Hermann Grassmann et la Théorie de l'Extension

Jean-Luc DORIER

La *Théorie de l'Extension* de Hermann Grassmann joue un rôle inclassable dans l'histoire de l'algèbre linéaire. Elle se fonde sur une certaine intuition de la géométrie, mais aussi prend dès le départ une position très formaliste (dans un sens bien particulier, qui sera explicité plus bas). Ainsi le résultat en est une approche très générale, qui offre comme application un nouveau regard sur la géométrie, dans un sens très large, puisqu'englobant des aspects qui relèvent aussi bien de ce qu'on appelle aujourd'hui la géométrie affine, la géométrie vectorielle ainsi que la géométrie projective. Pourtant cette œuvre méconnue en son temps n'aura que des effets très indirects autant sur le développement de la géométrie que sur celui de l'algèbre linéaire.

En 1844, Hermann Günther Grassmann, mathématicien allemand autodidacte et quasiment inconnu des mathématiciens de son époque, publie sous le titre de *Die Lineale Ausdehnungslehre*, la première partie d'une théorie (Die Ausdehnungslehre[1]) qu'il voulait être une *nouvelle discipline mathématique* qui *ne se situe pas seulement dans le domaine géométrique*, mais dont *la géométrie n'est qu'une application spéciale* [Grassmann 1844, Préface, 8][2]. L'accueil réservé au travail de Grassmann alla de l'indifférence aux attaques parfois assez virulentes. On lui reprochait essentiellement l'obscurantisme de sa présentation : une longue introduction de nature philosophique précédait un exposé adoptant un point de vue très général, où des arguments philosophiques étaient développés en détail, les applications étant renvoyées après l'exposé des concepts et des résultats théoriques. De plus, l'abondance de nombreuses nouvelles définitions et le soin pris par Grassmann pour introduire des termes de racines germaniques, peu familiers des mathématiciens, ne facilitèrent pas l'accès à sa théorie. Malgré ses efforts, Grassmann ne réussit pas à faire connaître sa théorie. En 1862, il réécrivit entièrement son œuvre adoptant une forme de présentation plus conforme à la tradition mathématique, en gommant notamment l'essentiel du fondement philosophique. Néanmoins, l'accueil fut toujours aussi froid. La théorie de l'extension en resta du coup à cette première partie qui n'eut jamais de suite. La reconnaissance du travail de Grassmann ne vint que tardivement et essentiellement après sa mort. On comprit progressivement que la *lineale Ausdehnungslehre* était une œuvre de génie qui avait devancé de plusieurs décennies, des théories plus modernes. A partir de 1920, le travail de Grassmann servira à jeter les bases de l'algèbre multilinéaire et

1 Littéralement : "la théorie de l'extension".

2 Les citations en français de l'Ausdehnungslehre de 1844 sont tirées de la traduction de Dominique Flament (Paris : Blanchard, 1994), les numéros de pages sont donnés d'après le texte des œuvres complètes (cf. bibliographie)

le nom de Grassmann est resté attaché aux *grassmanniennes*, que nombre de mathématiciens manipulent quotidiennement dans des recherches actuelles. Ainsi, même si l'influence du travail de Grassmann resta très limitée en son temps et ne porte donc pas sur les notions les plus élémentaires de sa théorie, l'analyse de son travail n'en reste pas moins précieuse pour l'historien. Elle permet en effet de mieux comprendre comment, dans le contexte du milieu du 19e siècle, où les relations entre algèbre et géométrie prenaient un tour décisif, une approche épistémologique originale permit l'élaboration d'une théorie qui anticipa la plupart des résultats que l'on retrouvera près d'un siècle plus tard parmi les fondements de l'algèbre linéaire. De plus, le point de vue de Grassmann nous éclaire de façon originale sur les rôles respectifs de la géométrie et de l'algèbre dans l'élaboration de l'algèbre linéaire.

L'homme et son temps

Ce qui caractérise Grassmann en tant que mathématicien, c'est avant tout le fait qu'il soit entièrement autodidacte. Il ne semble avoir jamais suivi aucun cours de mathématiques ni même de physique et son seul maître fut son père (auquel le paragraphe suivant sera consacré). Engel, qui a édité ses œuvres et écrit sa biographie est très admiratif sur ce point :

> "Seul un esprit d'une force extraordinaire et d'une originalité de penser était capable d'une telle performance, de même que seule l'existence d'une disposition tout exceptionnelle pour les mathématiques rend le fait concevable… Grassmann a pu se former comme mathématicien, tout à fait par lui-même, par la seule étude de quelques traités et par ses propres réflexions." [Grassmann (1894/1911), 3(2):75][3].

Par ailleurs, Grassmann a suivi une formation universitaire axée sur la théologie et les langues classiques. Il en gardera une culture et un penchant pour la philosophie, on verra plus loin comment Friedrich Schleiermacher qui avait été son professeur à Berlin a influencé son approche des mathématiques et des sciences en général. De plus, son goût des langues, le poussera à étudier de nombreuses langues anciennes (Sanscrit, Gothique, Lithuanien, vieux Prussien, vieux Persan, Slovaque religieux etc…). Il consacrera d'ailleurs une grande partie de sa vie professionnelle à des travaux de linguistique, qui lui vaudront plus de renommée que son œuvre mathématique. Notamment sa traduction du monumental Rigveda (équivalent de la bible écrit en Sanscrit) associée à son dictionnaire en 6 volumes est encore utilisée aujourd'hui. Grassmann gagne aussi une notoriété, qui lui sera accordée de son vivant, pour ses travaux de physique (dans lesquels on retrouve des applications de l'*Ausdehnungslehre*) notamment sur l'électrodynamique, la théorie des couleurs, l'acoustique et l'optique élémentaire.

On voit donc que Grassmann est éclectique et que sa carrière scientifique a été fructueuse au delà des seules mathématiques. Enfin, il s'est beaucoup intéressé à l'enseignement et a publié divers manuels destinés à la formation des enseignants tant en mathématiques qu'en physique ou en linguistique.

3 La traduction française provient de (Flament 1994, préface, 10).

Cependant, il n'a jamais réussi à obtenir un poste universitaire, malgré plusieurs tentatives et a fini sa carrière comme professeur au lycée de Stettin, où il a enseigné pratiquement toutes les disciplines, suivant en cela les pas de son père Justus Grassmann. Il s'est souvent plaint de cet état de fait, comme d'un handicap majeur à pouvoir mener à bien ses ambitions scientifiques, par manque de temps.
L'*Ausdehnungslehre* touche à la géométrie, mais elle propose en fait une théorie mathématique entièrement nouvelle permettant, entre autres, par ses applications à la géométrie de réconcilier les méthodes synthétiques et analytiques. De fait, l'œuvre de Grassmann répond, tout en les dépassant, à des préoccupations de son époque.

La méthode analytique, mise au point indépendamment par René Descartes (1637) et Pierre de Fermat (1643), permit d'introduire en géométrie la performance du calcul algébrique.

> "Tous les problèmes de géométrie peuvent facilement se réduire à des termes tels qu'il n'est besoin par la suite que de connaître la longueur de quelques lignes droites pour les construire.
> Et comme toute l'arithmétique n'est composée que de quatre ou cinq opérations qui sont, l'addition, la soustraction, la multiplication, la division et l'extraction de racines, qu'on peut prendre pour une espèce de division, de même n'a-t-on autre chose à faire en géométrie, en ce qui concerne les lignes qu'on cherche, pour les préparer à être connues, que d'en ajouter d'autres ou d'en ôter. Ou bien en ayant une, que je nommerai l'unité pour la rapporter d'autant mieux aux nombres, et qui peut ordinairement être prise à discrétion, puis en ayant encore deux autres, en trouver une quatrième qui soit à l'une de ces deux comme l'autre est à l'unité, ce qui revient à multiplier. Ou bien en trouver une quatrième qui soit à l'une des deux comme l'unité est à l'autre, ce qui revient à diviser. Ou enfin trouver une, deux ou plusieurs moyennes proportionnelles entre l'unité et quelque autre ligne, ce qui revient à extraire la racine carrée ou cubique, etc...
> Et je ne craindrai pas d'introduire ces termes d'arithmétique en la géométrie afin de me rendre plus intelligible." [Descartes 1638, 297-298].

La performance d'une telle méthode ne faisait pas de doute pour les auteurs, ainsi Fermat conclut son *Isagoge* de 1643 par la phrase suivante :" Nous avons donc embrassé dans un exposé bref et lucide tout ce que les anciens ont laissé inexpliqué sur les lieux plans et solides." De fait la méthode analytique obtint immédiatement un large succès et les mathématiciens en reconnurent le pouvoir de simplification en l'appliquant à la résolution de nombreux problèmes de géométrie anciens et nouveaux.

Cependant en marge de ce succès indéniable, certains commencèrent à exprimer des réserves, voire des critiques, à l'égard de la méthode analytique. Il semblait en effet inacceptable pour eux que la résolution d'un problème géométrique passe par le transfert à des nombres, étrangers au domaine de la géométrie, sur lesquels, qui plus est, porte un arbitraire lié au choix du repérage. Cette position, qui peut sembler un peu dogmatique, était assortie du reproche que la méthode analytique, masquant la réalité géométrique de la résolution, ne permettait aucun recours à l'intuition et que si elle semblait démontrer le résultat, par contre elle ne l'expliquait en rien. Or, cette critique paraissait d'autant plus fondée que dans la résolution de certains problèmes complexes, la méthode analytique ne permettait pas d'aboutir et s'enlisait dans des calculs sans fin, où toute signification géométrique était perdue. Un de ceux à avoir exprimer ce type de critiques est Gottfried Wilhelm Leibniz. Voici des extraits d'une lettre adressée à son ami Christian Huyghens, datée du 8 sept 1679 :

> "(...) je ne suis pas encor content de l'Algèbre, en ce qu'elle ne donne ny les plus courtes voyes, ny les plus belles constructions de Geometrie. C'est pourquoy lorsqu'il s'agit de cela, je croy qu'il nous faut encor une autre analyse proprement géométrique ou linéaire, qui nous exprime directement situm, comme l'Algèbre exprime magnitudinem. Et je croy d'en avoir le moyen et qu'on pourroit représenter des figures et mesme des machines et mouvements en caractères, comme l'Algèbre represente les nombres ou grandeurs." [Leibniz 1850, 1:382].

Leibniz tente alors de créer une *Géométrie des Situations,* dont il explicite ainsi les principes :

> "J'ay trouvé quelques éléments d'une nouvelle caracteristique, tout à fait différente de l'Algèbre, et qui aura des grands avantages pour representer à l'esprit exactement et au naturel, quoyque sans figure, tout ce qui dépend dde l'imagination. L'algèbre n'est autre chose que la caractéristique des nombres ou des grandeurs. Mais elle n'exprime pas directement la situation, les angles, et le mouvement, d'où vient, qu'il est souvent difficile de reduire dans un calcul ce qui est dans la figure, et qu'il est encor plus difficile de trouver des demonstrations et des constructions géometriques assez commodes lors meme que le calcul d'Algebre est tout fait. Mais cette nouvelle caracteristique suivant des figures de vue, ne peut manquer de donner en meme temps la solution et la construction et la demonstration géometrique, le tout d'une maniere naturelle et par une analyse. C'est à dire par des voyes déterminées." [ibid., 1:384].

L'analyse géométrique de Leibniz est fondée sur une relation de congruence : deux bipoints sont congrus si leur deux points sont à égale distance, deux triplets de points sont congrus si les triangles qu'ils forment sont superposables, etc. Il est ainsi possible de définir une sphère comme l'ensemble des points X tels que AX est congru à AB, un plan comme l'ensemble des points X tels que AX est congru à BX, un cercle comme l'ensemble des points X tels que ABX est congru à ABC, une droite comme l'ensemble des points X tels que AX est congru à BX et CX, etc. Leibniz applique cette analyse à quelques problèmes assez élémentaires, mais il ne prolongera jamais cette tentative. Il semble qu'il se soit lui-même rendu compte des limitations de son calcul. En effet la non prise en compte de l'orientation des figures géométriques et de la direction des segments est un handicap qui ne pouvait permettre à ce type de calcul de devenir vraiment opératoire.

Cette lettre de Leibniz ne sera publiée qu'en 1833 (cf. références), mais à cette date la recherche d'un calcul géométrique intrinsèque (ou d'une analyse géométrique) n'a pas réellement abouti. De fait au printemps 1844, la *Fürstlich Jablonowskischen Gesellschaft der Wissenschaft* de Leipzig lance un concours, à l'approche du bicentenaire de la naissance de Leibniz (originaire de Leipzig), visant à récompenser un travail permettant de réaliser l'ambition de Leibniz. Après avoir relancé ce concours sans succès, elle décerne finalement le premier prix à Grassmann, sur la base d'un article intitulé : *Grundzüge zu einer rein geometrischen Theorie der Kurven mit Anwendung einer reine geometrischen Analyse*, daté du 15 avril 1845, mais publié en 1846 dans le Journal de Crelle. Ce traité qui sera suivi de divers articles dans le Journal de Crelle, présente essentiellement les concepts et les applications de l'*Ausdehnungslehre* dans le cadre restreint de la géométrie. Drobisch et Möbius, principaux examinateurs de la commission, sont flatteurs à l'égard de Grassmann. Cependant, Möbius un des rares mathématiciens de son temps à avoir lu l'*Ausdehnungslehre*, s'il avait exprimé des louanges à l'égard du travail de Grassmann, n'en restait pas moins très réservé sur sa philosophie. Aussi, dans le souci d'aider à la diffusion du travail de Grassmann, il propose d'éditer en 1847, l'article primé qui deviendra ainsi la *Geometrische Analyse* (Grassmann 1894/1911, 1:321-399), en y ajoutant une préface et des notes explicatives. Cette initiative, à l'origine plutôt bien intentionnée, aura un effet néfaste sur l'accueil de la communauté mathématique qui juge le travail de Grassmann comme imparfait, puisque Möbius a eu besoin d'y donner des explications.

Ainsi, on voit que le travail de Grassmann répond (incidemment, puisque ce dernier ne connaissait pas la lettre de Leibniz) à des interrogations mises en forme par Leibniz[4]:

> "Avec la méthode habituelle à l'ordinaire, l'idée était complètement obscurcie par l'introduction de coordonnées arbitraires qui n'avaient rien à faire avec le sujet, et le calcul consistait en un développement mécanique de formules qui n'apportait rien à l'esprit et qui par conséquent le tuait. Ici en revanche, où l'idée, qui n'était plus troublée par quelque chose d'étranger, transparaissait en toute sa clarté à travers les formules, l'esprit était saisi, même lors de chaque développement de formules, par le développement progressif de l'idée." (Grassmann 1844, 9).

D'ailleurs, l'Ausdehnungslehre dépasse très largement les ambitions de Leibniz car plus qu'un calcul géométrique, c'est toute une nouvelle discipline mathématique, dont ce calcul géométrique n'est qu'une application, qui est créée par Grassmann. D'autre part, il ne faudrait pas croire que la recherche d'une analyse géométrique en était restée au travail de Leibniz. En fait dans la première moitié du 19e siècle (et ceci s'amorce au siècle précédent) différents travaux ont jeté les bases du calcul vectoriel. Or ceux-ci, même s'ils sont moins complets que celui de Grassmann, n'en auront pas moins une influence plus grande sur les développements ultérieurs[5]. Grassmann ne connaissait pas la plupart de ces travaux au moment où il a écrit l'*Ausdehnungslehre*, il découvrira leur existence par la suite. Il me semble toutefois important d'en rappeler ici les grandes lignes pour aider à la mise en perspective historique. On mesurera mieux en effet la portée de l'œuvre de Grassmann si on connaît les difficultés où ses contemporains se trouvaient.

En fait la recherche d'un calcul géométrique intrinsèque trouva une première réponse indirecte et incomplète dans la découverte de la représentation géométrique des complexes. Les principes de cette méthode furent découverts de façon indépendante par plusieurs personnes dont les préoccupations se partageaient entre la recherche d'un calcul géométrique et la volonté de légitimation de ces racines impossibles ou imaginaires dont le statut était très controversé. Dans un travail de 1673, John Wallis avait déjà tenté d'illustrer géométriquement les racines des nombres négatifs, mais son modèle de gains et

4 On se reportera à (Otte 1989), pour plus de précisions sur cette question.

5 Sur le développement du calcul vectoriel, cf. (Crowe 1967).

pertes de surfaces sous la mer ne permit pas de donner une interprétation satisfaisante de la multiplication [Wallis 1673]. En quelques années, de façon très certainement indépendante, cinq personnes pratiquement inconnues, qui n'étaient pas des mathématiciens professionnels dégagèrent (avec plus ou moins de succès) les principes de la représentation géométriques des complexes : Caspar Wessel en 1799, l'abbé Buée en 1805, Jean Robert Argand en 1806, C.V. Mourey et John Warren en 1828[6]. Toutefois, ce n'est qu'avec le travail de Carl Friedrich Gauss publié en 1831, que ces principes devinrent largement connus, acceptés et utilisés par les mathématiciens. Les complexes trouvant ainsi une légitimité au sein même de la géométrie procurèrent un modèle de calcul géométrique plan qui apparaissait comme plus intrinsèque que les cordonnées cartésiennes. Dans la plupart des travaux cités plus haut (c'est surtout vrai pour Wessel), les auteurs essayèrent en vain de construire de nouveaux nombres permettant de généraliser leur découverte à la dimension trois, mais ils butèrent tous sur la définition d'un produit des triplets.

À peu près dans le même temps, deux mathématiciens développèrent des calculs géométriques, qui jetèrent les bases de la géométrie vectorielle.
En 1827, August Ferdinand Möbius publie un mémoire qui fit connaître son *Calcul Barycentrique* (Möbius 1827). Il propose ainsi une algèbre qui opère essentiellement sur les points. De plus, dès le début de son traité, il fait preuve d'une grande perspicacité en soulignant l'intérêt de distinguer dans diverses grandeurs géométriques des caractéristiques d'orientation et de direction ; ainsi il introduit la notion de segment orienté (le vecteur géométrique). Il considère aussi des grandeurs algébriques dont le signe dépend de l'orientation pour représenter des triangles et des pyramides. Néanmoins il ne définit la somme de deux segments que dans le cas où il sont colinéaires. Il généralisera cette addition à des segments quelconques seulement en 1843 dans ses *Elemente der Mechanik des Himmels* (Möbius 1843, 1-2). C'est un des premiers travaux où l'on trouve exposée la structure linéaire des vecteurs de l'espace géométrique.

La définition d'une somme pondérée de points de Möbius ne peut donc être identique à ce à quoi un lecteur contemporain peut penser, elle se fonde en fait, sur le théorème suivant :

> " Étant donné un système de n points $A,B,C, \ldots, N$ avec les coefficients respectivement $a,b,c,\ldots n$, dont la somme n'est pas nulle, on peut toujours trouver un point et un seul, le centre S, ayant la propriété suivante : si des droites parallèles sont tracées par les points donnés et par le point S dans une direction quelconque et si ces lignes coupent un plan quelconque respectivement en les points $A',B',C',\ldots,S'$ on a toujours :
> $$a.AA' + b.BB' + \ldots + n.NN' = (a + b + c + \ldots + n).\ SS'.$$
> En particulier si le plan passe par S on a :
> $$a.AA' + b.BB' + \ldots + n.NN' = 0." \text{ (Möbius 1827, 9-10)}$$

De là il introduit la notation : $a.A + b.B + c.C + \ldots + n.N = (a + b + c + \ldots + n).S$.

---

6 Je cite ici ces travaux dans l'ordre chronologique, cependant la plupart ne furent connus que plusieurs années après leur première publication, essentiellement en raison du peu de renommée de leurs auteurs. Pour plus de détails sur l'histoire de la représentation géométrique des complexes, on pourra consulter par exemple : (Cauchy 1847), (Cartan 1908), (Budon 1933), (Crowe 1967) et (Artigue & Deledicq 1992).

Dans le cas où la somme des coefficients est nulle, Möbius dit laconiquement que le point est rejeté à l'infini, mais ce cas n'est pas examiné en détail[7]. En fait Möbius n'a pas pour but de construire une théorie algébrique, dont il dégagerait les propriétés les plus fines, il veut avant tout montrer l'intérêt pratique de sa méthode pour résoudre plus simplement des problèmes de géométrie et de physique, ce qu'il fit très bien. Il permit aussi des avancées théoriques importantes en géométrie, il est en particulier à l'origine de la mise au point des coordonnées projectives par Karl von Staudt, qui permirent de dégager la géométrie projective de toute considération métrique et par là même d'en mieux comprendre la nature. Malgré ces performances réelles et la nouveauté de l'approche de Möbius, le calcul barycentrique ne connut pas un succès très large, bien qu'on l'utilise et qu'on l'enseigne encore de nos jours.

De son côté, Giusto Bellavitis, avec son *Calcul des Equipollences*, dont les premiers résultats furent publiés en 1833 définit, le premier, la notion de vecteur géométrique (les équipollences) comme classe d'équivalence de bipoints. Il définit aussi les principes de l'addition des équipollences et de leur multiplication par un scalaire. Ensuite il introduit la multiplication de deux vecteurs coplanaires en s'inspirant du mémoire de l'abbé Buée sur la représentation géométrique des nombres complexes. Il résume ainsi les propriétés de son calcul :

> "Dans les équipollences, les termes sont transposés, substitués, additionnés, soustraits, multipliés, divisés, etc. En bref, on effectue toutes les opérations algébriques qui seraient légitimes, si on avait affaire à des équations, et les équipollences qui en résultent sont toujours exactes. Comme nous l'avons dit plus haut, les équipollences non linéaires ne peuvent se référer qu'à des figures dans un même plan." (Bellavitis 1833, 247)

Bellavitis illustrera habilement l'intérêt de sa méthode pour la résolution de problèmes de géométrie et de physique (Bellavitis 1835). Bien sûr son calcul n'apporte semble-t-il rien de plus que la représentation géométrique des complexes. Mais le fait que les entités qu'il utilise soient purement géométriques donne à son travail son originalité et sa nouveauté. Même par rapport à Möbius, son souci de traiter les objets géométriques comme des entités algébriques (cf. la citation précédente) donne une dimension nouvelle à son approche.

On a vu plus haut que la possibilité de généraliser à la dimension trois la représentation géométrique des complexes butait sur l'épineux problème de la multiplication. En effet, jusqu'au milieu du 19e siècle le modèle algébrique restait celui des nombres, la constitution d'un nouveau calcul se devait donc de produire une addition et une multiplication avec les propriétés qui définissent ce qu'on appelle depuis une structure de corps commutatif. Ces propriétés n'étaient d'ailleurs pas toujours explicitement dégagées, puisque n'ayant jamais été vraiment mises en défaut. Ainsi la définition d'un calcul géométrique en

---

7 Grassmann qui redécouvrira dans son *Ausdehnungslehre* de 1844, indépendamment de Möbius, les principes du calcul barycentrique, montrera que dans le cas où la somme des coefficients est nulle, la somme pondérée des points doit être considérée comme un vecteur, dont il donne les caractéristiques. Grassmann obtient le calcul barycentrique comme une application de sa théorie plus vaste ; son point de vue très général lui permet d'une façon très personnelle de dépasser l'intuition géométrique en s'appuyant sur les régularités des structures algébriques.

dimension trois était-elle naturellement et plus ou moins implicitement envisagée sous la forme d'une addition et d'une multiplication induisant sur R^3, une structure d'algèbre et de corps commutatifs. Sir William Rowan Hamilton s'intéressait depuis plusieurs années à la représentation géométrique des nombres complexes et à sa généralisation en dimension trois, quand il a découvert les *Quaternions* vers 1843. Il fut le premier à avoir explicité en détail les propriétés que devaient avoir l'addition et la multiplication des triplets. Il a rédigé de nombreuses notes sur ses différentes tentatives qui montrent qu'il a souvent changé d'angle d'approche essayant tantôt d'aborder le problèmes sous l'angle de l'algèbre tantôt sous l'angle de la géométrie, en usant fréquemment de changements de point de vue. Finalement, c'est en examinant les propriétés géométriques de la multiplication des complexes, qu'il fit un pas décisif vers la découverte des Quaternions. Il mit en effet en relief le fait que cette multiplication se base sur le produit des longueurs de chaque vecteur et sur l'angle qu'ils forment. Essayant de transposer ces idées à la dimension trois, il comprit que l'angle de deux vecteurs n'était plus suffisant, mais qu'il fallait aussi considérer le plan dans lequel cet angle se dessine, autrement dit la rotation qui permet de passer d'une direction à l'autre [Hamilton 1866, 1:106-110]. Or si la longueur est en dimension trois comme deux une valeur unidimensionnelle, une rotation en dimension trois est déterminée par une direction (grandeur bidimensionnelle) et un angle (grandeur unidimensionnelle). Cette analyse le conduisit progressivement à penser qu'un calcul géométrique en dimension trois devait se fonder sur des quadruplets et non des triplets. De plus la non-permutabilité dans le produit de deux rotations en dimension trois le conduisit à abandonner la commutativité du produit des quadruplets[8]. En 1844, Hamilton publia les fondements de la théorie des Quaternions [Hamilton 1844] et passa le reste de sa vie a en promouvoir l'utilisation. La personnalité de Hamilton et son influence sur les mathématiciens d'Outre-Manche, aidèrent beaucoup à la popularisation de cette théorie. En physique et plus particulièrement en électromagnétisme, on assista à une guerre parfois virulente entre quaternionistes et partisans des méthodes vectorielles. Le rôle des différentes théories dans l'établissement du calcul vectoriel est retracé en détail dans le livre de Michael J. Crowe, *A History of Vector Analysis* [Crowe 1967], auquel je renvoie le lecteur intéressé. Pour ce qui concerne la théorie des espaces vectoriels, la découverte des Quaternions eut un autre effet tout autant important. Les Quaternions ont, en effet, fourni la première structure algébrique qui rompait avec le principe de permanence, à cause de sa multiplication non commutative. De fait, cela ouvrit la porte sur de nombreuses recherches sur ce qu'on appelait les systèmes hypercomplexes, qui devinrent plus tard les algèbres, et qui jouèrent un rôle important dans l'émergence de l'algèbre moderne.

L'œuvre de Grassmann dépasse sur de nombreux plans, les différents travaux brièvement présentés ci-dessus. Pourtant celui-ci ne les connaissait pas, pour la plupart, au moment d'écrire l'*Ausdehnungslehre*. Il aura connaissance

---

8 On savait depuis longtemps que la composée de deux fonctions change selon l'ordre de composition. Mais la composition des fonctions n'étant pas considérée encore comme une opération au sens algébrique du terme, cela ne constituait pas un exemple de non-commutativité.

du calcul barycentrique de Möbius très peu de temps après 1844 et reconnaissant une proximité d'idées avec Möbius, prend contact avec lui, ce sera le début d'une correspondance suivie. Möbius est d'ailleurs un des rares mathématiciens de son temps à reconnaître la valeur du travail de Grassmann, mais il ne partage pas ses vues philosophiques et admet son impuissance à saisir tout le contenu de son œuvre. Grassmann entretiendra également une correspondance avec Bellavitis et sur la fin de sa vie, il découvre les Quaternions, dont il donne une interprétation dans le cadre de son Ausdehnungslehre. Mais Hamilton reste persuadé, bien qu'il en reconnaisse certaines qualités, que l'*Ausdehnungslehre* est inférieure à ses propres travaux et la notoriété du mathématicien Irlandais, qui contraste avec l'anonymat de Grassmann, fait que la théorie du premier a eu une influence bien plus grande, sur le développement des mathématiques, et même dans les applications à la physique. Pourtant, grâce en particulier à Josiah Willard Gibbs, les méthodes de Grassmann furent à l'origine de l'emploi de méthodes vectorielles en électromagnétisme s'opposant en cela aux "quaternionistes", dont l'un des plus fervents défenseurs était Peter Guthrie Tait. La reconnaissance de la valeur de Grassmann sur le plan mathématique commencera doucement et tardivement dans les dernières années de sa vie.

Origines de l'Ausdehnungslehre

Je l'ai dit plus haut, Grassmann est un mathématicien essentiellement autodidacte, son père semble avoir été son seul maître. En 1840, afin de pouvoir enseigner les mathématiques et la physique à tous les niveaux du secondaire, il écrit un essai intitulé, *Theorie der Ebbe und Flut*,[9] qui ne sera publié qu'après sa mort. Il y expose les principes d'un calcul géométrique, sur lequel il avait commencé à travailler vers 1832, et qui lui permit de donner un exposé simplifié de certains résultats de la *Mécanique Analytique* de Lagrange et de déduire d'une façon originale des résultats contenus dans la *Mécanique Céleste* de Laplace. Dans l'élaboration de ce calcul géométrique, Hermann Grassmann souligne l'influence du travail mathématique de son père, Justus Grassmann[10]. Dans la préface de l'*Ausdehnungslehre*, Grassmann explique les origines mathématiques de sa théorie, qu'il situe essentiellement dans le travail de son père et dans son propre travail sur la théorie des marées :

> La considération du négatif en géométrie m'avait donné la première impulsion, je m'habituais à voir dans les segments AB et BA des grandeurs opposées ; d'où résultait que, si A, B, C sont des points d'une ligne droite, AB + BC = AC est également toujours vrai [...] D'où résultait l'impératif de constater ce dernier terme de somme non seulement pour le cas où les segments sont dirigés dans le même sens ou dans le sens opposé, mais aussi pour tous les autres cas. Cela pouvait se faire de la façon la plus simple en maintenant encore la loi AB + BC = AC même quand A, B, C n'étaient pas sur une ligne droite. Ainsi fut fait le premier pas vers une analyse qui menait par la suite vers la nouvelle branche des mathématiques que voici. Mais je n'avais aucune idée du domaine fructueux

9 Théorie du flux et du reflux, ou des marées.

10 On trouvera une analyse de l'influence de Justus Grassmann sur son fils Hermann, dans [Lewis 1981].

> et riche où j'étais parvenu ; ce résultat ne me semblait au contraire pas très remarquable jusqu'au moment où je l'ai combiné avec une idée proche. En suivant le concept de produit en géométrie, tel qu'il était conçu par mon père, je trouvais que non seulement le triangle mais aussi le parallélogramme tout court sont à considérer comme le produit de deux côtés contigus, quand on prenait en effet, là encore, non pas le produit des longueurs mais celui des deux segments dont on a fixé les directions. [ibid., 7]

Ainsi les idées mathématiques à la base de la théorie de Grassmann sont-elles semblables à celles qui ont fondé les calculs géométriques. Mais Grassmann se distingue dans l'exploitation qu'il fait de ces principes assez simples, qui l'amèneront à une théorie plus générale que celles de tous ses prédécesseurs. Or cette particularité de Grassmann ne peut se comprendre qu'à travers ses positions philosophiques et épistémologiques qu'il explicite en introduction mais aussi tout au long de son œuvre et qui sous-tendent son choix d'un mode de présentation original, qui fait en même temps la richesse et la complexité de son œuvre. On comprendra que, dans le cadre de cet article, je ne puisse entrer dans une analyse trop fine de l'œuvre de Grassmann, je vais toutefois essayer d'en dégager les traits principaux pour tenter d'éclairer mon propos ; pour plus de détails, on pourra consulter [Lewis 1977], [Flament 1992], [Châtelet 1992], [Fearnley-Sander 1979 et 1982], [Otte 1989] et [Dorier 1995 a et b].

Grassmann commence son introduction en définissant ce qu'il entend par science et mathématiques et la place que va prendre sa théorie dans cet édifice. Il distingue tout d'abord les sciences réelles et les sciences formelles, ces dernières se partageant entre la Dialectique (la logique) et la Théorie des Formes (les mathématiques pures). Ainsi pour lui, la géométrie ne devrait pas faire partie des mathématiques mais être une application d'une théorie formelle, qui aurait, elle, sa place dans les mathématiques. Parmi les influences philosophiques qui ont marqué Grassmann, les travaux de Friedrich Schleiermacher, dont il avait suivi des cours à l'université de Berlin, occupent une grande place. Parmi les enseignements de la *Dialektik* de Schleiermacher[11], Grassmann a pris pour son compte l'usage du contraste comme moteur d'avancée de la pensée. Ainsi dans la Théorie des Formes, il met en évidence deux contrastes : le discret et le continu, d'une part, et l'égal et le différent, d'une autre. Il explique longuement comment ces contrastes opposent deux tendances, mais sont aussi les deux versants d'une même idée. Ainsi, deux objets égaux ne peuvent être pensés égaux que parce qu'on a pu les voir différents, autrement ce serait le même objet. Donc la notion de contraste n'est pas un absolu mais au contraire une position relative qui fait systématiquement envisager les choses sous des angles opposés mais complémentaires, permettant par là même de faire avancer la réflexion, dans un processus dialectique. Par croisement de ces deux contrastes, Grassmann est amené à distinguer quatre branches dans la Théorie des Formes : l'arithmétique (discret-égal), l'analyse combinatoire (discret-différent), la théorie des fonctions (continu-égal) et enfin la théorie de l'extension (continu-différent).

---

11 Friedrich Schleiermacher, *Dialektik*, Berlin: G. Reimer, 1839. Cette compilation a été écrite, à la demande de Schleiermacher, par un de ses élèves, Ludwig Jonas, à partir de ses notes.

Pour mieux comprendre ce que veut dire Grassmann, il est bon d'anticiper en explicitant les débuts de la théorie de l'extension. En effet le concept d'espace (système de *n*-ième échelon) est ainsi introduit : un premier élément est donné a priori, puis par *la poursuite continue du même changement fondamental* (dans les deux sens), l'élément initial engendre un *système de premier échelon.* De la même façon, par la poursuite continue d'un autre changement fondamental, les éléments d'un système de premier échelon engendrent un système de deuxième échelon, etc., sans limitation de dimensions. Ainsi, les systèmes de différents échelons renvoient à une notion d'espace dynamique, dont la dimension s'élargit successivement, au fur et à mesure qu'ils se créent. C'est pourquoi la notion de *changement ("Änderung")* est une clef incontournable, pour appréhender tout ce qui touche à la théorie de l'extension dans sa version de 1844 ; on en comprendra mieux la nature à la lumière de la citation suivante :

> La place de la géométrie vis-à-vis de la théorie des formes dépend du rapport de l'intuition de l'espace avec la pensée pure. Bien que nous disions qu'une telle intuition fait face à la pensée d'une manière indépendante, nous n'avons pourtant pas de la sorte affirmé que l'intuition de l'espace ne nous vient que par la contemplation des choses spatiales ; mais c'est une intuition fondamentale qui nous est donnée *a priori* par le fait que notre sens est ouvert au monde sensible et qui nous est originellement inhérente de la même manière que le corps l'est à l'âme. Il en est de même du temps et du mouvement qui est fondé sur les intuitions du temps et de l'espace. [ibid., 24]

Ainsi, le concept de changement s'appuie sur *l'intuition fondamentale, donnée a-priori, ("mitgegeben Grundandschauung")* de la notion de mouvement. Le mode de génération des systèmes d'échelon supérieur renferme donc les deux caractéristiques de créer par le changement des êtres différents de manière continue. Or ce mode de génération initial est fondamental, puisque c'est sur lui que repose la théorie de l'extension, même si les premiers paragraphes seront consacrés à montrer qu'on peut s'en libérer. Nous reviendrons sur ce point plus loin.

Dans son introduction, Grassmann explicite aussi le choix du mode de présentation de sa théorie ; là encore, on retrouve l'influence de Schleiermacher et l'utilisation de la dialectique des contrastes. Grassmann oppose la philosophie, qui procède du général pour arriver au particulier, aux mathématiques qui progressent des concepts les plus simples, aux concepts les plus composés. Dans les deux cas, il détermine un critère commun de scientificité :

> Nous attachons maintenant un caractère scientifique à un mode de traitement si, d'une part, il conduit le lecteur à la nécessité d'admettre chaque vérité individuelle et si, de l'autre, il le met en état d'embrasser à chaque pas du développement l'orientation prise par sa progression. [ibid., 30]

Ce double objectif, la rigueur et la possibilité d'embrasser à tout instant une vue d'ensemble, gouverne la méthode de présentation adoptée par Grassmann. Il détermine aussi un cheminement dialectique qui met sans cesse en rapport la rigueur d'exposition avec l'explicitation des intuitions qui conduisent au développement des concepts. Ce choix que Grassmann, lui-même, reconnaît peu habituel en mathématiques, où seule la rigueur prévaut en général, donne à son propos un rythme particulier avec des allers-retours qui sont de nature à perdre un lecteur mal averti. Il nous éclaire cependant sur le processus d'invention à l'œuvre dans cette théorie.

La théorie générale des formes

Immédiatement après l'introduction, Grassmann, avant de présenter sa théorie proprement dite, consacre un chapitre à un *Aperçu de la Théorie Générale des Formes ("Übersicht der allgemeinen Formenlehre")*. Cette théorie qui est présentée comme se rapportant à toutes les branches des mathématiques examine le concept de *liaison ("Verknüpfung")* qui correspondrait au concept moderne d'opération. D'ailleurs, un lecteur moderne serait tenté de voir dans ce chapitre une présentation des structures de groupe, d'anneau et de corps. Mais le point de vue de Grassmann est très différent d'une approche axiomatique de ce type de question. Son propos n'est pas en effet de donner une liste de propriétés a priori qui détermineraient une structure algébrique, mais il formalise plutôt les principes qui découlent des couples de concepts généraux d'une part d'égalité et de différence, de l'autre de liaison et de séparation. Par exemple la propriété d'associativité (Grassmann n'emploie pas ce terme) symbolise la possibilité de considérer comme égales les deux formes obtenues par la liaison de trois éléments. Ainsi la démarche de Grassmann se distingue d'un exposé axiomatique en ce qu'elle procède de façon systématique à un examen combinatoire des possibilités d'égalité entre les différentes façons de créer des nouvelles formes par liaison d'autres. En ce sens, le rôle joué par ce chapitre introductif dans la suite de la théorie est important, il va en effet fixer les règles qui gouvernent le processus formel de création des objets au sein de la théorie de l'extension. Cet aspect formel qui touche à l'architecture des systèmes de n-ième échelon, sera cependant toujours mis en rapport avec l'aspect réel des concepts, c'est-à-dire en référence à la manière initiale d'engendrer les systèmes, selon une dialectique des contrastes.

Premiers concepts de l'Ausdehnungslehre

Pour mieux comprendre dans les faits la nature de la démarche de Grassmann, je voudrais maintenant regarder comment il dégage l'équivalent des concepts de base et de dimension. Dans la terminologie de la théorie de l'extension, un des aspects du concept moderne de vecteur correspond à la notion de *segment* ("Strecke") *appartenant à une manière de changement*.[12] Vu le mode de génération d'un système de n-ième échelon (tel qu'évoqué plus haut), n changements se trouvent privilégiés. Grassmann prend soin de supposer ces changements indépendants, c'est-à-dire n'appartenant à aucun système

12 Grassmann qui veut que sa théorie soit indépendante du reste des mathématiques, n'utilise pas le concept de nombre, il le déduira de la division des grandeurs d'extension de même espèce. Ainsi dans le début de sa théorie, dans la version de 1844, il n'y a pas de multiplication par un scalaire. Deux vecteurs colinéaires sont deux segments appartenant à la même manière de changement.

d'échelon moindre que n.[13] Ainsi génération et indépendance linéaire se trouvent associées dans les fondements mêmes de la théorie de l'extension et l'échelon d'un système se présente comme l'aspect naturel du concept de dimension. Cependant, procédant du particulier vers le général, dès le début de sa théorie, Grassmann a en vue de se libérer de cette manière originelle de générer le système. C'est ce à quoi il va parvenir par une utilisation dialectique du contraste entre les aspects formels et réels de l'addition. Il commence par présenter l'addition de deux segments appartenant à la même manière de changement puis de deux segments appartenant à des manières de changement originelles. Il base cette définition sur l'intuition géométrique. Puis il examine l'aspect formel de l'addition et utilise alors la *Théorie générale des Formes* comme cadre d'exploration. Le premier pas à franchir consiste en la possibilité d'inverser l'ordre des changements originels dans la somme définissant un segment. Cette modification formelle n'ayant aucune signification réelle, Grassmann l'accepte tout en soulignant son aspect arbitraire. Il montre par contre en détail le bien fondé, selon le mode de génération, de la propriété d'associativité. Agissant ensuite à un niveau purement formel, il montre qu'en combinant les deux propriétés précédentes, on arrive à la formule : si p_1 et p_2 sont deux segments quelconques et si les écritures suivantes désignent leur "décomposition" selon les changements originels : $p_1 = a_1 + b_1 + c_1 + \ldots$et $p_2 = a_2 + b_2 + c_2 + \ldots$; alors $p_1 + p_2 = (a_1 + a_2) + (b_1 + b_2) + (c_1 + c_2) + \ldots$ Or cette formule qui résulte dans un premier temps d'une investigation purement formelle permet également de donner une signification "réelle" (c'est-à-dire conforme à la manière originelle d'engendrer)[14] à la somme de deux segments quelconques. Ainsi cette formule qui peut paraître anodine, et, n'être dans une théorie moderne, que la déduction triviale de la commutativité et de l'associativité de l'addition se trouve dans l'approche de Grassmann investie d'une signification beaucoup plus riche. Elle marque le rapprochement et l'harmonie des aspects formels et réels de sa théorie. Après ce premier affranchissement à l'égard du mode originel de génération, dans le paragraphe qui suit, il énonce et démontre le résultat suivant :

> Un système de m-ième échelon peut-être engendré par chaque m manières de changement qui appartiennent à ce système et qui sont indépendantes l'une de l'autre. [ibid., 61]

En fait, pour démontrer ce résultat il commence par montrer que :

> Si le système peut être engendré par m manières de changement quelconques, alors je peux introduire au lieu d'une manière quelconque d'entre elles une nouvelle manière de changement (p) qui est indépendante des $(m-1)$ autres et qui appartienne aussi à ce système de m-ième échelon et je peux engendrer le système donné par celle-ci en liaison avec les $(m-1)$ autres. [ibid., 61]

Ce résultat est très important, c'est ce que l'on appelle aujourd'hui le *lemme de l'échange ["Austauschsatz"]*, qui est une des façons les plus classiques (et la plus

13 Attention à ne pas se méprendre sur la généralité de cette définition, il faut rajouter, ce qui est sous-entendu, "engendré par moins de n de ces changements".

14 En effet, comme la somme de deux segments appartenant à la même manière de changement est un segment appartenant encore à la même manière de changement, la formule décrit comment p1+p2 est déterminé selon le mode originel de génération.

prisée des puristes)[15] de montrer que deux bases d'un même espace vectoriel ont le même nombre d'éléments, donc de fonder le concept de dimension. Dans la problématique de Grassmann, il est clair que cela lui permet de se libérer de la manière originelle d'engendrer le système, comme il l'annonce lui-même en tête de paragraphe. Par ailleurs, tous ceux qui l'ont enseigné savent que ce résultat est délicat dans la mesure où son énoncé est assez concret, mais sa démonstration se perd dans des méandres "techniques" qui ne permettent pas de rendre compte de l'intuition qu'on a du résultat. C'est en tout cas ce que ressentent une grande majorité d'étudiants confrontés au lemme de l'échange pour la première fois. L'approche de Grassmann fondée sur une dialectique entre les aspects réels et formels des concepts permet d'atteindre ce résultat d'une façon "naturelle", comme l'aboutissement normal de ce qui précède en fonction du but poursuivi (i.e. l'indépendance vis-à-vis du mode originel de génération). Je ne suis pas en train de prôner l'enseignement de la théorie de l'extension en remplacement de la théorie des espaces vectoriels. Je ne crois pas en effet qu'il soit facile de faire accepter et comprendre par nos étudiants le point de vue philosophique de Grassmann. Sur le plan historique, il est en tout cas incontestable que Grassmann est le premier à atteindre ce résultat et au travers les concepts de base et de dimension. Qui plus est, il restera longtemps le seul, d'autant plus que les premiers à avoir diffusé son travail, n'ont pas pu reprendre cette idée dans toute sa généralité.

Le théorème précédent se trouve au paragraphe 29 de la théorie de l'extension qui en comprend en tout 172. Cela laisse imaginer la richesse globale de l'œuvre. Tous les résultats élémentaires de la théorie des espaces vectoriels se retrouvent dans le contexte de cette théorie, en particulier, l'équivalent de la formule :

$$\dim (E + F) = \dim E + \dim F - \dim (E \cap F).$$[16]

La théorie de l'extension permet également une approche du calcul barycentrique en lui donnant une meilleure assise théorique. Les applications en géométrie, en mécanique, en crystallographie ou à la résolution d'équations sont nombreuses et montrent la performance des concepts. Les concepts de Grassmann prennent en compte non seulement les aspects vectoriels, mais aussi affines et projectifs, de la géométrie.

Postérité

Quand il réécrit la théorie de l'extension en 1861, Grassmann ne change pas le contenu mathématique strict, à part quelques nouveautés. Par contre il refond entièrement la forme : plus d'introduction philosophique, un exposé plus conforme aux normes des mathématiques, des applications données plus tôt. On l'a dit, ce changement n'apporta pas le succès escompté. Si la forme de l'exposé est peut-être plus familière aux mathématiciens, dépouillée du contexte

---

15 Elle a l'avantage de ne pas utiliser les coordonnées.

16 Ce résultat est en fait obtenu à l'aide de la *multiplication extérieure ["äuseres Produkt"]*, qui avec le *produit régressif ["angewandte Pordukt"]* sont les deux grandes originalités de la théorie de Grassmann [ibid. 205-206].

philosophique de sa découverte, elle se trouve amputée d'une part importante de ses origines et offre donc un moindre intérêt historique. Néanmoins, l'emphase mise sur l'aspect formel de la théorie, donne à la présentation un aspect beaucoup plus moderne. Je donne, ci-dessous, quasiment in extenso, une traduction du début de cette nouvelle version pour en faire mieux comprendre la nature :

1. Explication. Je dis qu'une grandeur a est dérivée des grandeurs b, c … par les nombres $\beta, \gamma, \ldots$, si
$a = \beta b + \gamma c + \ldots$
où $\beta, \gamma, \ldots$ sont des nombres réels, tout autant rationnels qu'irrationnels, ou nuls que non nuls. Je dis aussi que a est, dans ce cas, numériquement dérivée de b, c, …

2. Explication. En outre je dis que deux ou plusieurs grandeurs a, b, c, … entretiennent entre elles une relation numérique, ou que la famille de grandeurs a, b, c, … est soumise à une relation numérique quand une quelconque d'entre elles est numériquement dérivée des autres, donc si elle s'écrit
$a = \beta b + \gamma c + \ldots$
où $\beta, \gamma, \ldots$ sont des nombres réels. Si la famille ne comporte qu'une grandeur a, on ne peut dire, dans ce cas, que la famille est soumise à une relation numérique, que si $a = 0$. […]

3. Explication. J'appelle unité, toute grandeur qui permettra de dériver numériquement une série ("Reihe") de grandeurs, et de plus j'appelle cette unité, primitive, si elle n'est pas dérivée numériquement d'une autre unité. L'unité des nombres, donc le un, s'appellera l'unité absolue, et les autres seront dites relatives. Zéro ne peut jamais être une unité.

4. Explication. J'appelle système d'unités toute famille de grandeurs, qui n'entretiennent entre elles aucune relation numérique et qui permettront de dériver d'autres grandeurs par des nombres quelconques. […]

5. Explication. J'appelle grandeur extensive, toute expression qui dérive par des nombres d'un système d'unités (qui ne se réduit cependant pas à l'unité absolue), et de plus j'appelle ces nombres qui vont avec les unités, les nombres de dérivation ("Ableitungszahlen") de cette grandeur. […]

6. Explication. Deux grandeurs extensives, dérivées d'un même système d'unités, s'additionnent, dans le sens que leurs nombres de dérivation attachés à une même unité s'additionnent, soit :
$\Sigma\, \alpha e + \Sigma\, \beta e = \Sigma\, (\alpha + \beta)e$.

7. Explication. Deux grandeurs extensives, dérivées d'un même système d'unités, se soustraient dans le sens que leurs nombres de dérivation attachés à une même unité se soustraient, soit :
$\Sigma\, \alpha e - \Sigma\, \beta e = \Sigma\, (\alpha - \beta)e$.

Rmque. Au regard de la désignation des parenthèses je retiens la définition qu'un polynôme ou un produit de plusieurs facteurs écrit sans parenthèse est synonyme de l'expression écrite avec des parenthèses, dans laquelle toute parenthèse s'ouvre dès le début, ainsi
$a + b + c = (a + b) + c$, $abc = (ab)c$
et ainsi de suite.

8. *Pour les grandeurs extensives* a, b, c, *on a les formes fondamentales :*
1) $a + b = b + a$,
2) $a + (b + c) = a + b + c$,
3) $a + b - b = a$,
4) $a - b + b = a$.
Preuve. […]

9. *Toutes les lois de l'addition et de la soustraction algébriques restent vraies pour les grandeurs extensives.*

Preuve. En effet ces lois peuvent, comme on le sait, se déduire des quatre formes fondamentales du Nr. 8.

10. Explication. Une grandeur extensive est multipliée par un nombre, dans le sens que tous ses nombres de dérivations sont multipliés par ce nombre, soit

$\Sigma \alpha e . \beta = \beta . \Sigma \alpha e = \Sigma (\alpha\beta) e.$

11. Explication. Une grandeur extensive est divisée par un nombre non nul, dans le sens que tous ses nombres de dérivations sont divisés par ce nombre, soit

$$\sum \alpha e : \beta = \sum \left(\frac{\alpha}{\beta}\right) e .$$

12. *Pour la multiplication et la division des grandeurs extensives* (a, b) *par les nombres* (α, β) *on a les formes fondamentales :*

1) $a\,\beta = \beta\, a$,
2) $a\,\beta\,\gamma = a\,(\beta\,\gamma)$,
3) $(a + b)\,\gamma = a\,\gamma + b\,\gamma$,
4) $a\,(\beta + \gamma) = a\,\beta + a\,\gamma$,
5) $a\,.\,1 = a$,
6) $a\beta = 0$ *si et seulement si, soit* $a = 0$, *soit* $\beta = 0$,
7) $a : \beta = a\,\frac{1}{\beta}$, si $\beta \gtrless 0$. *

Preuve. [...]

13. *Toutes les lois algébriques* [17]*de la multiplication et de la division restent vraies pour les grandeurs extensives.*

Preuve. En effet des formes fondamentales (1 à 6) de la proposition précédente découlent, d'une façon connue, les lois algébriques de la multiplication, et par la forme (7) de la même proposition, la division se ramène, de même qu'en algèbre, à la multiplication. Donc les lois algébriques de la division restent vraies pour la division des grandeurs extensives par des nombres. [Grassmann 1862, 13-16]

Les deux listes de propriétés fondamentales peuvent être à quelques modifications près, prises comme les axiomes de la structure d'espace vectoriel. Néanmoins, Grassmann les introduit comme des propriétés a posteriori d'opérations définies par ailleurs. De plus, à la lumière de la version de 1844, il est clair que les propriétés fondamentales sont la mise en forme des lois de l'architectonique sous-jacente dans la théorie générale des formes (seulement présente dans la version de 1844). D'ailleurs les propriétés relatives à la soustraction (les 3) et 4) du nr. 8.) ne prennent vraiment de sens, que si on connaît la théorie générale des formes, où Grassmann montre comment de ces propriétés se déduisent les concepts de neutre et d'opposé. On ne peut donc analyser la version de 1862, sans prendre en compte sa filiation avec la version de 1844. Si on tient donc compte de l'ensemble des deux versions, il est clair, comme je l'ai déjà souligné, que l'approche de Grassmann est, dans son essence même, très éloignée des principes d'une axiomatique. En effet, les objets de la théorie de l'extension et les opérations sur ces objets ne sont pas posés a priori en fonction

* le signe $\gtrless$ composé de > et < signifie différent. (note de Grassmann)

17 Le changement d'attribut pour l'adjectif "algébrique" par rapport à la proposition identique du Nr. 9 n'est pas une erreur de traduction. Est-ce une coquille ou bien Grassmann pensait-il que les deux façons de dire sont équivalentes ?

de certaines propriétés, comme dans une approche axiomatique. Comme on l'a vu dans la version de 1844, les grandeurs d'extension sont déterminées au fur et à mesure, dans un rapport dialectique entre un mode original de génération (aspect réel) et les règles générales d'une architectonique, fournies par la théorie générale des formes (aspect formel). Le concept moderne d'opération n'est d'ailleurs pas vraiment présent chez Grassmann, les liaisons ("Verknüpfung") entre objets ont une nature moins statique, en particulier, Grassmann distingue très nettement la construction de la liaison de son résultat (cf. distinction entre multiplication et produit). Par ailleurs, l'aspect formel ne se suffit jamais à lui-même, il ne prend de sens que dans son rapport avec les aspects réels de la théorie, c'est pourquoi l'approche de Grassmann est en opposition avec l'arbitraire attaché au choix des axiomes. Cependant, malgré cette antinomie entre l'approche axiomatique et celle de Grassmann, la généralisation proposée par ce dernier conduit à des énoncés superficiellement proches d'une définition axiomatique. Ceci est d'autant plus frappant, dans la version de 1862, que le gommage de l'aspect philosophique met en relief, bien que d'une façon artificielle, l'aspect formel. Ainsi, c'est de sa lecture de Grassmann, que Peano déduira la première approche axiomatique des espaces vectoriels [Peano 1888, 141-142]. Cependant les travaux de Grassmann n'influeront qu'indirectement sur la genèse des concepts élémentaires d'algèbre linéaire, le contenu détaillé de l'*Ausdehnungslehre* ne sera vraiment apprécié à sa juste valeur qu'à partir de 1920 environ, en particulier, lorsqu'Elie Cartan, s'appuiera sur le concept de produit extérieur des grandeurs d'extension pour créer l'algèbre extérieure, sur laquelle se fonde l'algèbre multilinéaire [Cartan 1922].

Bibliographie

Jean Robert Argand, Essai sur une Manière de Représenter les Quantités Imaginaires dans les Constructions Géométriques, *Annales de Mathématiques* 5 (1806), 33-147; reprint ed., J. Hoüel ed., Paris: Gauthier-Villars, 1874; Paris: Blanchard 1971.

Michèle Artigue et André Deledicq, *Quatre Étapes dans l'Histoire des Nombres Complexes "Quelques Commentaires Épistémologiques et Didactiques"*, Cahier DIDIREM n° 15, Paris: IREM de Paris VII, 1992.

Giusto Bellavitis, Sopra alcune Applicazioni di un Nuovo Metodo di Geometria Analitica, *Il Poligrafo Giornale di Scienze, Lettre ed Arti. Verona* **13** (1833), 53-61.

Giusto Bellavitis, Saggio di Applicazioni di un Nuovo Metodo di Geometria Analitica (Calcolo delle Equipollenze), *Annali delle Scienze del Regno Lombaro-Veneto. Padova* 5 (1835), 244-259.

Nicolas Bourbaki, *Éléments de Mathématiques -livre II- Chap.3- Algèbre Multilinéaire*, Paris:Hermann, 1948.

J. Budon, Sur la Représentation Géométrique des Nombres Imaginaires (Analyse de quelques Mémoires Parus de 1795 à 1820), *Bulletin des Sciences Mathématiques* (2e série) 57 (1933), 175-200 & 220-232.

A. Q. Buée, Mémoire sur les Quantités Imaginaires, *Transactions of the Royal Society of London* **96** (1805), 23-88.

Cesare Burali-Forti, and Roberto Marcolongo, *Omografie Vettoriali con Applicazioni alle Derivate rispetto ad un Punto e alla Fisica Matematica*, Turin: G. B. Pretrini di Giovani Gallazio, 1909.

Elie Cartan (1908), Nombres Complexes (version augmentée de l'article allemand de E. Study, 1898), *Encyclopédie des Sciences Mathématiques Pures et Appliquées*, Paris: Gauthier-Villars, 1904-1914, Article I-5, 1(1): 329-468; ou*Œuvres Complètes* (6 vols., Paris: Gauthier-Villars, 1953), 1(2):107-247.

Elie Cartan, *Leçons sur les Invariants Intégraux*, Paris: Hermann, 1922.

Gilles Châtelet, La Capture de l'Extension comme Dialectique Géométrique : Dimension et Puissance selon L'Ausdehnungslehre de Grassmann (1844), in *1830-1930 : A Century of Geometry - Epistemology, History and Mathematics*, Lecture notes in Physics vol. 402, Berlin/New-York /Paris: Springer, 1992, pp. 222-244.

Michael J. Crowe, *A History of Vector Analysis - The Evolution of the Idea of aVectorial System*, Notre-Dame: University Press, 1967.

René Descartes, *Le Discours de la Méthode pour bien Conduire sa Raison et Chercher la Vérité dans les Sciences*, Leyden : Jan Maire, 1637; réédition, *La Géométrie*, ed. M. Leclerc et J-C. Juhel, Nantes: edition de L'AREFPPI, 1984.

Gustav Peter Lejeune Dirichlet, *Vorlesungen über Zahlentheorie*, Braunschweig: Vieweg, 1863. Réédité avec des supplements de Richard Dedekind en 1871 (ed.1), 1879 (ed.2), 1893 (ed.4); rééd. ed.4., New-York: Chelsea Publishing Company, 1968.

Jean-Luc Dorier, *Analyse Historique de l'Emergence des Concepts Elémentaires d'Algèbre Linéaire*, Cahier Didirem n°7, Paris: IREM de Paris VII, 1990.

Jean-Luc Dorier, A General Outline of the Genesis of Vector Space Theory, *Historia Mathematica* **22(3)** (1995), 227-261.

Jean-Luc Dorier, Aperçu épistémologique sur la théorie de l'Extension de Hermann Günther Grassmann (1844), *Cahiers du Séminaire Didatech* **1994-95**, *à paraître (Grenoble).*

Jean-Luc Dorier, L'"Ausdehnungslehre" de Grassmann : une Etape Clef dans la Théorisation du Linéaire, *Actes de la rencontre internationale: "Nombre Complexe et Vecteur"*, D. Flament ed., Paris, 24 -26 nov. 93, à paraître.

Jean-Luc Dorier, Basis and Dimension: from Grassmann to van der Waerden, in *Hermann Günther Grassmann - Visionay Scientist and Neohumanist Scholar* , G. Schubring ed., Kluwer, à paraître.

Pierre de Fermat, *Ad Locos Planos et Solidos Isagoge*, Toulouse, 1643; rééd., in *Varia Opera Mathematica*, 3 vols., ed. P. Tannery et C. Henri, Paris: Gauthier-Villars, 1891-1912, 85-96.

Desmond Fearnley-Sander, Hermann Grassmann and the Creation of Linear Algebra, *American Monthly* **86** (1979), 809-817.

Desmond Fearnley-Sander, Hermann Grassmann and the Prehistory of Universal Algebra, *American Monthly* **89** (1982), 161-166.

Dominique Flament, La "lineale Ausdehnungslehre" (1844) de Hermann Günther Grassmann, in *1830-1930 : A Century of Geometry - Epistemology, History and Mathematics*, Lecture notes in Physics vol. 402, Berlin/New-York /Paris: Springer, 1992, pp. 205-221.

Dominique Flament, *Hermann Günther Grassmann, La Science de la Grandeur Extensive, La lineale Ausdehnungslehre*, Paris: Blanchard, 1994.

Carl Friedrich Gauss, Theoria Residuorum Biquadraticorum - Commentatio Secunda, paper read in Göttingen on 23rd April 1831, imprimé pour la première fois in*Werke*, 12 vols., Leipzig: Teubner, 1863-1933, 2:69-178.

Hermann Grassmann, *Die lineale Ausdehnungslehre*, Leipzig: Otto Wigand, 1844, ou [Grassmann 1894-1911, 1:1-139].

Hermann Grassmann, Grundzüge zu einer rein geometrischen Theorie der Kurven mit Anwendung einer reine geometrischen Analyse, *Journal für die reine und angewandte Mathematik* **31** (1846), 11-132, ou [Grassmann 1894/1911, 2(1):49-72]

Hermann Grassmann, *Geometrischen Analyse, Geknüpft an die von Leibniz erfundene geometrische Charakteristik - mit einer erläuternden Abhandhlung von A. F. Möbius*, Leipzig: Weidmannsche Buchhandlung, 1847, ou [Grassmann 1894-1911, 1:320-399]

Hermann Grassmann, *Die Ausdehnungslehre, vollständig und in strenger Form*, Berlin: Th. Chr. Fr. Enslin, 1862, ou [Grassmann 1894-1911, 2:1-383].

Hermann Grassmann, *Gesammelte Mathematische und Physikalische Werke*, 3 vols., ed. F. Engel, Leipzig: Teubner, 1894-1911; rééd., New-York/London: Johnson Reprint Corporation, 1972.

William Rowan Hamilton, On Quaternions or a New System of Imagineries in Algebra, *Philosophical Magazine* **25** (1844), 489-495.

William Rowan Hamilton, *Elements of Quaternions*, 2 vols., Dublin, 1866; rééd., New-York: Chelsea Publishing Company, 1969.

Gottfried Wilhelm Leibniz, lettre à Christian Huyghens - Hanover ce 8 de Sept. 1679, *Christi. Hugenii aliorumque seculi XVII. virorum celebrium exercitationes mathematicae et philosophicae*, ed. Uylenbroek, Hagen: Hagae comitum, 1833, 2:6-12 (Cette référence est celle que l'on trouve en introduction des notes sur la Geometrische Analyse de Grassmann dans [Grassmann 1894/1911, 1:415-420] où la plupart de cette lettre et l'intégralité de l'essai qui l'accompagne sont reproduits. Pour une édition plus accessible voire : *Leibnizens Mathematische Schriften*, ed. C. I. Gerhardt, 2 vols., Berlin: Julius Pressner, 1850;

rééd., *Œuvres Mathématiques*, Paris: Librairie de A. Frank Editeur, 1853.

Albert C. Lewis, H. Grassmann's 1844 Ausdehnungslehre and Schleiermacher's Dialektik, *Annals of Sciences* **34** (1977), 103-162.

Albert C. Lewis, Justus Grassmann's School Programs as Mathematical Antecedents of Hermann Grassmann's 1844 Ausdehnungslehre, in *Epistemological and Social Problems of the Sciences in the Early Nineteenth Century*, ed. H. Jahnke and M. Otte, Dordrecht: D. Reidel Publishing Company, 1981, pp. 255-267.

August Ferdinand Möbius, *Der Barycentrische Calcul*, Leipzig: Johan Ambrosius Barth, 1827, ou [Möbius1967, 1:1-388].

August Ferdinand Möbius, *Die Elemente der Mechanik des Himmels*, Leipzig: Weidemannsche Buchhandlung, 1843, ou [Möbius1967, 4:1-318]

August Ferdinand Möbius, *Gesammelte Werke*, 4 vols., ed. R. Baltzer, Leipzig: S. Hirtzel KG, 1915; rééd., Wiesbaden: Dr. Martin Sändig oHG, 1967.

C. V. Mourey, *La Vraie Théorie des Quantités Négatives et Prétendues Imaginaires*, Paris, 1828; rééd., Paris: Mallet-Bachelier, 1861.

Michael Otte, The Ideas of Hermann Grassmann in the Context of the Mathematical and Philosophical Tradition since Leibniz, *Historia Mathematica* **16** (1989), 1-35.

Giuseppe Peano, *Calcolo Geometrico Secundo l'Ausdehnungslehre di H. Grassmann e Precedutto dalle Operazioni della Logica Deduttiva*, Turin: Fratelli Bocca editori, 1888.

Gian-Carlo Rota, Marilena Barnabei and Andrea Brini, On the Exterior Calculus of Invariant Theory, *Journal of Algebra* **96(1)** (1985), 120-160.

John Wallis, *Opera Mathematica*, 3 vols., Oxford: Oxianae, 1693.

John Warren, *A treatise on the Geometrical Representation of the Square Roots of Negatives Quantities*, Cambridge, 1828; reprint ed. *Philosophical Transactions London* **119** (1829), 241-254.

Caspar Wessel, *Om Directionens Analytiske Betegning*, (read at the Royal Academy of Denmark in 1797), Copenhague, 1798; reprint ed. *Nye Samling af det Kongelige Danske Videnskabernes Selskabs Skrifter* (2) **5** (1799), 496-518; *Essai sur la Représentaion Analytique de la Direction*, French trans. H.G. Zeuthen, Copenhage/Paris: H. Valentiner et T. N. Thiele Editeurs, 1897.