

L'épistémologie dans la recherche en didactique, est-ce qu'on peut choisir?¹

Guillermína Waldegg

Résumé: L'épistémologie intervient d'une façon inéluctable à deux moments de la recherche en didactique: d'une part, elle accompagne le cadre théorique du chercheur; d'autre part, elle est indispensable pour que les analyses historique, logique et méthodologique des concepts mathématiques prennent une signification didactique. Je soutiens cette thèse avec l'exemple d'une recherche réalisée précédemment: l'examen des "Paradoxes de l'infini" de Bernard Bolzano.

Introduction

Michèle Artigue, dans sa conférence "*L'importance et les limites du travail épistémologique en didactique*" [2] exposée à la réunion annuelle de PME-1992 (International Group for the Psychology of Mathematics Education), décrit trois façons selon lesquelles l'épistémologie a contribué, à son avis, à la recherche en didactique.

De son point de vue, dans des domaines mathématiques spécifiques (comme l'analyse), l'épistémologie a permis:

- a) D'identifier les obstacles épistémologiques qui peuvent, à leur tour, devenir des obstacles didactiques selon l'approche de Brousseau [3].
- b) De s'intéresser à l'histoire des mathématiques en cherchant des problèmes qui peuvent aider aux études sur l'enseignement actuel, comme on le fait dans le groupe d'Evelyn Barbin [4] ou de M. Schneider [5].

-
- ¹ Cette étude a été élaborée sous le patronage de CONACYT - México, Projet 1623-S9208.
 - ² Artigue, Michèle (1992): "*The Importance and Limits of Epistemological Work in Didactic*" Geeslin, W. et K. Graham (Eds.), *Proceedings of the XVI PME Conference*, New Hampshire, 3, 195-216
 - ³ Voir par exemple, Brousseau, G. (1983): *Les obstacles épistémologiques et les problèmes en mathématiques*, Recherches en Didactiques des Mathématiques, Vol 4.2, p. 164-198
 - ⁴ Commission inter-IREM Épistémologie et Histoire des Mathématiques (1992): *Histoires de problèmes, histoire des mathématiques*. Ed. IREM de Lyon
 - ⁵ Schneider, M. (1988): *Des objets mentaux aires et volumes au calcul des primitives*, Thèse de Doctorat, Louvain La Neuve

- c) De mieux comprendre le fonctionnement de l'enseignement aujourd'hui moyennant l'étude de l'évolution historique des liaisons entre science et école, au sens de la "transposition didactique" défini par Chevallard [6].

D'un point de vue général, l'épistémologie permet, selon M. Artigue, d'identifier les différents statuts des concepts mathématiques dans leur développement historique ou encore dans l'élaboration des connaissances d'un individu, par exemple:

- a) Régine Douady [7] soutient que les *concepts* mathématiques peuvent être perçus comme des outils ou comme des objets. Dans le premier cas (comme des outils), l'intérêt est dirigé vers leur usage afin de résoudre certains problèmes dans un contexte spécifique, par quelqu'un de bien précis et dans un moment donné de l'histoire et de son histoire personnelle. Dans le deuxième cas (comme des objets), le concept est considéré dans une dimension culturelle, comme une pièce de la connaissance mathématique, indépendamment du contexte et des personnes.
- b) Dans la même ligne, nous avons la thèse d'Anna Sfard [8] qui offre deux conceptions possibles d'une *notion* mathématique: la conception opérationnelle et la conception structurelle. La distinction postulée par Sfard est différente de celle de Douady avec quelques rapports cependant.
- c) Et bien entendu, nous avons l'ancienne thèse de Tall et Vinner [9] sur l'image conceptuelle et la définition formelle des concepts mathématiques bien connue de tous.

Finalement, et encore dans la sphère générale, Michèle Artigue reconnaît le rôle que joue l'épistémologie dans les idées de contrôle et de rigueur qui régissent l'activité mathématique, qu'elle soit scientifique ou scolaire.

Dans tous les cas, M. Artigue remarque que l'épistémologie est une aide pour la didactique et qu'elle ne peut jamais la remplacer. Après cette analyse, on peut déduire que les différents rôles de l'épistémologie dans la didactique sont, à son avis une question d'option, c'est-à-dire, l'épistémologie est un outil, entre autres, qu'on peut utiliser ou pas.

En plus de mon accord presque total avec l'enquête de M. Artigue, je voudrais ajouter deux aspects qui, à mon avis, ne figurent pas dans son analyse. Ils apparaissent à deux niveaux différents et correspondent à deux moments où l'épistémologie intervient dans la recherche en didactique, cette intervention étant d'ailleurs inéluctable.

-
- 6 Chevallard, Y. (1985) *La transposition didactique- Du savoir savant au savoir enseigné*. La Pensée Sauvage, Grenoble
 - 7 Douady, R. (1984): *Jeux de cadres et dialectique outil/objet*, Thèse d'État, Université Paris 7
 - 8 Sfard, A (1991): *On the Dual Nature of Mathematical Conceptions: Reflections on Processes and Objects as Different Sides of the Same Coin*, Educational Studies in Mathematics, Vol. 22-1, pp. 1-36
 - 9 Tall, D. and S. Vinner (1981): *Concept Image and Concept Definition in Mathematics with Particular Reference to Limits and Continuity*, Educational Studies in Mathematics, Vol. 12-2, pp. 151-169

Le premier est lié à la façon dont le chercheur fait face à une étude: l'épistémologie procure les bases théoriques pour une méthodologie (je comprends méthodologie dans un sens étendu, c'est-à-dire, non seulement les procédés de la recherche, mais aussi la façon de valider les résultats, et de les structurer dans une théorie).

Le deuxième aspect que je veux ajouter, constitue une sorte de complément de la vision panoramique de M. Artigue. Je suis d'accord, le travail épistémologique ne suffit pas pour remplacer la recherche en didactique; néanmoins il est nécessaire et indispensable pour que les analyses historiques, mathématiques, logiques et méthodologiques des concepts mathématiques prennent une signification didactique. L'épistémologie est le pont obligé entre ces analyses et le travail en didactique.

Les bases épistémologiques de la recherche

Je commence donc par l'analyse des bases épistémologiques de la recherche. Quand un chercheur décide d'étudier un phénomène, que ce soit naturel ou social, il met en jeu un ensemble de théories et de concepts propres à sa discipline ainsi que d'autres savoirs – plus ou moins proches –, qui lui permettent de fonder ses hypothèses et de proposer ses inférences.

Un autre type de conceptions modèle aussi son travail. Il s'agit de ses conceptions épistémologiques. Ce qu'il pense à propos de la nature des connaissances, de la façon de les construire, les relations qu'il établit entre les savoirs et le monde extérieur, déterminent quelle sera la description de la réalité qu'il fera et la façon dont il l'analysera. Tout ce bagage, tant disciplinaire qu'épistémologique, constitue le cadre théorique de la recherche.

Le choix des données qui fourniront le support empirique à l'étude, sera déterminé par la façon dont le chercheur définit les objectifs de la recherche à partir des questions auxquelles il veut répondre, et par la façon dont il délimite les variables qui seront privilégiées ou mises en relief dans l'étude, toujours pilotée par son cadre théorique.

L'épistémologie réaliste de la science du XIX^e siècle se basait sur l'hypothèse que le monde "réel" avait une structure non seulement bien réglée par des lois, mais aussi compréhensible par la raison humaine. Lorsqu'on acceptait cette prémisse, on finissait par croire que l'expérience et les conclusions inductives auxquelles elle donnait lieu devraient être les mêmes pour tout le monde.

Je crois qu'aujourd'hui, la plupart des spécialistes partagent l'idée qu'il n'y a pas d'observations objectives. La majorité des chercheurs en didactique des mathématiques adhèrent à des principes constructivistes. D'après ces principes, c'est toujours au travers du filtre conceptuel de l'observateur qu'une expérience va être analysée.

Alors, l'approche constructiviste remet en question des sujets aussi fondamentaux que l'objectivité de la connaissance, les critères de vérité d'une explication, les relations causales, le sens d'une explication scientifique, et même la conception de l'activité de recherche. Voyons:

Concernant l'observation objective, nous savons qu'une épistémologie constructiviste postule, dans les grandes lignes, qu'on s'approche de la connaissance d'un phénomène moyennant un processus de structurations successives. A partir de nos savoirs préalables nous "observons des faits" et nous attribuons des rapports entre les différents éléments ou facteurs qui interviennent dans le phénomène.

Sur le problème de la vérité on peut dire que la connaissance, pour les théories constructivistes (en particulier, pour Piaget), est une fonction adaptative dans le sens biologique. Cela signifie que les produits de l'activité cognitive – et cela comprend l'activité cognitive du chercheur –, ne sont jamais des représentations d'une réalité extérieure, mais toujours des structures conceptuelles avec lesquelles l'organisme opère dans le monde pour atteindre ses buts. Ainsi, la connaissance n'est plus une question de vérité, mais plutôt une question de viabilité.

Adopter l'épistémologie constructiviste a un autre effet qui concerne l'idée de causalité, on ne peut plus parler de "cause-conséquence" dans le sens classique. Un événement n'est jamais la conséquence d'une seule cause. Les rapports causals deviennent un réseau de transformations liées structurellement à l'événement interprété dans une théorie. Par exemple, pensons à la loi de la gravitation de Newton: on ne peut pas dire que les mouvements des planètes soient causés par la force de la gravitation, c'est la loi de la gravitation mais aussi les trois lois du mouvement de Newton et sa théorie dynamique complète qui rendent intelligibles les mouvements des planètes.

Une approche constructiviste modifie les faits les plus essentiels du travail scientifique. Ce point de vue nous oblige à remarquer les rapports plutôt que les éléments, les transformations, plutôt que les états, et surtout, les invariants dans les transformations. Un phénomène n'est pas un ensemble de faits isolés (ou isolables), il s'agit de déterminer les activités et les rapports qui rendent intelligibles le phénomène participant à une totalité. L'idée d'explication scientifique dans le cadre constructiviste est donc essentiellement différente.

L'affaire éducative possède des caractéristiques qui peuvent nous mener à l'identifier comme un problème complexe. Tous les chercheurs savent que, face à l'ambition d'isoler les facteurs d'un fait éducatif, on reste insatisfait parce qu'on doit négliger, peut-être, trop de choses qui peuvent être décisives dans l'étude, ou parce qu'on doit éliminer des relations qui peuvent donner un certain sens au phénomène. Une théorie constructiviste de la connaissance, doit nous aider à atteindre une vision organisée du phénomène éducatif, cela veut dire, une vision où la totalité est conçue d'une façon structurée.

Une étude faite dans un cadre épistémologique constructiviste poursuit inévitablement une approche interdisciplinaire parce que, en tant que problème complexe, il réclame la convergence de plusieurs disciplines pour construire une explication plus globale.

Nous connaissons plusieurs études où l'on peut constater des corrélations statistiques entre variables – appartenant, peut-être, à plusieurs disciplines – (l'indice d'échec contre le niveau socio-économique de la famille, par exemple) et malheureusement, dans des travaux superficiels, ces corrélations sont considérées sou-

vent comme des rapports causals (dans notre exemple, un bas niveau socio-économique est la "cause" d'un haut indice d'échec). Un tel point de vue peut devenir une tendance à donner des "solutions" unidimensionnelles aux problèmes complexes (si nous élevons le niveau socio-économique de l'élève, son indice d'échec diminuera).

Ici, à mon avis, on ne peut pas ignorer les conséquences d'avoir tel ou tel point de vue épistémologique dans notre recherche.

Un pont vers la didactique

Analysons maintenant le rôle de l'épistémologie en tant que passage obligatoire de l'analyse historique, logique, mathématique ou méthodologique, vers l'analyse proprement didactique [10].

Il s'agit ici, bien entendu, des études sur les concepts des mathématiques. Pour mieux faire comprendre mon point de vue, je vais donner un exemple. Quand nous avons étudié, dans un projet sur l'infini, le livre de Bernard Bolzano "*Paradoxes de l'Infini*" [11], nous avons rencontré quelques faits historiques intéressants:

Comme antécédents, nous savons qu'avant la première moitié du XIX^e siècle, les mathématiciens ne reconnaissaient d'autre infini que l'infini potentiel. Le développement du Calcul dans les XVII^e et XVIII^e siècles est signé par la quête d'algorithmes pour les processus infinis engendrés dans les cadres géométriques et dans des contextes dynamiques. Ces algorithmes émergent comme une extrapolation de l'algèbre des procédés finis.

Les algorithmes généraux pour le calcul des aires et des tangentes, de même que les techniques des séries infinies étaient une partie centrale de l'arithmétique des processus infinis. Avec la consolidation du Calcul, les procédés infinis et toute l'opérativité associée ont acquis une place incontestable dans les mathématiques. Ce n'est pas le cas de l'infini actuel.

La conception de Bolzano de l'infini, exposée principalement dans les *Paradoxes*, n'a pas de précédent en mathématiques et bouleverse toute une tradition millénaire. Pour la première fois, comme l'affirme Jan Sebestik, [12]

L'infini actuel dont les propriétés cessent d'être contradictoires pour devenir simplement paradoxales, est admis en mathématiques à titre de concept défini, ayant une référence et attaché aux seuls objets susceptibles de dénombrement ou de mesure, c'est-à-dire, aux ensembles et aux grandeurs. [Sebestik, p.436]

- 10 J'adopte le concept d'analyse didactique de M. Artigue c'est-à-dire, "l'étude des rapports entre l'enseignement et l'apprentissage basé sur la compréhension des fonctionnements du système didactique ou, plus général, des institutions didactiques".
- 11 Bolzano, Bernard (1851): *Paradoxien Des Unendlichen*, Leipzig. *Les paradoxes de l'infini* (Introduction et traduction de H. Sinaceur) Seuil 1993. *Las paradojas del infinito* (Trad. L.F. Segura), México, 1991, Mathema. Les pages dans les citations sont celles de l'édition en espagnol.
- 12 Sebestik, Jan (1992): *Logique et Mathématique chez Bernard Bolzano*, VRIN, Paris

Je veux décrire avec un certain détail quelques aspects mathématiques des *Paradoxes de l'Infini*, étant donné que les concepts clés pour une mathématisation de l'infini y sont contenus, bien que d'une façon embryonnaire.

Bolzano postule qu'on doit toujours penser l'infini en tant qu'attribut des "ensembles": tout d'abord, Bolzano écarte l'idée selon laquelle les ensembles infinis n'admettraient pas de détermination. Le fait qu'ils en admettent une repose sur le principe de compréhension et sur l'unicité de l'extension pour tout concept donné.

Le deuxième principe fondamental chez Bolzano est que l'infini admet des degrés, les ensembles infinis n'ont pas tous la même grandeur. Comme mise en œuvre de ce principe, Bolzano se propose de comparer les ensembles infinis et de les ordonner selon leur taille. Comment définir l'ordre et l'égalité (l'équipotence) entre les ensembles infinis ? Question cruciale à laquelle Bolzano cherchera la réponse jusqu'à la fin de sa vie.

Pour arriver à une définition d'ensembles – finis et infinis –, Bolzano propose la construction inductive suivante:

Supposons que l'on a une suite dont le premier élément est un individu de l'espèce A et dont les termes suivants sont obtenus, chacun d'eux à partir de son prédécesseur, moyennant l'adjonction d'un nouveau individu de l'espèce A... Donc, clairement, tous les termes de la suite, à l'exception du premier qui est un seul individu de l'espèce A, seront des multitudes de l'espèce A. Ces multitudes je les nomme finis ou dénombrables, ou, plus spécifiquement, nombres entiers... [Bolzano, Paradoxes, § 8, p 43]

Nous avons ici un principe constructif de génération d'un ensemble (à partir de 1 et moyennant l'emploi du "successeur"). Puis, chaque élément de l'ensemble est conçu comme une multitude finie, c'est-à-dire, chaque nombre est constitué d'unités. Voilà une construction inductive des ensembles finis qui permet à Bolzano d'arriver à une définition d'ensembles infinis non comme une négation du fini mais en rapport à lui:

En particulier, la suite peut avoir tant de termes qu'elle n'aura pas de dernier terme... Je propose le nom "multitude infinie" pour la multitude constituée de façon à ce que toute multitude finie ne soit qu'une partie d'elle... [Bolzano, § 9, p 44]

Quant à la comparaison des ensembles infinis, point crucial pour arriver à une arithmétique de l'infini, Bolzano identifie un paradoxe:

... deux ensembles infinis peuvent présenter le rapport suivant: d'une part, il est possible d'associer chaque objet appartenant à l'un de ces ensembles à un objet de l'autre pour former un couple, de telle sorte qu'aucun objet des deux ensembles ne reste seul sans être relié en couple, et qu'aucun ne figure dans deux ou plusieurs couples; d'autre part, il est possible que l'un de ces ensembles contienne en même temps l'autre comme une simple partie, de sorte que les multitudes que ces ensembles représentent pourront se trouver dans les rapports

les plus divers lorsque nous considérons leurs objets comme égaux, c'est-à-dire, comme unités... [Bolzano § 20, p. 64-65]

Bolzano affirme donc la possibilité de mettre en bijection deux ensembles infinis dont l'un est un sous-ensemble propre de l'autre. Néanmoins, Bolzano nie que la bijection soit un bon critère pour déterminer la "numérosité" des ensembles infinis quand un rapport du type "tout-partie" est présent.

... la conclusion [que deux ensembles infinis sont égaux] ne sera pas possible à moins que les deux ensembles aient d'identiques éléments déterminants. [Bolzano, § 21, p. 67] (...) si nous ne soignons pas ce point-ci, nous pouvons arriver à l'absurde dans les calculs où l'infini intervient. [§ 24]

Néanmoins, nous pouvons identifier quelques situations particulières, comme la bijection entre les nombres naturels et leur carrés, plus exactement entre les termes des séries

$$S_1 = 1 + 2 + 3 + \dots \text{ etc.}$$

$$S_2 = 1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots \text{ etc.}$$

d'où Bolzano déduira, "malgré l'apparence du contraire", l'égalité des ensembles de leurs termes. En effet:

... par le fait d'élever, dans S_2 , chaque terme de la série S_1 au carré, nous changeons uniquement les propriétés de ces termes, mais non leur multiplicité. [Bolzano § 33, p 89]

Concernant donc l'arithmétique de l'infini, Bolzano analyse la possibilité d'introduire une certaine opérativité, mais, comme il ne possède pas de concept pour quantifier les ensembles, comme la cardinalité de Cantor, le problème de l'arithmétisation de l'infini reste en des termes qui ressemblent à la théorie des proportions d'Eudoxe, en cherchant seulement à déterminer la raison entre l'un et l'autre infini. A ce point, Bolzano abandonne l'idée de "numérosité", cruciale chez Cantor, et définit une arithmétique de l'infini basée donc sur le critère du tout et de la partie, voici un exemple:

"Il n'est pas moins évident que l'ensemble des grandeurs qui restent entre deux grandeurs données, disons entre 7 et 8, dépend exclusivement de la distance $8 - 7$ et donc il sera nécessairement égale à n'importe quel autre ensemble dont la distance soit égale - et cela bien qu'il s'agisse d'un ensemble infini et encore impossible de déterminer moyennant un nombre, même très grand - Si nous appelons $\text{mult}(b-a)$ l'ensemble des grandeurs entre a et b , il doit y avoir des équations non-numériques comme les suivantes:

$$\text{mult}(8 - 7) = \text{mult}(14 - 13)$$

et aussi des rapports comme le suivant:

$$\text{mult}(b - a) : \text{mult}(d - c) = (b - a) : (d - c)$$

dont la validité est incontestable [Bolzano § 29, p. 80-81] (...) ce fait ouvre la possibilité de calculer sur l'infini [§ 30]

D'après Bolzano, c'est le rapport partie-tout qui permet de faire des opérations avec les ensembles infinis.

Jusqu'ici j'ai donné un bref exemple du travail sur la source originelle que nous avons mis en perspective avec le moment historique; il est nécessaire maintenant d'introduire les analyses mathématique et logique:

En réunissant les indications sur l'ordre et l'égalité des grandeurs que Bolzano définit entre les ensembles infinis, on obtient les propositions suivantes:

- 1) Le tout est plus grand que la partie (ou, traduit en termes de nombres cardinaux), cardinalité $A < \text{cardinalité } B$ si et seulement si A est en bijection avec une partie propre de B
mais, en même temps:
- 2) Tout ensemble infini peut être appliqué bijectivement sur une de ses parties propres (définition d'ensemble infini de Bolzano).
D'autre part, comme il résulte des recherches de Bolzano sur l'extension des concepts,
- 3) Tout ensemble a une certaine grandeur (un nombre cardinal unique).
Ajoutons à ces trois énoncés le suivant:
- 4) Deux ensembles mis en bijection ont la même multiplicité (ont le même cardinal),

que Bolzano avance pour les ensembles infinis entiers, c'est cela qui fait éclater la contradiction qui est déjà présente entre les deux premières propositions.

L'évidence intuitive de l'axiome d'Euclide (1), dérivée de la considération des ensembles finis, interdit à Bolzano, comme à ses prédécesseurs, d'établir un critère d'équivalence par l'intermédiaire d'une bijection. Ce conflit profond, présent dans presque chaque section des *Paradoxes de l'infini*, l'empêche de construire une arithmétique de l'infini cohérente.

Jusqu'à maintenant, nous avons fait l'examen d'un extrait du travail de Bolzano du point de vue historique, mathématique et logique. Afin de traduire ces conclusions en des termes utilisables en didactique, nous avons besoin d'effectuer une analyse épistémologique.

D'abord, Bolzano ne cesse d'insister sur le rapport paradoxal entre deux ensembles infinis: à partir de l'existence d'une bijection entre deux ensembles infinis, le fait de conclure leur égalité du point de vue de leur multiplicité ou, comme nous disons depuis Cantor, leur équipotence ou équivalence, c'est étendre de manière illégitime une propriété des ensembles finis aux ensembles infinis. Voudrait-on considérer comme "égaux du point de vue de la multiplicité" deux ensembles infinis uniquement en vertu d'une bijection qu'on réussit à établir entre eux? Bolzano ne veut pas admettre que les notions du fini et de l'infini ne rentrent pas dans la définition de l'équivalence fondée sur l'existence d'une bijection entre deux ensembles quelconques, définition qu'il avait lui-même formulée. Nous sommes ici en face d'un obstacle épistémologique qui résulte d'une conception basée sur l'intuition et sur l'évidence empirique. C'est un bon candidat à devenir un obstacle didactique: les conceptions formées à partir des ensembles finis empêchent fortement d'accepter le critère de bijection indiqué pour établir une compa-

raison entre ensembles infinis. Nous avons indiqué qu'il s'agit aussi en fait d'un obstacle didactique, les résultats sont décrits dans l'article Waldegg (1993) [13].

Mais, lisons le travail de Bolzano avec l'éclairage du cadre de l'épistémologie génétique de Piaget.

Nous pouvons caractériser les rapports logico-mathématiques que Bolzano établit entre les ensembles infinis comme appartenant au niveau *inter-opérateur*. Dans les grandes lignes, Piaget et Garcia (1987) [14] définissent ce niveau comme celui des articulations internes où la réversibilité manque; les rapports restent donc isolés et ils ne forment pas des systèmes de transformations ni des structures. Nous avons deux types de ces rapports.

1) Comparaisons et correspondances élaborées avant la constitution des fonctions. Il s'agit ici des identités... et des correspondances qui se produisent à partir des répétitions, et de l'établissement de similitudes et d'équivalences. Il y a aussi des fonctions, mais elles n'impliquent ni des transformations ni des invariants.

2) Actions de transformation – comme les collections divisées en sous-collections –... mais sans avoir encore la compréhension de la quantification ... et les sériations, mais seulement quand l'ordre est obtenu par des vérifications empiriques et donc il n'existe pas de transitivité [Cf. Piaget et García, p 123]

Pensons le travail de Bolzano dans ce cadre épistémologique et psychologique.

D'abord, Bolzano établit tant des comparaisons que des correspondances entre les ensembles infinis, mais ces rapports restent ancrés à l'intérieur de l'ensemble: ce sont les liaisons entre les différentes parties de l'ensemble qui déterminent aussi bien la grandeur de celui-ci que celles de ses parties. D'autre part, la comparaison entre deux ensembles est réduite à la comparaison entre leurs parties.

Bolzano met en rapport l'ensemble avec une partie de lui même, mais ce rapport n'entraîne pas la possibilité d'une transformation: il s'agit d'un rapport statique, pour ainsi dire. Bien que dans ce type de rapports il y ait une certaine transitivité, un ensemble (disons les points d'une région) ne peut pas se transformer (par exemple, moyennant une homothétie) sans que la multiplicité de l'ensemble ne change, c'est-à-dire, la multiplicité n'est pas un invariant.

Bolzano ne définit pas d'opération à partir d'un ensemble dont le résultat soit un ensemble différent comme le fait Cantor avec ses ensembles "puissance". De nouveau, on ne trouve pas les transformations et ses invariants.

La vérification des rapports bolzaniens est empirique, basée sur la propriété de la figure géométrique. Les rapports gardent une étroite liaison avec les caractéristiques géométriques (et donc empiriques) de l'objet.

Il y a enfin une certaine cohérence locale chez Bolzano mais il est loin d'atteindre une cohérence globale.

Avec ces points de vue, nous avons programmé une recherche avec des élèves, dont les résultats (parus dans *Educational Studies in Mathematics*) ont montré la coïncidence entre le niveau des opérations de Bolzano et celles des élèves en

13 Waldegg, G. (1993): "La comparaison des ensembles infinis: un cas de résistance à l'instruction", *Annales de Didactique et des Sciences Cognitives*, 5, 1993, p 19-36

14 Piaget, J. et R. García (1987): *Vers une logique des significations*, Murion Éditeur, Genève

termes des fonctions qui interviennent dans ses réponses [15]. Les conclusions nous ont permis d'interpréter, d'une part, les fonctions qu'établissent les enfants face aux ensembles infinis et leurs propriétés, et les niveaux d'abstraction et de structuration qu'ils ont atteint, et d'autre part, les niveaux suivants qu'ils doivent surmonter pour arriver à un concept mathématique d'ensemble infini.

A mon avis, nous n'aurions pas pu réussir à mettre en œuvre ces deux expérimentations avec des jeunes sans en avoir fait l'étude épistémologique.

Pour conclure, je voudrais résumer brièvement la thèse de cette deuxième partie de l'exposé en remarquant les questions qui ont guidé la recherche:

Du point de vue de l'histoire il est convenable de se poser des questions comme les suivantes:

- Est-ce qu'il y a un moment de changement remarquable dans le développement de l'idée d'infini? Lequel?
- Pourquoi Bolzano dédie-t-il une œuvre complète à l'introduction de son nouveau concept? A qui répond-il?
- Quelle était la notion d'infini avant Bolzano? Pourquoi?
- Quels étaient les usages de l'infini à l'époque de Bolzano?, etc.

Mais, il y en a d'autres auxquelles l'histoire ne peut, d'elle même, donner de réponse, elle a besoin de l'analyse logico-mathématique, comme dans les questions suivantes:

- Quels sont les rapports logiques qui existent entre le concept d'infini et d'autres concepts mathématiques chez Bolzano?
- Quelle est la structure théorique qui les contient?
- Comment Bolzano définit-il et fait-il opérer ces concepts? Est-ce que les façons de les faire opérer et de les définir sont congruentes entre elles?
- Quels sont les concepts dérivés du concept d'infini de Bolzano?
- Sur quels concepts est basé le concept d'infini de Bolzano?
- Quels sont les concepts auxquels la mathématique actuelle devrait renoncer si elle devait conserver le concept d'infini de Bolzano?

Mais pour utiliser les réponses à ces questions dans une recherche en didactique, il est nécessaire de les analyser épistémologiquement:

- Quel est le statut du concept chez Bolzano?
- Quels sont les obstacles que Bolzano ne réussit pas à surmonter?
- Quels sont les niveaux de représentation du concept?
- Quels sont les problèmes que le concept d'infini de Bolzano résout?
- Quels sont les stratégies et les critères que Bolzano suit pour valider ses résultats?
- Quels sont les niveaux de rigueur dans le travail de Bolzano?
- A quelles questions est-ce qu'il répond?
- Quels sont les nouveaux problèmes qu'il ouvre?

15 Moreno, L. and G. Waldegg (1991) : "The Conceptual Evolution of Actual Mathematical Infinity" *Educational Studies in Mathematics*, 22, 1991, pp. 211-231

- Est-ce qu'il y a une modification des rapports avec le monde réel? Avec la théorie?

Les réponses à ces questions ouvrent des nouvelles interrogations dans la sphère de la didactique:

- Est-ce que les obstacles épistémologiques sont aussi des obstacles didactiques?
- Quels sont les stratégies que les élèves développent pour traiter les ensembles infinis?
- Est-ce que les élèves donnent des réponses différentes en face des questions semblables, ou, au contraire, des réponses semblables à des questions différentes?
- Quels sont les niveaux de représentation du concept ? etc.

Bien, j'espère que la question posée dans le titre de cet exposé a trouvé, au moins, une réponse: quant il s'agit des études conceptuelles on ne peut pas choisir, la seule manière d'arriver à la recherche en didactique est de passer par l'intégration de l'histoire, la mathématique, la logique et l'épistémologie.

Mexico, Mai, 1995

*Gómez Farías 74,
04100 Coyoacán
México, D.F.*

Tels: (525) 658 78 95/ 659 49 30

Fax: (525) 658 78 85

e-mail: gwaldega@mailier.main.conacyt.mx