

La symbolique mathématique comme obstacle épistémologique

BEBBOUCHI Rachid.
Institut de Mathématiques
USTHB ALGER

Au commencement était le signe
Hilbert.

1) Le chiffre

Le premier symbole "mathématique" a été les entailles sur des os ou des bâtons. Ensuite vint le chiffre, ce symbole qui gère actuellement toute notre vie. Son histoire est passionnante [1]. Il a acquis plusieurs formes au cours des siècles et celui qui est actuellement universellement adopté a dû subir plusieurs persécutions.

De l'écriture gwalior de 870 en Indonésie, le chiffre a évolué vers la numération hindoue d'une part et la numération "ghobar" d'autre part. Cette dernière forme, très usitée au Maghreb arabe du XI^{ème} au XV^{ème} siècle et même au delà, traversa les Pyrénées grâce à Gerbert d'Aurillac (fin du X^{ème} siècle) mais ne s'implanta pas et subit de profondes déformations tendant à lui donner (peut-être ?) une nouvelle virginité. Au XIII^{ème} siècle, Léonard de Pise, dit Fibonacci, ayant étudié ces chiffres "ghobar" à Béjaïa, la Bougie médiévale dont on rapportera la confection de "petites chandelles" ou bougies, écrivit le Liber Abaci qui a tout de suite été adopté par les commerçants d'Italie. Le pape de Florence interdit l'usage de ces chiffres en 1292 sous le prétexte fallacieux qu'on peut confondre 0,6 et 9. Et en 1482, un traité allemand d'arithmétique d'Ulrich Wagner les réhabilita. Une véritable bagarre s'en suivit entre les "abacists" et les "algoristes".

Le mot "chiffre" vient de l'arabe "cifr" qui désigne 0 et veut dire néant, et va plus tard désigner les dix symboles 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9.

Il est remarquable de constater qu'il n'y a aucun mot dans la langue arabe qui le traduise exactement. Soit on utilise "raqm" qui veut plutôt dire numéro, soit "horf" qui veut dire symbole, soit "adad" qui veut dire nombre. Il y a même eu un effet boomerang puisqu'on trouve dans le langage scout l'utilisation du mot "chifra" qui désigne des signes.

N'oublions pas que certains pays arabes refusent de reconnaître les chiffres ghobar et de les utiliser sous prétexte que ce n'est pas une invention du Moyen-Orient : obstacle épistémologique ou "ethnologique" ?

Les chiffres gobar ont servi à écrire des nombres au Maghreb, la tradition arabe étant de les écrire en toute lettres. La lecture de ces nombres se faisait, et d'une manière logique, de droite à gauche, en commençant par les unités, les dizaines,... Cela permettait notamment une bonne utilisation des opérations élémentaires. Cette lecture a été modifiée en Europe, toujours dans le souci de lui donner une nouvelle virginité. Mais si en France, on lit le nombre de gauche à droite, cela n'a pas été suivi par tous les pays d'occident et,... effet boomerang ?, même les pays arabes ont modifié plus tard la lecture des nombres.

De plus revenir à la lecture de droite à gauche des nombres n'est plus possible à cause de l'écriture décimale actuelle qui, elle, par contre, arrivant tardivement, a suivi la logique de la lecture de gauche à droite.

On peut à juste titre se demander comment un ordinateur trouverait logique de lire un nombre.

2) D'autres symboles mathématiques [2]

Le symbolisme mathématique a réellement apparu au Maghreb par l'utilisation de tableaux, de signes (voir la codification de Fès) et d'abréviations comme pour "jedr" (racine). On écrivait :

$\sqrt{}$ mais rarement $\sqrt{}$

Le passage vers l'Europe a là aussi exigé une réécriture et on a vu apparaître $\sqrt{2}$ (Rudolff 1525)

Effet boomerang, en Algérie, on écrit désormais $\sqrt{}$! A partir du fameux livre Al Jabr oua Al Mouqabala d'El Khawarizmi, l'algèbre a pris son essor et ses symboles propres ont apparu.

Le premier digne d'être cité est celui qui représente l'inconnue. Depuis Abou Kamil (850-930) et Al-Karagi dit Al-Karhi (mort entre 1019 et 1029), les arabes désignaient l'inconnue par "chaï" (chose) et en Europe, on traduisit par "res" en latin (chez Léonard de Pise) et "cosa" en italien chez Lucas Pacioli ou coss (ou nombre cossique). Rudolff a même écrit un traité d'algèbre intitulé "coss" en 1525 et il y utilise le signe $\mathcal{Z}$ pour désigner l'inconnue. D'aucuns prétendent que de l'espagnol Xai on retint le x pour en faire un symbole. Mais il semble que la "filrière italienne" ait donné le signe abrégé $\mathcal{R}$ en 1554 pour radix (racine en latin). Et on trouve aussi chez Bombelli (1572) la notation exponentielle $\mathcal{U}$ pour x, par exemple :

$$\begin{array}{l} \mathcal{U} \quad \mathcal{U} \quad \mathcal{U} \\ 1 = 15 \text{ p } 4 \\ x^3 = 15 \text{ x } + 4 \end{array}$$

Ne retrouve-t-on pas là le $\mathcal{U}$ arabe utilisé dans des notations avec exposants ?

Actuellement, en Algérie, on utilise le $\mathcal{R}$ pour rappeler l'origine du symbole. Ces quelques exemples portent à croire que le symbole mathématique,

s'il sert le plus souvent comme abréviation, se permet des évolutions et est loin de susciter l'unanimité.

3) Symbolisme et rédaction

La première révolution a donc été au Maghreb où on se permettait de symboliser certaines opérations et abréger certains mots, bien que l'abréviation soit venue tout naturellement à partir des scribes, quelquefois pour apposer une signature, souvent pour faire "confrérie", par exemple :

c'est la fin : انتمى pour ام
il a dit : قال pour فى
pardon de Dieu : رحمة الله pour رحه

Dans un manuscrit qui vient d'être découvert dans une khizana (bibliothèque) au fin fond de la Kabylie, on peut lire une description détaillée du Tableau, symbole utilisé notamment dans les opérations élémentaires. En Europe, c'est au XVI^{ème} siècle qu'on connut un très grand enthousiasme pour la mise en place de symboles algébriques ; les algébristes de la renaissance étaient persuadés que le symbolisme allait développer les mathématiques. Rudolff le clamait très haut dans son traité "coss" déjà cité.

William Oughtred va employer plus de 150 symboles, dont certains de son invention en 1631, 1632 et 1657. Johann Rahn, dans son traité «Teutsche Albebra» (1659), divise la page en trois colonnes : à gauche, le résumé de la démonstration de la colonne de droite entièrement codé en symboles et la colonne du milieu contient les numéros des lignes de la démonstration.

Vers 1628, Descartes écrit dans la règle XVI :

"Quand aux choses qui n'exigent pas l'attention immédiate de l'esprit, quoi qu'elles soient nécessaires pour la conclusion, il vaut mieux les désigner par des signes très courts plutôt que par des figures complètes : car ainsi la mémoire ne pourra faillir, et la pensée ne sera cependant pas forcée de se partager pour les retenir, tandis qu'elle s'appliquera à en chercher d'autres."

Il va d'ailleurs introduire la notation exponentielle $X.X = X^2$ et sera suivi par Huygens, Mersenne et Wallis.

Mais au XVII^{ème} et XVIII^{ème} siècle, un deuxième courant va s'opposer à l'utilisation des symboles qui ne sont que des "artifices abrégatifs", comme l'affirme si bien le philosophe Thomas Hobbes.

La querelle entre les deux courants va se focaliser autour de la traduction des Éléments d'Euclide en Angleterre et jusqu'au XIX^{ème} siècle.

Le début du XX^{ème} siècle connaît le symbolisme logique de Whitehead et Russel (1925) et Bourbaki, en mettant de l'ordre dans les mathématiques, institue "l'écriture logique". Un des adeptes les plus fervents a été Ehresmann.

La rédaction des mathématiques s'est enrichie en symboles et appauvrie en texte.

Et l'étudiant du XX^{ème} siècle ne reconnaît un texte mathématique que si y apparaissent des symboles.

4) Symbolisme et réalité algérienne

En Algérie, il était tout naturel que les "réformateurs", à savoir les partisans de la "défrancisation" de l'enseignement (à ne pas confondre avec arabisation), se soient penchés sur la modification des symboles, devenant ainsi des "innovateurs". Mais si certains symboles s'y prêtaient du fait de leur origine arabe, d'autres demandaient une créativité trop coûteuse, et malheureusement prise en charge par des Inspecteurs de l'Enseignement Secondaire insuffisamment armés pour ce genre de travail. On a ainsi vu apparaître dans l'horizon de l'élève algérien (le supérieur a conservé la symbolique universelle).

- de nouveaux signes provenant de l'alphabet arabe : $\aleph, \beth, \zeta, \eta, \dots$
- de nouveaux signes provenant de l'alphabet grec : $\gamma, \infty, \geq, \delta, \dots$
- de nouveaux signes provenant de la symbolique de Russel : $\epsilon, \alpha, \beta, \dots$
- de nouveaux signes mathématiques : $\text{تف (س)}, \text{نما}, \text{ج}, \dots$
 $\leftarrow \text{س} \leftarrow \text{س}$

Il est clair qu'il est actuellement délicat de tirer la sonnette d'alarme. La preuve en est qu'après mon intervention sur ce sujet au V^{ème} colloque maghrébin sur l'histoire des Mathématiques Arabes en Tunisie (1-3 Décembre 1994), j'ai eu droit à une attaque en règle de mes collègues mathématiciens présents (venant essentiellement de l'École Normale Supérieure de Kouba, un des points de départ de l'arabisation de l'enseignement), pire, l'un d'eux [4] a sorti un article sur un journal édité en arabe, neuf jours après, pour relater le colloque et un tiers de son article consistait à dénigrer mes propos, arguant du fait que je ne pouvais étayer mes exemples de statistiques (combien d'enseignants font usage de tel ou tel symbole ?). De tels tests méritent-ils d'être réalisés ? (obstacle politique ?)

Parallèlement à cela, quelques obstacles sont apparus dans l'utilisation de ce symbolisme.

Dans une identification d'erreurs répétées sur 380 copies du baccalauréat Sciences Expérimentales, session 93 [3], on a notamment décelé les erreurs suivantes :

* 47 étudiants ont écrit : $8 - 7,38 = 1,38$

La notation décimale a constitué un obstacle et les élèves pensent que la virgule sépare deux entités indépendantes.

* Soient trois points A, B et J du plan, il s'agit de trouver l'ensemble des points N du plan tels que :

$$NA^2 - 2NB^2 + 3NJ^2 = 6$$

Sur 380 candidats, 214 n'ont pas répondu et 82 (soit près de 50% des réponses) ont mis en facteur N :

$$N(A^2 - 2B^2 + 3J^2) = 6$$

L'erreur montre une confusion entre point du plan et point de la droite réelle. Il se trouve qu'en arabe, la majuscule n'existe pas et l'expression algébrique :

$$n a^2 - 2 n b^2 + 3 n j^2 = 6$$

s'écrit de la même façon : $٦ = ٣٠٣ + ٢٠٢ - ١٠١$

A côté de cela, la rédaction de l'élève, même en arabe, mélange texte et symboles et devient inextricable.

5) Conclusion

Les textes mathématiques se reconnaissent désormais par les symboles qu'on y trouve. Certains mathématiciens en abusent (en analyse, il arrive souvent qu'une thèse de magistère comporte 80% de formules) ; d'autres, peut-être nostalgiques, réduisent le plus possible l'emploi de formules.

Mais il est clair qu'un article écrit avec plus de texte et moins de formules est plus attirant et, pédagogiquement, moins rébarbatif.

Mais l'apprentissage d'une telle rédaction se perd, du moins en Algérie. L'enseignant n'a plus le temps (ou l'envie ?) de corriger l'écrit de l'enseigné et ce dernier se complaît dans un abus de symbolisme, cachant ainsi son manque de maîtrise de la langue. C'est d'ailleurs caractéristique chez les "arabisants" quand on leur demande de rédiger en français (l'inverse doit aussi être vrai).

De plus, au tableau, quand on enseigne, on n'écrit que les formules et l'élève, lui, recopie ce qui est écrit au tableau. Alors, devons-nous nous plaindre ? Oui, parce qu'au bout de la chaîne, on demande une thèse, un article de recherche bien écrit, bien tapé et il arrive souvent qu'en Algérie, les magistrants mettent deux, trois ans uniquement pour bien coucher sur le papier leurs idées.

6) Bibliographie

- [1] Bebbouchi R. 1994 : *Chiffres entre tradition et modernité?*
Xème colloque inter IREM épistémologie et histoire des mathématiques, La mémoire des nombres, Cherbourg 27/28 Mai
- [2] Bebbouchi R. 1994 : *La mémoire des symboles de l'antiquité à nos jours.*
Vème colloque maghrébin d'histoire des mathématiques arabes, Tunis, 1-3 Décembre 1994.
- [3] Bebbouchi D., Belhadj F.Z., Bitam F. 1994 : *Analyse de l'erreur.*
Stage de didactique des sciences, Dijon, Juillet 1994
- [4] Saadallah A. 1994 : Vème colloque maghrébin d'histoire des mathématiques arabes, El-Massa, 12 Décembre 1994
- [5] Serfati M. 1987 : *La question de la chose.* Colloque à Strasbourg.

BOMBELLI, Algebra-1572.

Ancora si può procedere nella equatione di questo Caplo in un' altro modo. Come se si haueste ad agguagliare 1^3 a 15 p. 4 : pigliasi il mto de le cose, che è 5 . rubari fa 125 , et questo si troua del quadrato della metà del num. che è 4 , resterà 0 m. 121 , che de questo pigliata la Radice, dirà 10 m. 121 , che ag-

guinea con la metà del numero, farà
 Eguale a 15 p. 4 a. p. 10 m. 121 , che pigliato il cre-
 ator cubico, et aggiunto col suo residuo
 farà 12 p. 10 m. 121 p. 12 m. 10 m. 121 ,
 et tanto uale la cosa: Et benché questo resto si
 possa più tosto chiamar residuo, che altro.

$$\begin{array}{r}
 \begin{array}{r}
 5 \\
 5 \\
 \hline
 25 \\
 5 \\
 \hline
 125
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{r}
 12 \\
 4 \\
 \hline
 125
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{r}
 10 \text{ m. } 121 \\
 12 \text{ m. } 10 \text{ m. } 121
 \end{array}
 \end{array}$$

Somma 4 : et tanto uale la cosa.

come fu detto innanti nel Capitulo
 di. Confe, et non eguali a cose,
 che pure nell' operatione seruano
 senza difficultà alcuna, et assai
 volte si troua la ualuta de la
 cosa per numero, come questo, et
 la creatore; et il Creatore di