Sommer une série divergente ?
C'est tout naturel !

Anne MICHEL-PAJUS

IREM Paris VII

Pour défendre des concepts ou des résultats qui semblent — de par leur caractère paradoxal — inacceptables à leurs contemporains, les mathématiciens ont eu souvent recours à l'argument du "**naturel**"[1]. L'objet de cet atelier est d'examiner cet argument dans le cadre de la théorie des séries divergentes, thème fertile en paradoxes et controverses.

Afin de situer le problème mathématique, l'atelier commence par une discussion entre les participants autour de la question : parmi les égalités suivantes, quelles sont celles qui vous semblent naturelles, acceptables, inacceptables ?

$$(1) \qquad 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\ldots=2$$

$$(2) \qquad 1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{5}-\ldots=\ln 2$$

$$(3) \qquad 1-1+1-1+1-1+\ldots=\frac{1}{2}$$

$$(3bis) \qquad 1-1+1-1+1-1+\ldots=0$$

$$(4) \qquad 1+2+4+8+16+\ldots=-1$$

La première somme est acceptée sans réticence: elle utilise la somme d'une série géométrique comme limite des sommes partielles finies. La deuxième pose problème car elle utilise un développement en série entière sur le bord du disque de convergence, mais l'extension peut se justifier, en particulier par le théorème d'Abel. Les autres sont refusées. Pourtant, à un moment ou à un autre de leur histoire, chacune de ces sommes a été refusée ou acceptée par des mathématiciens, et les théories contemporaines fournissent un cadre où elles sont toutes "vraies", sauf (3bis).

Pourquoi les mathématiciens s'acharnent-ils depuis trois siècles à calculer la somme de séries divergentes, malgré les paradoxes qu'elles enfantent et les mises en garde des rigoureux? Ce n'est pas au nom de l'évidence, évidemment, mais au nom du **naturel**, naturellement. C'est-à-dire de ce qui est conforme à **leur** logique, quitte à affronter une contradiction, péché majeur contre **la** logique.

---

1 Dans tout l'article, les mots en italique sont soulignés par leur auteur, tandis que les mots en caractères gras, y compris dans les citations sont soulignés par moi.

Que fait un mathématicien devant un paradoxe ? Il peut s'incliner devant la contradiction, rejeter ou réviser la théorie qui y conduit: c'est l'attitude rigoureuse; mais il peut aussi adopter une attitude audacieuse et affronter le défi de l'écriture impossible de son intuition dans le langage mathématique ambiant. Il s'agit alors d'élaborer un concept qui permette d'assumer le paradoxe, sous la forme calculable d'un objet mathématique. En effet, le fait qu'il y ait contradiction dépend de l'univers mathématique dans lequel on se place, des objets préalablement construits mais aussi des modes de raisonnement, de la logique propre à cet univers. C'est pourquoi cette élaboration ne peut se faire qu'en se déportant de la logique normative en vigueur pour se placer dans la logique encore inconnue de l'univers en construction, la logique propre à l'impossible visé. Cela se réalise par tentatives de mise en cohérence locale, échecs, contournements et avancées, jusqu'à l'obtention souvent bien plus tard d'une cohérence globale que l'on pourrait nommer rigueur du nouvel univers. D'où vient la force qui porte ce mathématicien ? de sa conviction du **naturel** de ses recherches, qui assure la **réalité** de l'objet en construction.

L'objectif de cet atelier est de rechercher à travers des textes historiques l'évolution de ces logiques et la source de cette conviction, de dévoiler les présupposés non-mathématiques qui fondent l'intuition impérieuse des mathématiciens.

Nous verrons qu'ils renvoient tantôt à la nature supposée du monde métaphysique ou physique (harmonie de la Création Divine, succès des applications à la physique), tantôt à la nature supposée des mathématiques (généralité, efficacité, cohérence, liberté axiomatique), tantôt à la localité du champ de recherches, voire à la bonne foi du mathématicien...

Premier moment : les débuts du calcul infinitésimal et la métaphysique

Après s'être affranchis peu à peu des contraintes euclidiennes, les mathématiciens du XVII[e] découvrent le calcul infinitésimal. Les séries infinies y jouent un rôle primordial. Dans de nombreux cas, les développements en série constituent le seul moyen d'exprimer les fonctions "transcendantales" (c'est-à-dire non polynomiales), où les grandeurs que l'on cherche à déterminer (racines d'équations, aires, rapport de l'aire du cercle à sa circonférence...), sont impossibles à écrire dans le langage algébrique. Le glissement du domaine des sommes finies à celui des sommes d'un nombre indéfini de termes, puis aux sommes infinies est favorisé par la notation ambigüe d'une somme de quelques termes suivie par etc, &c ou ... Les mathématiciens appliquent aux développements infinis toutes les opérations algébriques, mais aussi la dérivation, l'intégration, qu'ils utilisent pour les sommes finies.

Bien que les mathématiciens disposent depuis Grégoire de Saint Vincent d'une définition de la somme d'une série tout à fait opératoire[2], c'est plutôt au

2 "Le terme d'une progression est la fin des séries à laquelle s'il nous est permis de poursuivre à l'infini, aucune progression ne peut aboutir, mais à laquelle il est possible d'accéder d'aussi près que de n'importe quel intervalle donné", 1647, *Opus geometricum quadraturae circuli*... Livre 1, p.55.

moyen d'arguments métaphysiques qu'ils justifient leurs techniques. A l'instar d'une somme finie, la série infinie a forcément une valeur: finie ou infinie, "vraie" ou "fausse"(imaginaire).

Newton expose sa méthode dans le *De Analysi per Aequationes Numero Terminorum Infinita* (L'Analyse par les Equations qui ont un Nombre Infini de Termes), publié en 1711, mais qui circule depuis 1669 .

> Et tout ce que l'Analyse ordinaire accomplit au Moyen des Equations comportant un Nombre fini de Termes (pourvu que cela se puisse faire), tout ceci peut toujours être accompli de même au moyen des Equations infinies, de sorte que je n'ai pas hésité à l'appeler également Analyse. Car les raisonnements dans ce cas ne sont pas moins certains que dans l'autre, ni les équations moins exactes, encore que nous autres Mortels, dont les pouvoirs de raisonnement sont confinés entre d'étroites limites, ne puissions ni exprimer, ni plus concevoir tous les termes de ces Equations que connaître exactement à partir d'elles les quantités que nous désirons.

Cet acte de foi reflète la conception qu'a Newton du monde comme création divine. Par ses recherches, en physique et mathématique comme en alchimie ou dans l'étude des textes sacrés, il vise à s'approcher de la pensée de Dieu, en extrapolant à partir de ce que l'esprit limité de l'homme peut en déchiffrer.

Dans ce cadre, les difficultés et paradoxes à l'intérieur des mathématiques ne seront pas forcément facteurs de rejet car ils ne sont que la trace de la toute-puissance divine et de l'insuffisance humaine. Rappelons Pascal :

> Une division infinie est chose incompréhensible puisqu'elle échappe à toute représentation directe, pourtant, il est vrai de dire qu'il n'y a point de géomètre qui ne croie l'espace divisible à l'infini. On ne peut non plus l'être sans ce principe qu'être homme sans âme[3].

> Incompréhensible. Tout ce qui est incompréhensible ne laisse pas d'être. Le nombre infini. Un espace infini égal au fini. Incompréhensible que Dieu s'unisse à nous.[4]

A comparer avec la définition de Cauchy: "lorsque les valeurs successivement attribuées à une variable s'approchent indéfiniment d'une valeur fixe, de manière à finir par en différer aussi peu que l'on voudra, cette dernière est appelée la limite de toutes les autres". *Cours d'analyse*, 1821.

3 *Réflexions sur l'esprit géométrique.*

4 Pensée 149, Ed. Lafuma.

Dans le même ordre d'idée, Leibniz trouve dans le calcul binaire une illustration de la création divine[5]. Et c'est encore une interprétation théologique, celle du Père Guido Grandi qui va rendre célèbre la série 1–1+1–1+1+ etc. déjà signalée par Bernoulli. Grandi y découvre qu'il est possible d'obtenir quelque chose à partir de "la répétition à l'infini de purs néants", ce qui renvoie au mystère de la Création. Leibniz qui voit dans ce paradoxe un danger pour sa "nouvelle science de l'infini" publie en 1713 une réponse au Professeur Wolff, de Halle, dans les *Suppléments aux Acta Mathematica* [6]:

> ... Dans la question remise récemment à l'ordre du jour par Guido Grandi, vous me demandez si je suis d'avis que 1–1+1–1+1 etc. à l'infini est égal à $\frac{1}{2}$ et comment écarter l'apparente absurdité d'une telle proposition. En effet puisque l'égalité 1–1 = 0 semble se reproduire une infinité de fois, on ne voit pas comment la répétition à l'infini de purs néants pourrait faire $\frac{1}{2}$. Je constate que Grandi confère à l'infini le pouvoir de faire surgir quelque chose à partir de rien, et qu'il attend par là expliquer, non sans élégance, la création du monde, que l'omnipotence Divine tire du néant. Mais la Création n'est pas simple répétition de Néants et suppose l'adjonction d'une réalité nouvelle et positive [...]

Leibniz justifie d'abord la valeur $\frac{1}{2}$ pour la somme en prenant x=1 dans l'égalité :

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + x^4 - x^5 + \text{etc.}$$

Pour appuyer cette extension d'une égalité valable a priori pour $x < 1$, il rappelle qu'il a déjà utilisé cette méthode avec succès pour la Quadrature du Cercle. Il emprunte ensuite à Grandi une idée d'illustration de ce résultat par les courbes "pour donner plus de prise à l'imagination", et donne enfin la justification par la "loi de continuité", énoncée ainsi par ailleurs :

> si une différence dans ce qui est donné peut-être rendue arbitrairement petite, il en est de même pour la différence qui en résulte dans ce qui est cherché[7].

qui implique que:

> dans les continus, on peut considérer une limite externe comme une limite interne, si bien que le dernier cas, même s'il est de nature complètement différente, est compris dans la loi générale gouvernant les autres.

Et donc ce qui est vrai pour $x < 1$, reste vrai pour $x = 1$. Ce dernier cas est de nature différente du premier, car il concerne un point (limite externe d'un segment), de nature différente du premier cas, qui concerne un segment de droite (limite interne). L'auteur accepte ici un autre paradoxe au sein de sa propre logique, qu'il escamote en le baptisant "Figure Philosophico-Rhétorique"

> Dès ce moment et de manière paradoxale et pour ainsi dire par une *Figure Philosophico-rhétorique* nous pouvons considérer le point par rapport à la ligne, le repos par rapport au

---

5 Cf *La naissance du calcul différentiel*, M. Parmentier, Vrin, 1989, p.437.

6 In *La naissance du calcul différentiel*, M. Parmentier, Vrin, 1989, p.441-450.

7 Gerhardt, *Leibnizens mathematische Schriften*, tome 6, p.129.

mouvement, comme des cas particuliers compris dans le cas général inverse, le point apparaissant comme une ligne infiniment petite, évanescente, ou le repos comme un mouvement évanescent. De même pour d'autres formules du même genre, que l'homme très profond qu'était Joachim Jung aurait nommées *vraies par tolérance* et qui sont des plus utiles pour l'art d'inventer, même si à mon avis elles enveloppent quelque chose de fictif et d'imaginaire [...] Au reste la nature, qui procède toujours pas à pas et non par sauts, ne saurait violer la loi de continuité.

Le terme de "Figure Rhétorique" et l'expression "vraies par tolérance" laissent supposer que cette loi est une fiction mathématique, mais celle-ci est justifiée philosophiquement par la référence à **la nature** (notons que Leibniz a la même attitude vis-à-vis de l'existence des infiniment petits).

Inversement, en réponse aux interrogations de Varignon, Leibniz justifiait en 1707 la continuité dans la physique et donc dans la nature par la continuité dans les mathématiques :

Je me contenterai de répondre à l'article de votre lettre où vous me demandez des éclaircissements sur mon principe de Continuité. Assurément je pense que ce principe est général et qu'il tient bon, non seulement dans la Géométrie mais encore dans la Physique. La Géométrie n'étant que la science des limites et de la grandeur du continu, il n'est point étonnant que cette loi s'y observe partout : car d'où viendrait une subite interruption dans un sujet qui n'en admet pas en vertu de sa nature? Aussi savons-nous bien que tout est parfaitement lié dans cette science, et qu'on ne saurait alléguer un seul exemple qu'une propriété quelconque y cesse subitement ou naisse de même, sans qu'on puisse assigner le passage intemédiaire de l'une à l'autre, les points d'inflexion ou de rebroussement qui rendent le changement explicable; de manière qu'une équation algébrique qui représente exactement un état, en représente virtuellement tous les autres qui peuvent convenir au même sujet. L'universalité de ce principe dans la Géométrie m'a bientôt fait connaître qu'il ne saurait manquer d'avoir lieu aussi dans la Physique : puisque je vois que, pour qu'il y ait de la règle et de l'ordre dans la nature, il est nécessaire que la Physique harmonise constamment avec le géométrique et que le contraire arriverait si, là où la Géométrie demande de la continuation, la Physique souffrait une subite interruption. Selon moi tout est lié dans l'univers en vertu de raisons de métaphysique, de manière que le présent est toujours gros de l'avenir et qu'aucun état donné n'est explicable naturellement qu'au moyen de celui dont il a été précédé immédiatement...[8]

Revenons à la Lettre à Wolff. Jusque-là, les deux hommes sont d'accord. Mais Leibniz veut rejeter la proposition que la série vaut 0. Certes une somme finie de zéros vaut zéro, mais Grandi a essayé de justifier le fait qu'une somme infinie de quantités nulles pouvait valoir autre chose par une "analogie", que Leibniz s'emploie à démolir.

M. Grandi tente avec ingéniosité de lever l'objection en recourant à une analogie. Il imagine que deux frères devant partager un patrimoine découvrent dans l'héritage de leur père une pierre de très grande valeur, dont le testament interdise la vente; ils conviennent donc entre eux de la déposer alternativement pour un an dans leur bibliothèque respective. De cette façon, à supposer que les héritiers respectent éternellement cette règle, la descendance de chaque frère se voyant accorder puis retirer la pierre une infinité de fois, en possèderait juridiquement la moitié.

---

8 Lettre du 16 Octobre 1707, citée dans *Leibniz et l'infini*, F.Burbage et N.Chouchan, PUF 1993, p.122-123.

Mais à y regarder de plus près, cette analogie est trop claudicante [...]

Il adresse deux reproches à cette analogie. Premièrement, la même situation apparaîtrait si la pierre était partagée un nombre fini d'années (égalité des droits mais résultat nul au bout du compte), et donc la distinction somme finie/somme infinie n'est pas pertinente, et deuxièmement, l'usufruit sur un an n'est pas la totalité du droit sur une chose.

Leibniz propose alors son deuxième argument, faisant intervenir l'infini, mais réfutant la réduction de la série à 0+0+0+etc. Il est fondé sur la" loi de justice":

Il m'appartient à présent de révéler la véritable solution, peut-être inattendue, en tout cas singulière, de cette énigme, ainsi que l'explication du paradoxe, en me ramenant d'abord à une série finie pour passer ensuite à une série infinie. Remarquons en effet que pour une série finie il faut distinguer deux cas qui d'une façon assez surprenante, se confondent dès qu'il s'agit d'une série infinie. Nous pouvons développer une série finie 1-1+1-1+1+etc. de deux manières: elle est ou bien constituée d'un nombre pair de termes et se termine par un -, comme1-1, 1-1+1-1, ou 1-1+1-1+1-1,dans ce cas, aussi loin que nous poursuivions, nous obtenons toujours 0. Ou bien la série est constituée d'un nombre impair de termes et se termine par un +, par exemple 1-1+1,1-1+1-1+1-1+1, aussi loin que nous poursuivions, tous les cas donnent +1. Mais lorsque la série est infinie 1-1+1-1+1-1+etc. à l'infini, au-delà de tout nombre,disparaît également la détermination pair impair. Et comme il n'y a pas plus d'arguments en faveur de la parité que de l'imparité, ni par conséquent en faveur d'un résultat égal à 0 ou à 1, le génie admirable de la nature fait que le passage du fini à l'infini s'accompagne du passage de propositions disjonctives (qui disparaissent) à une proposition unique affirmative (qui subsiste), moyen terme entre les deux propositions disjonctives. Or ceux qui ont traité des estimations ont montré que lorsqu'il s'agit de prendre le milieu entre deux quantités ayant même raison d'être, il faut prendre la moyenne Arithmétique, c'est-à-dire la moitié de leur somme; c'est ainsi que la nature observe ici encore sa loi de justice, par conséquent puisque dans le cas d'un nombre fini de termes la série 1-1+1-1+etc. vaut 0 si le nombre est pair et 1 s'il est impair, lorsque la multiplicité infinie des termes fait disparaître les deux cas, que les prérogatives du pair et de l'impair se confondent, et que l'un et l'autre ont exactement la même raison d'être, nous obtenons par conséquent $\frac{(0+1)}{2}=\frac{1}{2}$ comme je l'avançais.

J'ajoute que même si ce type d'argumentation semble plus Métaphysique que Mathématique, il ne laisse pas d'être solide. Au reste les Règles de la Véritable Métaphysique (celle qui ne se contente pas de dresser des nomenclatures) sont en Mathématiques, en Analyse et même en Géométrie, d'un usage plus étendu qu'on imagine[...]

Au demeurant le fait d'aboutir au même résultat à la fois par les propriétés des séries et par celles de l'infini n'est pas seulement source de satisfaction, ce sera aussi une aide très précieuse pour construire des raisonnements rigoureux sur l'infini et dévoiler de mieux en mieux les origines de notre nouvelle théorie. On prendra garde du même coup à ne pas porter préjudice à la nouvelle science en recourant à des paradoxes insoutenables. Ainsi lorsqu'on nous objectait que des quantités nulles si nombreuses soient-elles ne pouvaient rien donner de réel, il ne fallait pas répondre en distinguant entre le fini et l'infini, au sens où cette règle ne vaudrait pas pour l'infini, mais il fallait reconnaître la valeur générale de la règle et montrer, comme je viens de le faire, qu'il n'y a pas lieu de l'appliquer ici.

Sans doute inspiré des travaux de Huygens sur l'espérance mathématique et de ceux de Jacques Bernoulli sur la loi des grands nombres le deuxième argument est aussi fondé sur un Principe métaphysique.

Nous constatons que l'interaction entre mathématiques et métaphysique est constante: la métaphysique alimente la conviction mathématique; réciproquement, les mathématiques fournissent à la métaphysique un modèle, une métaphore, qui permet d'enfermer l'infini dans le fini et de penser l'Univers du point de vue de Dieu.

Jean Bernoulli clôt un traité sur les séries par ce poème:

Comme une petite somme finie enserre
Une Série sans fin, et la limite n'est présente en aucune limite
Ainsi les traces de l'Immense Puissance divine s'attachent
A un corps modeste, et la limite est absente de l'étroite limite.
Voir dans l'immense le minuscule, dis, quelle volupté!
Et quelle volupté de voir dans le minuscule le Dieu immense! [9]

Le rapprochement avec la philosophie de Leibniz donne des éléments d'interprétation de ce poème. Selon la *Monadologie*, la règle générale de l'univers est en Dieu, qui est la loi de toutes les séries, la loi générale de toutes les lois particulières que sont les monades; mais chaque monade exprime un point de vue sur l'univers, un reflet de celui-ci.

> Chaque monade est un miroir vivant, ou doué d'actions internes, représentatif de l'univers, suivant son point de vue, et aussi réglé que l'univers même.[10]

On peut ainsi voir toute la divinité dans une somme minuscule. Inversement, "dans l'immense voir le minuscule", c'est comprendre le fonctionnement sériel des évènements et des phénomènes:

> Les raisons du monde se trouvent [...] cachées dans quelque être hors du monde, distinct de la chaîne ou série des choses dont l'agrégat constitue le monde.[11]

> Quelle infinité d'infinités infiniment répliquée, quel monde, quel univers aperceptible dans quelque corpuscule qu'on pourrait assigner. Mais toutes ces merveilles sont effacées par l'enveloppement de ce qui est infiniment au-dessus de toutes les grandeurs, dans ce qui est infiniment au-dessous de toutes les petitesses, c'est-à-dire notre harmonie préétablie... qui donne même plus qu'infinité tout à fait universelle, concentrée dans le plus infiniment petit tout à fait singulier, en mettant virtuellement toute la suite de l'univers dans chaque point réel qui fait une monade.[12]

Dans ce cadre de pensée, une série qui n'aurait pas de somme est aussi impensable qu'une suite d'événements sans signification supérieure. Leibniz est ainsi conduit à proposer deux nouveaux aspects de la somme d'une série que

9 *Ars Conjectandi*, Bâle, 1713, p.306. Traduit du latin par moi.
10 *Principes de l'univers et de la grâce.*
11 *De la production originelle des choses.*
12 Gerhardt, tome 2, p. 553.

nous désignerons par la suite comme la sommation par prolongement et la sommation par moyennes.

Deuxième moment : Euler et l'efficacité

Les arguments de Leibniz n'ont évidemment pas clos le débat, et les opposants de l'attribution d'une somme aux séries divergentes soulèvent de nouveaux paradoxes, auxquels répondent de nouvelles tentatives de mise en cohérence. Simultanément l'utilisation des sommes de séries divergentes se révèle très fructueuse. Euler, en particulier, accomplit un travail titanesque sur les séries à partir de 1730. En inventant une profusion de méthodes dont certaines auront de nombreux développements, il obtient les sommes exactes ou approchées d'une foule de séries, convergentes, mais aussi divergentes, malgré ses propres appels à la prudence.[13]

Ses sommations de séries divergentes valent à Euler de nombreuses objections, en particulier de Nicolas Bernoulli, comme en témoignent ses lettres de 1742-1743. Nous n'avons pas les lettres de réponse d'Euler, mais celui-ci publie en 1754-1755 un article de synthèse[14] où il reprend tous les arguments de ses prédécesseurs et conclut en distinguant la **somme** de la série, de sa **valeur**, qui est celle de **"l'expression algébrique d'où dérive la série"**, pour aussitôt poser, de façon axiomatique, l'unification des deux concepts.

> 10. Mais aussi réel que semble ce désaccord, aucune des deux parties ne peut être taxée d'erreur par l'autre toutes les fois que l'on a besoin d'utiliser des séries de ce type en analyse. Car il faut donner du poids à l' argument que ni l'une ni l'autre partie n'est dans l'erreur, mais que tout le désaccord réside seulement dans les mots. Si en effet dans un calcul j'arrive à cette série 1–1+1–1+1–1+etc., et que je la remplace par $\frac{1}{2}$, personne certes n'ira à **bon droit** m'imputer une erreur, alors pourtant que cela n'aurait échappé à personne si j'avais posé n'importe quelle autre valeur à la place de la série. D'où il ne peut subsister aucun doute sur le fait que la série 1–1+1–1+1–1+etc. et la fraction $\frac{1}{2}$ sont des quantités équivalentes, et qu'il est toujours permis de substituer sans erreur l'une à l'autre. Toute la question semble donc se ramener à ceci: est-il juste d'appeler la fraction $\frac{1}{2}$ la somme de la série 1–1+1–1+1–1+etc.? Pour ceux qui disent non avec acharnement, alors qu'ils n'osent pas nier l'équivalence, il est fortement à craindre qu'ils ne tombent dans la Logomachie.
>
> 11. Mais je pense qu'il serait facile de régler tout ce litige, si nous voulions nous intéresser avec application à cette suite. Toutes les fois qu'en analyse nous en arrivons à une expression soit fractionnaire soit transcendante, nous avons coutume de la transformer en une série idoine pour faciliter la suite du calcul. Les séries infinies trouvent place en analyse aussi longtemps qu'elles sont issues de la transformation de quelque expression finie, et de ce fait il est toujours permis de

---

13 Par exemple, en 1739 : "On voit bien ici avec quelle prudence il faut traiter les sommes de séries divergentes", *Opera omnia* (1), Tome 14, p.360.

14 De seriebus divergentibus, *Novi. Comm. Acad. Sci. Petrop.*, 5, 1760 = *Opera omnia* (1), 14, p. 585-594. La traduction en français proposée à l'atelier se trouve dans *Mnemosyne*, IREM Paris VII, 1985, n°10.

remplacer dans un calcul une série infinie par la formulé dont la transformation lui a donné naissance. De là, de même que c'est avec un grand succés qu'on enseigne d'habitude les règles pour convertir les expressions finies, mais offertes sous une forme peu idoine, en séries infinies, de même à rebours il faut considérer que sont très utiles les règles grâce auxquelles, si l'on a proposé une série infinie quelconque, on peut chercher l'expression finie dont elle découle. Et comme cette expression peut toujours sans erreur être mise à la place de la série infinie, il faut que les deux aient la même valeur. De cela il ressort que l'on ne peut donner aucune série infinie qui ne puisse être conçue en même temps comme équivalente à une expression finie.

12. Si donc nous modifions autant l'idée reçue de somme au point de dire que la somme de toute série infinie est l'expression finie dont la transformation a donné naissance à la série-même, toutes les difficultés qui sont soulevées par les deux partis s'évanouissent d'elles-mêmes. D'abord en effet, l'expression dont la transformation donne naissance à une série convergente, donne en même temps sa somme, en prenant le mot dans son sens commun, et, dans le cas où la série est divergente, la recherche ne pourra plus être qualifiée d'absurde, si nous recherchons l'expression finie dont la transformation selon les règles de l'analyse produit cette même série. Et, une fois qu'il est permis de substituer cette expression à la série dans le calcul, nous ne pourrons plus douter qu'elle lui soit égale. Ceci étant résolu, nous ne nous écartons pas de la terminologie habituelle, si nous appelons aussi sa somme l'expression qui est égale à une série, pourvu que nous ne confondions pas cette notion avec l'idée de somme pour les séries convergentes, parceque, plus on additionne de termes, plus on doit s'approcher de la valeur de la somme.

Euler refuse de prendre parti sur les divers arguments des opposants; il choisit d'étendre "l'idée reçue de somme" de façon à assurer la cohérence locale de son champ de recherches. Il redéfinit carrément le mot somme, ce qui lui permettra, en jouant sur l'ambiguïté ainsi introduite, de transférer les méthodes relatives aux séries convergentes à un champ plus vaste.

Une telle confiance n'est plus fondée sur un principe métaphysique, mais sur le nombre et la constance des résultats obtenus à l'aide de cette convention ou d'autres méthodes de son invention (développements en fractions continues, regroupements et/ou déplacements de termes, recherche de séries solutions d'équations différentielles). Si Euler cherche à obtenir un consensus des mathématiciens sur la même conclusion que Leibniz (la légitimité d'utiliser une série en dehors de son domaine de convergence), ce n'est pas en invoquant une loi plus générale dont elle découlerait logiquement, mais en montrant son efficacité et sa consistance. C'est pourquoi la suite de l'article d'Euler est consacré au calcul d'une valeur approchée de la somme de la "série de Wallis":

$$1-1! + 2! - 3! + 4! - 5! + \text{etc.}$$

par quatre méthodes différentes, qui donnent des résultats voisins[15]. La première utilise la "transformation d'Euler" déjà rencontrée chez Newton[16], la deuxième utilise une autre méthode de Newton: les polynômes d'extrapolation, la

15 Voir A. Duval et J.-L. Loday, *Séries divergentes*, le Courrier du CNRS, supplément au numéro 62, 1985, p. 34-37, et E.-J. Barbeau, *Euler subdues a very obstreperous series*, Amer. Math. Monthly 86 (1979), p. 356-372.

16 Cf l'article: le jeu des paradoxes dans l'élaboration de la théorie des séries, *Mnemosyne*, IREM Paris VII, 1985, n°10.

troisième utilise une équation différentielle dont la série $\Sigma(-1)^n n!x^n$ est solution et la dernière le développement en fraction continue de cette série .

Ce besoin de consistance explique le refus d'examiner une objection de Nicolas Bernoulli qui suggère que la même série pourrait provenir de deux fonctions différentes, et par là avoir deux sommes différentes. Euler écrit à Goldbach, en 1745:

> Bernoulli ne donne pas d'exemples et je ne crois pas possible que la même série puisse venir de deux expressions algébriques réellement différentes

Ce en quoi il se trompe, évidemment. On peut aujourd'hui justifier ces résultats en considérant ce type de séries comme le développement asymptotique d'une fonction analytique dans un certain domaine. Pour toute série formelle, l'existence d'une telle fonction est assurée, mais pas son unicité, ce qui pourrait conduire à des résultats différents[17]. Quelque quarante années plus tard, un certain Jean-Charles Callet soumet un Mémoire à Lagrange pour publication dans les Mémoires de l'Académie des Sciences. Nous ne connaissons que le rapport[18] qu'en fait Lagrange en 1796. Callet remarque que:

$$\frac{1+x+\ldots+x^{n-1}}{1+x+\ldots+x^{m-1}}=\frac{1-x^n}{1-x^m}=1-x^n+x^m-x^{m+n}+x^{2m}-\ldots$$

et donc que pour $n<m$ et $x=1$, on obtient $1-1+1-1+1-1+\text{etc}\ldots=\frac{n}{m}$.

Ainsi que le rapporte Emile Borel[19], Lagrange écarte l'objection en défendant la règle, ici celle de la sommation par moyennes, mais en l'adaptant au contexte local :

> Lagrange montra cependant que l'objection précédente pouvait être levée; Leibniz avait fait reposer le calcul de la série [1–1+1–1+1+etc.] sur le calcul des probabilités. La somme de la série [1–1+1–1+1+etc.] étant 1 ou 0 suivant que l'on prend une nombre impair ou pair de termes, elle est aussi souvent égale à 1 qu'à 0; donc sa valeur la plus probable est égale à la moyenne $\frac{1}{2}$. Lagrange fait observer que si l'on veut appliquer la même méthode à la série $[1-x^n+x^m-x^{n+m}+x^{2m}+\text{etc.}]$, on doit remarquer qu'elle n'est pas complète, et que si, pour plus de netteté, on prend n=3 et m=5, elle doit s'écrire:
>
> $$1+0+0-x^3+0+x^5+0+0-x^8+0+x^{10}+0+\text{etc.}$$
>
> Dès lors, on voit que, si l'on prend la somme successivement de 1, 2, 3, 4, 5 ,... termes de la série, on constate que, sur cinq sommes consécutives, trois sont égales à 1 et deux à 0. La valeur moyenne est donc 3/5, ce qui est bien la vraie valeur de la fonction qui a donné naissance à la série.

Ceci n'empèchera pas Laplace de reprendre, bien plus tard, l'objection:

---

17 Pour une étude mathématique très complète, cf J.P. Ramis, *Séries divergentes et procédés de resommation*, Journées X-UPS 1991, Centre de mathématiques de l'Ecole Polytechnique, p. 9, réédité en1993, Supplément au bulletin SMF, Tome 121.

18 Rapport sur le mémoire de Callet, *Mémoires de la classe des Sciences mathématiques et physiques de l'Institut.*

19 Emile BOREL, Introduction aux *Leçons sur les séries divergentes*, 1901, Paris, p. 5.

Je mets encore au rang des illusions l'application que Leibniz et Daniel Bernoulli ont faite du Calcul des probabilités à la sommation des séries. [...] ces séries peuvent résulter du développement d'une infinité de fractions différentes [...] Ainsi la série, plus un, moins un, plus un, etc. peut naître du développement d'une fraction dont le numérateur est l'unité plus la variable, et dont le dénominateur est ce numérateur augmenté du carré de la variable. En supposant la variable égale à l'unité, ce développement se change dans la série proposée, et la fraction génératrice devient égale à $\frac{2}{3}$; les règles des probabilités donneraient donc alors un faux résultat; ce qui prouve combien il serait dangereux d'employer de semblables raisonnements, surtout dans les sciences mathématiques que la rigueur de leurs procédés doivent éminemment distinguer.[20]

La règle d'Euler, tout comme la règle probabiliste, assure une cohérence locale, pour les calculs **naturels dans un champ de recherches** et trouve à ce titre une certaine légitimité. Le fait que l'on obtienne des valeurs différentes dans des contextes ou par des méthodes différentes est soit nié, soit rejeté comme pathologique. Euler était pourtant capable d'affronter une situation de ce genre, comme il l'a montré en reconnaissant le caractère multiforme du logarithme des nombres imaginaires[21]. Mais ce point n'avait peut-être pas tellement d'importance dans le cadre de l'utilisation locale, comme l'explique Emile Borel, qui sera le fondateur de la théorie générale des séries divergentes:

... il est aisé de former des séries dont les termes dépendent d'une variable et qui se réduisent à la série d'Euler pour une valeur particulière de cette variable, alors que la valeur limite de la série est un nombre absolument quelconque [...] Faut-il en conclure, avec Monsieur Pringsheim, que l'affirmation d'Euler est dépourvue de toute valeur et doit être rejetée? Nous ne le pensons pas. Il importe, en effet, de remarquer que les anciens géomètres n'avaient point l'habitude de construire **artificiellement** des expressions analytiques compliquées pour prouver telle ou telle opinion ; ils se contentaient, d'habitude, de calculer sur les expressions qui se présentaient **naturellement** à eux, au cours de leurs recherches.

Il doit donc être expressément sous-entendu, dans l'affirmation d'Euler que si l'on est conduit à la série 1–1+1–1+1+... par n'importe quel calcul, on peut sans hésitation, la remplacer par $\frac{1}{2}$, puisqu'il s'agit seulement des calculs que l'on sera conduit **naturellement** à faire, et non d'expressions construites exprès pour mettre la règle en défaut. Pour prouver donc que l'affirmation d'Euler est fausse, en se plaçant du point de vue d'Euler, il faudrait fournir l'exemple d'un géomètre qui, n'ayant aucune préoccupation relative aux séries divergentes et à la légitimité de leur emploi, a trouvé, dans des calculs ayant pour objet des recherches d'un ordre tout différent, une série [...] pour laquelle la règle d'Euler est en défaut.

Tant qu'on n'aura pas fourni un tel exemple, on pourra dire que cette règle est exacte, au point de vue pratique et expérimental, puisque, depuis un siècle, elle n'aurait trompé aucun des géomètres qui l'auraient appliquée, sauf ceux qui se seraient précisément proposé comme but de la mettre en défaut; ceux-là, non plus, n'auraient d'ailleurs pas été trompés, puisqu'ils savaient à l'avance le but vers lequel ils tendaient.[22]

---

20 Laplace, *Essai philosophique sur les probabilités*,1814.

21 Cf J.L.Verley, La controverse des logarithmes des nombres négatifs et imaginaires, in *Fragments d'histoire des mathématiques*, 1981, APMEP.

22 *Introduction aux Leçons sur les séries divergentes*, 1901, Paris , p.7-8.

Cependant, le mouvement de refus envers l'intrusion de la métaphysique en mathématiques, joint à une intuition moins sûre des calculs "naturels" augmente la méfiance envers les séries divergentes. Les exemples d'emploi dangereux des séries se multiplient et le besoin d'appuyer l'analyse sur des bases moins intuitives devient pressant. Les mathématiciens considèrent qu'il faut au contraire nettoyer leur science de toute influence extérieure, et que c'est quelque nécessité interne qui doit réguler leur développement.

Troisième moment : les séries divergentes bannies par les adeptes de la "rigueur", mais défendues par les tenants de la "permanence" de l'algèbre

Les initiateurs de "la rigueur" en analyse sont Bolzano, Cauchy et Abel. A l'âge de 24 ans, au cours d'un voyage d'études à travers l'Europe, Abel écrit de Berlin à son ancien professeur Holmboë :

> [...] Les séries divergentes sont en général quelque chose de bien fatal, et c'est une honte qu'on ose y fonder aucune démonstration. On peut démontrer tout ce qu'on veut en les employant, et ce sont elles qui ont fait tant de malheurs et qui ont enfanté tant de paradoxes. Peut-on imaginer rien de plus horrible que de débiter $0 = 1-2^n+3^n-4^n+$etc. , étant un nombre entier positif ? Enfin mes yeux se sont dessillés d'une manière frappante, car à l'exception des cas les plus simples, par exemple les séries géométriques, il ne se trouve dans les mathématiques presque aucune série infinie dont la somme soit déterminée d'une manière rigoureuse, c'est-à-dire que la partie la plus essentielle des mathématiques est sans fondement. Pour la plus grande partie les résultats sont justes, il est vrai, mais c'est là une chose bien étrange. Je m'occupe à en chercher la raison, problème très intéressant [...]. La formule binôme elle-même n'est pas encore rigoureusement démontrée [...]
>
> Pour montrer par un exemple général (sit venia verbo) comme on raisonne mal, et combien il faut être sur ses gardes, je choisirai le suivant. Soit $a_0+a_1+a_2+a_3+$etc. une série infinie quelconque, tu sais qu'une manière très ordinaire pour en touver la somme c'est de chercher la somme de celle-ci : $a_0+a_1x+a_2x^2+a_3x^3+\ldots$ et faire ensuite $x=1$ dans le résultat. C'est bien juste, mais il me semble qu'on ne doit pas l'admettre sans démonstration; car quoiqu'on ait démontré que $fx = a_0+a_1x+a_2x^2+a_3x^3+\ldots$ pour toutes les valeurs de x qui sont inférieures à l'unité, il ne s'ensuit pas que la même chose ait lieu pour x égal à 1. Il serait bien possible que la série $a_0+a_1x+a_2x^2+a_3x^3+\ldots$ s'approchât d'une quantité toute différente de $a_0+a_1+a_2+a_3+$etc. lorsque x s'approche indéfiniment de l'unité. C'est ce qui est clair dans le cas général où la série est divergente ; car alors elle n'a pas de somme. J'ai démontré que ce procédé est juste lorsque la série est convergente.[23]

Abel publie en effet la même année son fameux mémoire sur la série du binôme[24]. On y trouve le théorème du prolongement sur le bord du domaine de

23 Lettre du 16 Janvier 1826 in ABEL, *Œuvres complètes*, 1881.

24 Untersuchungen über die reihe $1 + \frac{m}{1}x + \frac{m(m-1)}{1.\ 2}x^2 + \ldots$

Journal für reine und angewandte Mathematik,1826, Traduit dans Abel, *Œuvres complètes*,1881, réimprimé en 1965. "Recherches sur la série..", tome 1, p.224.

convergence, justifié à l'aide de ce que nous nommons la "transformation d'Abel". Ce théorème justifie, pour les séries réelles convergentes, le "principe de continuité" de Leibniz.

La première définition de la convergence sans référence à la somme, ce que nous appelons le "critère de Cauchy de convergence des séries" est publié en 1817 par Bolzano, dans un traité[25] qui vise à démontrer le théorème des valeurs intermédiaires. Après avoir désigné par $F_n(x)$ la somme des n premiers termes de la série, il énonce le théorème :

> Si dans une série de grandeurs: $F_1(x)$, $F_2(x)$, $F_3(x)$,..., $F_n(x)$..., $F_{n+1}(x)$ la différence entre son n^e terme $F_n(x)$ et tout terme ultérieur $F_{n+p}(x)$, aussi éloigné soit-il du n^e, reste plus petite que toute grandeur donnée si l'on a pris n suffisamment grand: alors il existe toujours une certaine grandeur constante, et une seule, dont s'approchent toujours davantage les termes de cette série et dont ils peuvent s'approcher d'aussi près que l'on voudra, lorsqu'on prolonge la série suffisamment loin.

Isolé à Prague, où il enseigne la théologie avec une liberté qui le fera bientôt révoquer, Bolzano a peu de lecteurs. On ne sait si Cauchy en fait partie, mais celui-ci publie ce critère en 1821 dans son *Cours d'Analyse*. En fait, tant que la théorie des nombres réels n'est pas élaborée, l'existence de la somme d'une série, définie comme la limite de la suite des sommes partielles, ne peut être établie rigoureusement selon nos standards.

Dès 1810 Bolzano se propose de construire une nouvelle logique pour les mathématiques :

> ... [la] mathématique est une science qui traite des lois universelles (formes) d'après lesquelles les choses doivent se disposer dans leur être... [ou] lois des conditions de leur possibilité.

Dans *Les paradoxes de l'infini*, publié en 1851, il essaie de construire un calcul de l'infini rigoureux. Il refuse absolument le statut de grandeur à la somme de la série 1–1+1+... L'argumentation de Bolzano se fait en deux parties. Premièrement, on peut concevoir des expressions mathématiques qui ne correspondent à aucune grandeur. Deuxièmement, l'expression étudiée en fait partie puisqu'elle représente une somme et devrait à ce titre être invariante par associativité et commutativité. En effet une grandeur est au départ associée à un ensemble, ce qui implique qu'elle ne dépende pas de l'arrangement des parties de cet ensemble.

> Il se trouvait encore en 1830 quelqu'un qui, sous la signature de R.M.S., tentait de démontrer dans les Annales de mathématiques de Gergonne (tome 20, n° 12) que la somme de la série infinie bien connue : a – a + a – a + a – a +... in inf. a une valeur égale à $\frac{a}{2}$.

25 "Démonstration purement analytique du théorème: entre deux valeurs quelconques qui donnent deux résultats de signe opposés se trouve au moins une racine réelle de l'équation", traduit par Jan Sebestik : "Bernard Bolzano et son Mémoire sur le théorème fondamental de l'Analyse", *Revue d'histoire des Sciences*, 17, 1964.

Posant cette valeur = x, il crut être en droit d'écrire : x = a – (a – a + a – a +a – a + ... in inf). Il estima alors égales la nouvelle série entre parenthèses et la série de départ dont la somme constitue l'inconnue x ; il écrivit donc l'équation : x = a – x, d'où il tira x = a/2.

L'erreur est ici assez évidente: la série entre parenthèses n'a manifestement plus le même ensemble de termes que celle donnée d'abord; elle a en moins le premier a. Sa valeur, si tant est qu'elle en ait une, aurait dû être notée par x – a, ce qui aurait dû donner l'identité: x = a + x – a.[26]

Nous voyons que, pour les mathématiciens de cette époque, le développement des mathématiques doit être réglé par une nécessité interne. Mais l'idée qu'ils se font de cette nécessité interne peut aboutir à des conclusions opposées: alors qu'une certaine idée de l'algèbre conduit Bolzano à rejeter les séries divergentes pour conserver l'associativité et la commutativité des grandeurs, une autre idée de l'algèbre, la permanence de ses lois, pousse les mathématiciens de l'Ecole de Cambridge à les conserver, tout au moins comme séries formelles. Cette Ecole essaie de construire l'algèbre comme une science déductive fondée sur des relations entre symboles.

Voici l'opinion de Peacock, en 1833 :

... Il est très vrai que Mr. Cauchy a parfaitement réussi à éviter la considération des séries infinies pour établir la plupart des grands principes du calcul différentiel et intégral, mais je ne peux en aucun cas me sentir disposé à considérer son succès à surmonter ce type de difficultés comme une preuve décisive de l'opportunité qu'il y aurait à emboîter ses pas. Le fait est que, si les opérations de l'algèbre sont générales, nous devons nécessairement obtenir des séries infinies et si les symboles que nous employons sont également généraux, il doit être impossible de déterminer, dans la plupart des cas, la convergence ou la divergence des séries qui en résultent. C'est seulement par conséquent lorsque nous envisageons des valeurs spécifiques qu'une question se pose en général concernant le caractère de la série: et c'est seulement quand nous sommes amenés à chercher la fonction qui génère la série en appliquant la théorie des limites à l'aggrégat d'un nombre fini de ses termes, que sa convergence ou sa divergence devient importante car elle affecte la possibilité même de la recherche. En résumé, c'est nécessairement un point de vue erroné des principes de l'algèbre qui permet que le résultat d'une opération générale, dépendant des lois fondamentales de l'algèbre, puisse être fallacieux. Cette insuffisance doit être dans tous les cas attribuée à notre pouvoir d'interprétation de tels résultats, et non aux résultats eux-mêmes, ou à la généralité et à la certitude des opérations qui les produisent; en résumé, le rejet de séries divergentes de l'analyse, ou de séries qui puissent devenir divergentes, est inconsistant tout à la fois avec l'esprit et les principes de l'algèbre symbolique et nous ramènerait nécessairement à cette fastidieuse multiplication des cas qui caractérise l'enfance de la science...[27]

Rappelons la position de Cauchy :

Quant aux méthodes, j'ai cherché à leur donner toute la rigueur qu'on exige en géométrie, de manière à ne jamais recourir aux raisons tirées de la généralité de l'algèbre. Les raisons de cette espèce, quoique assez communément admises, surtout dans le passage des séries convergentes aux

---

26 *Les paradoxes de l'infini*, , 1851, Trad. H. Sinaceur, Seuil, 1993, p. 108.

27 Report on the recent progress and the present state of certain branches of analysis. *Report for the British Association for the Advancement of Science*,1834, p.247-248. Traduit par M.J. Durand.

séries divergentes, et des quantités réelles aux expressions imaginaires, ne peuvent être considérées, ce me semble, que comme des inductions propres à faire pressentir quelquefois la vérité, mais qui s'accordent peu avec l'exactitude si vantée des mathématiques. On doit même observer qu'elles tendent à faire attribuer aux formules algébriques une étendue indéfinie, tandis que dans la réalité, la plupart de ces formules subsistent uniquement sous certaines conditions, et pour certaines valeurs de quantités qu'elles renferment.[28]

Augustus De Morgan justifie sa conviction par l'histoire des mathématiques.

... L'histoire de l'algèbre nous montre que rien n'est aussi peu fondé que le rejet d'une méthode qui vient **naturellement**, à cause d'un ou plusieurs cas apparemment valides dans lesquels cette méthode conduit à des résultats erronés. De tels cas devraient en fait nous enseigner la prudence et non le rejet; si l'on avait préféré celui-ci à celle-là, les quantités négatives, et encore plus leurs racines carrées, auraient efficacement bloqué le développement de l'algèbre... et ces immenses domaines de l'analyse que parcourent sans peur même les adversaires des séries divergentes, n'auraient pas été si explorés, bien moins cultivés et aménagés... la devise que j'adopterais à l'encontre d'un cours qui me semble calculé pour stopper le progrès de la découverte tiendrait en un mot et un symbole – souviens-toi de $\sqrt{-1}$ [29]

Voici comment G.H. Hardy, lui aussi grand théoricien des séries divergentes, commente, en 1949, les travaux de De Morgan :

De Morgan, comme le reconnaît Burkhardt, n'était pas un "simple Arithméticien" comme Peacock. C'était un écrivain prolifique et astucieux: il a inventé "l'échelle logarithmique" des critères de convergence; et son *Differential and Integral Calculus*, qui est le meilleur des premiers manuels anglais sur le sujet contient beaucoup de choses encore intéressantes à lire et difficiles à trouver dans un autre ouvrage. Dans cet article[30], il essaie d'établir de façon raisonnée son attitude envers les séries divergentes, "le seul sujet de caractère élémentaire sur lequel demeure un sérieux schisme parmi les mathématiciens à propos de l'absolue correction ou incorrection des résultats". Son discours est très sensé, mais les habitudes de l'époque sont trop fortes pour lui: tout logicien qu'il est, il ne peut, ou ne veut, donner des définitions.

"Les modernes", dit-il, "me semblent avoir commis la même confusion au regard de leur rejet des séries divergentes; signifiant parfois que l'on ne peut les utiliser en toute sécurité à cause de leur signification et de leur origine, parfois que la simple idée de les utiliser, quelles que soient les circonstances, est une absurdité. Nous devons admettre que beaucoup de séries sont telles que l'on ne puisse les utiliser en toute sécurité, sauf comme moyens de découverte, avec le devoir de vérifier ensuite les résultats obtenus... Mais dire que nous ne pouvons jamais utiliser les autres peut... me semble s'écarter de toutes les règles de prudence..." Est-ce que l'analyse aurait jamais pu se développer comme elle l'a fait si Euler et les autres avaient refusé $\sqrt{-1}$?

Il refuse de distinguer entre différents types de séries divergentes: si certaines sont utilisables, toutes doivent l'être. "Je ne discute pas avec ceux qui rejettent tout ce qui n'entre pas dans le domaine de l'arithmétique, mais seulement avec ceux qui abandonnent l'usage des séries infiniment divergentes et pourtant se révèlent employer les séries finiment divergentes avec

---

28 Introduction au *Cours d'Analyse Algébrique*, 1821.

29 *Differential and Integral Calculus*, 1842, London. p.566.

30 Article in *Transactions of the Cambridge Philosophical Society*, vol.8, 1849. lettre du 16 Janvier 1826 in ABEL, Oeuvres complètes ,1881.

confiance. C'est ce qui semble se pratiquer, aussi bien ici qu'à l'étranger. On semble parfaitement réconcilié avec $1-1+1-\ldots=\frac{1}{2}$, mais on ne peut admettre 1–1+1– ..=–1". Il est très curieux qu'il ne lui soit pas venu à l'esprit qu'il pût y avoir des interprétations (par exemple, celle de Poisson) qui s'appliquent dans un cas et pas dans l'autre.

Plus loin, en revenant sur ce point, il montre quelque inconsistance. Il y a des cas où 1+2+4+... semble représenter –1, d'autres où il semble représenter ∞ :

ainsi la limite de $1+2x+4x^2+\ldots+2^n x^{n^2}+\ldots$ quand $x\to 1$ est ∞ (un exemple bien choisi)

Ceci, il peut le tolérer, mais "qu'il arrive autre chose que –1 ou ∞ , [...] et je serai bien obligé d'admettre que les séries divergentes doivent être abandonnées." Il y a quelque chose dans ce point de vue: –1 est une racine de $z=1+2z$, et en un certain sens ∞ peut aussi être considéré comme une racine de cette équation, alors que 0 ou 1 ne le peuvent certainement pas. [...] Il est vrai que –1 et ∞ sont les seules sommes "**naturelles**". De façon similaire, pour 1–1+1–1..., il serait fatal que l'on trouve autre chose que 1/2."

Nous rencontrons ici une troisième façon de calculer la somme d'une série, comme solution d'une équation algébrique obtenue par les règles habituelles. Cette méthode est celle signalée et réfutée par Bolzano.

L'École de Cambridge s'appuie sur le "Principe de permanence", déjà énoncé par le mathématicien flamand Albert Girard en 1629[31] : puisque certaines propriétés restent valides quand on passe des nombres réels aux nombres complexes, elles doivent servir de base à la construction de l'algèbre. Ce principe n'est plus fondé sur une conception de ce qu'est le monde, mais de ce qu'est l'algèbre, appuyée sur des considérations historiques. Notons que si la convergence peut se traiter dans le local, la divergence joue dans le global, et fait appel à des principes d'extension, de permanence du symbole, de la forme.

Epilogue : le retour en force des séries divergentes "naturellement" rencontrées par les physiciens

Un type particulier de séries divergentes, appelées plus tard séries asymptotiques, s'introduit progressivement dans les articles mathématiques sous la pression des besoins de la physique et de la mécanique céleste, par exemple chez Poisson, Lipschitz, Riemann (1855). Citons aussi le physicien Stokes qui les utilise pour calculer les franges des caustiques en optique ondulatoire.

En arrêtant la sommation partielle à un certain terme d'une telle série divergente, on obtient une excellente approximation de la valeur de la fonction dont elle est le développement. La méthode de prolongement d'Euler devient alors une excellente méthode d'approximation, et dès 1843, Cauchy lui-même va adoucir sa position "un peu dure"[32]. Laguerre, en 1879, amorce leur étude systématique.

---

31 *L'invention nouvelle en algèbre*. Cité par J.L.Verley in *Fragments d'histoire des mathématiques*, Brochure 41, APMEP, p.121.

32 Sur un emploi légitime des séries divergentes, *Comptes Rendus de l'Académie des Sciences Œuvres*, Tome XVII, p.18.

Mais les physiciens insistent, par exemple Heaviside:

Je dois dire quelques mots au sujet de la différentiation généralisée et des séries divergentes... Il n'est pas facile de soulever quelque enthousiasme après qu'il ait été artificiellement rafraîchi par les étouffoirs des rigoristes... On m'a informé que j'ai été un instrument de stimulation de l'intérêt pour le sujet. Peut-être pas en Angleterre, du moins pour quelque travail qui mérite qu'on en parle, mais certainement à Paris, il est de fait qu'on a dernièrement offert un prix important au sujet de la part prise par les séries divergentes en analyse... J'espère que le vainqueur aura quelque chose de substantiel à dire...

Dans *Operators in Physical Mathematics,* j'ai exposé l'état de mes vues sur les séries divergentes à cette époque... J'ai évité de définir la signification de l'équivalence. Les définitions se feront toutes seules en temps utile... ma première notion d'une série était que pour avoir une valeur finie elle devait être convergente... Une série divergente aussi, bien sûr a une valeur, infinie. Les solutions de problèmes physiques doivent toujours être en somme finies ou séries convergentes, sinon on produit du non-sens...

Alors survint un dissipation partielle du brouillard de l'ignorance. Dans certains problèmes physiques, les séries divergentes sont en fait utilisées, en particulier par Stokes, par exemple dans la formule divergente pour l'oscillation Jn(x). Il a montré que l'erreur est inférieure au dernier terme inclus. Il est vrai qu'ici les termes sont alternativement positifs et négatifs. Ceci semble donner une piste...

Il y a certainement trois sortes d'équivalence[33] ... Equivalence ne signifie pas identité... Mais la signification numérique des séries divergentes reste toujours obscure... Il faudra une théorie des séries divergentes, ou disons une théorie des fonctions plus large que la présente, incluant séries convergentes et divergentes en un tout harmonieux...[34]

En fait, Heaviside ignorait que les "rigoristes" avaient déjà effectué la théorisation de ces séries, en 1886, à la fois par Poincaré et Stieltjes. Comme Peacock, mais pour d'autres raisons (les besoins des utilisateurs de mathématiques), Poincaré estime qu'une théorie localement valable est tout à fait compatible avec la rigueur si l'on délimite clairement son champ d'application.

Il y a entre les géomètres et les astronomes une sorte de malentendu au sujet de la signification du mot convergence. Les géomètres, préoccupés de la parfaite rigueur et souvent trop indifférents à la longueur de calculs inextricables dont ils conçoivent la possibilité, sans songer à les entreprendre effectivement, disent qu'une série est convergente quand la somme des termes tend vers une limite déterminée, quand même les premiers termes diminueraient très lentement. Les astronomes, au contraire, ont coutume de dire qu'une série converge quand les vingt premiers termes, par exemple, diminuent très rapidement, quand même les termes suivants devraient croître indéfiniment.

Ainsi, pour prendre un exemple simple, considérons les deux séries qui ont pour terme général:

---

33 Note de G.H.HARDY, qui cite ce texte dans *Divergent Series*, 1949, p. 36-37: "Numérique, analytique, algébrique. Heaviside veut dire, bien sûr, que $1+x+x^2+... = (1-x)^{-1}$ peut signifier: (a) que $1+x+x^2+...$ converge vers $(1-x)^{-1}$, (b) que c'est une "représentation" de la fonction $(1-x)^{-1}$, (c) que c'est le résultat de la méthode de "longue division" de 1 par $1-x$. Euler aurait dit la même chose."

34 *Electromagnetic theory*, 1899, Londres, 2, p.434-50.

$$\frac{1000^n}{1.\,2.\,3\ldots n} \quad \text{et} \quad \frac{1.\,2.\,3\ldots n}{1000^n}$$

Les géomètres diront que la première converge, et même qu'elle converge rapidement, parce que le millionième terme est beaucoup plus petit que le 999 999e; mais ils regarderont la seconde comme divergente, parce que le terme général peut croître au delà de toute limite.

Les astronomes, au contraire, regarderont la première série comme divergente, parce que les 1000 premiers termes vont en croissant; et la seconde comme convergente, parce que les 1000 premiers termes vont en décroissant et que cette décroissance est d'abord très rapide.

Les deux règles sont légitimes: la première, dans les recherches théoriques; la seconde, dans les applications numériques. Toutes deux doivent régner, mais dans deux domaines séparés et dont il importe de bien connaître les frontières.[35]

Moyennant certaines conditions, ces séries, nommées à la suite de Poincaré développements asymptotiques, vérifient alors les règles du calcul algébrique et du calcul intégral, satisfaisant ainsi le principe de permanence des "symbolistes" de Cambridge.

Le problème d'attribuer une valeur à toute série infinie n'est pas encore résolu.
Mais après la découverte de nouvelles algèbres et des géométries non euclidiennes, la conception de la nature des mathématiques a évolué. Considéré dans l'optique où les mathématiques ne sont qu'une construction de l'esprit humain, le mot "naturel" change de sens. Il ne s'agit plus d'attribuer à la série sa valeur naturelle, c'est-à-dire découlant d'une "réalité" externe ou interne aux mathématiques, mais une valeur arbitrairement définie, qui vérifie les propriétés que l'on juge commode de lui imposer pour résoudre un certain champ de problèmes.

Dans l'esprit du "principe de permanence", les mathématiciens demandent à un nouveau concept éventuel de somme de respecter certaines règles "raisonnables", c'est-à-dire celles de l'algèbre, mais pour des raisons pratiques, non plus au nom d'un principe supérieur...

En s'inspirant de la sommation "en moyennes" de Leibniz, on peut par exemple décider que la série est sommable quand la moyenne des sommes partielles a une limite au sens de Cauchy, et que cette limite est la valeur de la série. Pour la série 1–1+1–1+1+etc., on obtient bien la valeur $\frac{1}{2}$.

Dans un article de 1880, Fröbenius[36] montre que cela correspond aussi à l'autre méthode de Leibniz. En effet, si l'on pose :

$$s_n = \sum_{i=0}^{n} a_i$$

on obtient:

---

35 *Les méthodes nouvelles de la mécanique céleste*, 1893, tome 2, p.1-2.

36 "Ueber die Leibnitzsche Reihe", *Journal für die Reine und angewandte Mathematik*,(89), 1880, p.282-24

$$\lim_{x \to 1^-} \sum_{i=0}^{\infty} a_i x^i = \lim_{n \to \infty} \frac{s_0 + s_1 + s_2 + \ldots + s_n}{n+1}$$

Cette deuxième définition a donc le mérite d'être conforme à l'idée de moyenne de Leibniz, à la "loi de continuité" (ce qui est vrai pour $x<1$ le reste pour $x=1$), et à la définition d'Euler.

C'est Emile Borel qui fonde la théorie des séries divergentes sommables. Après un article[37] de 1896 qui, au-delà de sa valeur théorique, montre combien l'état d'esprit des mathématiciens a évolué, il publie en 1901 les *"Leçons sur les séries divergentes"* où il développe pleinement sa théorie.

> Le problème fondamental est le suivant: faire correspondre à chaque série divergente numérique un nombre tel que la substitution de ce nombre à la série, dans des calculs usuels où elle peut se présenter, donne des résultats exacts, ou du moins presque toujours exacts. Il y aura lieu d'ailleurs, une fois ce premier résultat acquis, de fixer des classes, le plus étendues possibles, de méthodes de calcul dans lesquelles on est certain que la substitution du nombre à la série est légitime.
>
> Il est d'ailleurs à peine utile d'observer qu'on ne peut guère espérer résoudre le problème précédent pour toutes les séries divergentes; l'infinité non dénombrable des modes de divergence paraît être un obstacle insurmontable [...]
>
> On pourrait d'ailleurs être amené comme nous en verrons des exemples plus loin à attribuer plusieurs sommes différentes à un série divergente (et aussi à une série convergente); ce fait peut paraître tout d'abord étrange et paradoxal; il n'aurait pas paru moins étrange à un géomètre du XVIIIe siècle d'entendre affirmer que l'intégrale définie
>
> $$\int_1^2 \frac{dz}{z}$$
>
> n'a pas seulement comme valeur log 2, mais doit être considérée comme égale à $\log 2 + 2k\pi i$, k étant un nombre entier quelconque."[38]

Tout au long du XXe siècle, des mathématiciens vont s'attacher à suivre le programme de Borel, en imaginant des méthodes de sommation adaptées aux nombreux problèmes issus des mathématiques mais surtout de la physique: phénomène de Stokes, équation de Schrödinger, invariants adiabatiques, théorie quantique des champs... Ces recherches, jusqu'à celles en cours, sont exposées par Jean-Pierre Ramis, qui montre que le naturel a toujours droit de cité chez les mathématiciens:

> Dans certains cas on a vu apparaître non pas une mais plusieurs sommes naturelles différentes [...]
>
> Mon point de vue est que le phénomène de multiplicité des "sommes naturelles" est
>
> 1) moins surprenant qu'il n'y paraît.
>
> 2) Un avantage considérable plutôt qu'un inconvénient.[39]

---

37 "Fondements de la théorie des séries divergentes sommables", *Journal de Mathématiques pures et appliquées*, 1896, p.103-104.

38 Introduction aux *Leçons sur les séries divergentes*, 1901, Paris, p.14-15.

39 RAMIS J.P., 1993, *Séries divergentes et théories asymptotiques*, Supplément au bulletin SMF,

Mais qu'est-ce qui poussait Emile Borel ? Il s'en explique très clairement :

Je dois, d'ailleurs, avouer que j'ai été tout d'abord, comme beaucoup de jeunes mathématiciens, séduit par les théories [abstraites] de Cantor; je ne le regrette pas, car c'est là une discipline qui assouplit singulièrement l'esprit. Mais j'ai toujours pensé que ces études abstraites ne devaient pas être une fin en soi, mais seulement un moyen.

La tendance générale de mes recherches et de mes ouvrages d'enseignement est la suivante: "Je tâche d'y montrer que les Mathématiques ne sont pas un jeu purement abstrait de l'esprit, mais sont, au contraire, en étroite connexion avec la réalité concrète".

C'est l'étude des phénomènes physiques qui suggéra les notions de continuité, de dérivée, d'intégrale, d'équation différentielle, de vecteur et de calcul vectoriel. Et ces notions, par un juste retour, font partie du bagage scientifique nécessaire à tout physicien; c'est à travers elles qu'il interprète les résultats de ses expériences. Il n'y a évidemment rien de mystérieux dans le fait que les théories mathématiques construites sur le modèle de certains phénomènes aient pu être développées et fournir le modèle d'autres phénomènes [...]

C'est toujours au contact de la Nature que l'Analyse mathématique s'est renouvelée; ce n'est que grâce à ce contact permanent qu'elle a pu échapper au danger de devenir un pur symbolisme, tournant en rond sur lui-même. [...]

C'est grâce à l'étude des théories physiques que l'on peut éviter certains des défauts que risque d'entraîner avec elle une tendance trop grande à l'abstraction; la joie intellectuelle que l'on a à vaincre un obstacle jusque-là insurmonté donne, en effet, la tentation de rechercher les difficultés pour le seul plaisir de les vaincre; je crois avoir donné assez d'exemples de solutions difficiles, parfois vainement cherchées auparavant, pour pouvoir dire qu'à mon sens, ce n'est pas cette recherche de la difficulté qui est le but le plus élevé de la science mathématique, mais bien plutôt la simplicité des résultats et des méthodes.[40]

Une formule logique est un phénomène comme la chute d'un corps ou comme un arbre et les mathématiques sont une science naturelle dans laquelle la logique ne joue pas plus de rôle que dans les autres sciences naturelles. [...]
On peut donner des exemples [...] de relations connues, démontrées depuis longtemps, reproduites dans les traités classiques et dont la signification véritable et l'importance n'ont été connues que le jour où on les a rattachées à une théorie.

L'un des plus curieux, parmi ces exemples, est celui des séries qui représentent des fonctions différentes suivant la région où se trouve la variable dont elles dépendent. Joseph Bertrand en signale plusieurs dans son Traité de Calcul différentiel et intégral, publié en 1866, et il les emprunte à des travaux antérieurs. Mais il ne connaissait pas alors les idées en formation de Weierstrass et de M. Méray et, faute d'avoir la notion de fonction analytique, il se contente de transcrire des formules mortes sans pouvoir leur donner la vie. Certaines de ces formules contenaient en germe toute la théorie du développement des fonctions continues en séries de polynômes, théorie que Weierstrass construisit en 1885 sur des principes tout différents et que M. Lebesgue a simplifiée en retrouvant par une voie nouvelle les formules oubliées qu'avaient citées Bertrand.[41]

Tome 121

40 Cité par M.Fréchet, *La vie et l'œuvre d'Emile Borel*, Genève, 1965, p.25-27.

41 *Revue de Métaphysique et de morale*, T15, n°3, 1907, = M.Frechet, *Emile Borel, philosophe et homme d'action*, Gauthier-Villars, 1967, p 298 et 301.

Pour en savoir plus

On peut lire, en dehors des textes-sources cités,

Sur les aspects mathématiques et physiques:

RAMIS J.P., 1993, *Séries divergentes et théories asymptotiques*, Supplément au bulletin SMF, Tome 121.

Sur les aspects mathématiques, avec notes historiques:

KNOPP K., 1990, *Theory and application of infinite series*, Dover (première édition en allemand en1921).

Sur les aspects historiques:

MICHEL-PAJUS A., 1995, Le jeu des paradoxes dans l'élaboration de la théorie des séries, *Mnémosyne* n°10, IREM PARIS VII.

Ce numéro contient aussi la reproduction de l'introduction des *Leçons sur les séries divergentes*, 1901, d'Emile BOREL.