l'ouvrage de base de Morse et Kimball; le mot "modèle" n'y figure pas. Dans la principale revue, *Operations Research*, qui

paraît à partir de 1952-53, on trouve de très rares titres jusqu'en 1956, la plupart portant encore la marque de l'origine économique. Ensuite l'usage du mot se banalise.

La prolifération

À ce point la chronologie devient plus difficile à suivre.

D'après les bibliographies que j'ai consultées, on parle de modèles en dynamique des populations à partir de la fin des années 1958, mais encore dans un contexte statistique. Les trop célèbres équations de Lotka et Volterra pour un système fictif prédateur-proie ne seront appelées "modèle" que plus tard. Dans les revues et les colloques de mathématiques appliquées, le mot semble apparaître vers le milieu des années 1960 et se répand très lentement.

En physique, l'évolution est extrêmement complexe. On parle de plus en plus de modèles dans les domaines où le mot était déjà employé. Par exemple, on commence à appeler modèles d'étoiles les structures étudiées depuis le début du siècle sans doute vers 1950, par exemple Lloyd Motz dans sa préface à la réédition du livre d'Eddington (1959). Une rubrique *modelling* apparaît dans l'index des *Physics Abstracts* en 1973. Mais dans l'ensemble, on préfère parler, selon le cas, d'équations ou de théories que de modèles jusque dans les années 1980. La physique apparaît donc comme la science qui a été le plus longtemps réfractaire à l'emploi généralisé du mot "modèle". Ce point est important, puisque dans la conception que nous avons vue chez von Neumann, comme dans l'imaginaire de la plupart des scientifiques, ce mot exprime, vaguement il est vrai, l'extension à toute activité scientifique du type de raisonnement qui serait, toujours selon cette conception, typique de la physique.

En guise de conclusion

Dégageons les points principaux que montre ce survol. La notion de modèle comme modalité universelle d'application des mathématiques est née du besoin de justifier par l'analogie avec la physique un certain type de pensée économique. Dès son origine, elle opère pour cela une déformation de l'épistémologie de la physique elle-même. On peut se demander si malgré cette déformation dans le discours général, l'usage effectif des modèles en économie apporte une authentique démarche scientifique. C'est là que l'histoire de l'expression, telle qu'elle a été présentée ici trouve ses limites et qu'il faut recourir à l'analyse de cas. Ma conclusion de cette analyse est négative, mais j'ai déjà dit que je ne pouvais pas apporter les arguments ici.

Il n'y a pas lieu de s'étonner qu'elle s'étende d'abord aux sciences sociales, où elle apporte, comme en économie, un précieux label de scientificité. Les facteurs de son extension aux "mathématiques appliquées" et aux sciences de la nature sont plus difficiles à mettre en évidence et certainement complexes; c'est du côté de l'idéologie qu'il faut les chercher.

Bibliographie

- Badiou 1969 : *Le Concept de Modèle* . Maspéro, Paris
- Bellone 1973 : *I Modelli e la Concezione del Mondo nella Fisica moderna da Laplace a Bohr* . Feltrinelli, Milan
- Bohr 1913 : *On the constitution of atoms and molecules*, Philosophical Magazine, VI-26 p.1-25
- Bush et Mosteller 1951 (a) : *A mathematical model for simple learning*, Psychological Review, V.58 p.313-323
- Bush et Mosteller 1951 (b) : *A model for stimulus generalization and discrimination*, Psychological Review, V.58 p.413-423
- Eddington 1959 : *The internal Constitution of the Stars* . Dover, New York
- Haavelmo 1944 : *The probability approach in econometrics*, Econometrica, 12 (supplément de 120p.)
- Lazarsfeld (sous la direction de) 1954 : *Mathematical Thinking in the social Sciences* . The Free Press, Glencoe
- Morse et Kimball 1951 : *Methods of operational Research* . The Technology Press of MIT, Cambridge, Wiley, New york et Chapman & Hall, Londres
- Mosteller et Nogee 1951 : *An experimental measurement of utility*, Journal of Political Economy, 59 p.371-404
- Neumann (von) 1961-63 : *Collected Works* (6 vol.). Pergamon, Oxford, Londres, New York, Paris (les références dans le texte à ce titre comportent en chiffres romains le numéro du volume et en chiffres arabes le numéro de l'article dans le volume)
- Neumann (von) et Morgenstern 1944 : *Theory of Games and economic Behavior*. Princeton University Press, Princeton
- Neyman et Pearson 1936 : *Contributions to the theory of testing statistical hypotheses* Statistical Research Memoirs 1, University College, London, department of statistics, p.1-37, reproduit dans *Joint statistical Papers* . University of California Press, Berkeley, 1967
- Preston et Baratta 1948 : *An experimental study of the auction-value of an uncertain income*, American Journal of Psychology, 9 p.183-193
- Rousseas et Hart 1951 : *Empirical verification of a composite indifference map*, Journal of Political Economy, 59 p.288-318
- Tinbergen 1959 : *Selected Papers* . North Holland, Amsterdam
- Zerner à paraître (a) : *Le double langage du modèle mathématique*
- Zerner à paraître (b) : *Analogie et modèles chez von Neumann*
- Zerner à paraître (c) : *Paul Lazarsfeld et la notion de modèle mathématique*, communication au colloque Paul Lazarsfeld, Paris, 15-17 décembre 1994