Le continu quand il n'était qu'attribut

Nicole NORDON

Le continu au sens courant, non technique du terme, relève des perceptions immédiates, naturelles, quotidiennes, liées au temps et à l'espace. C'est une sensation tellement familière que c'est une propriété des choses à laquelle on ne prête pas attention ; ce que l'on remarque, ce sont plutôt les ruptures, les points de discontinuité.

S'il est courant qu'une notion mathématique "colle" par quelque chose à sa signification dans le langage courant, c'est dans le continu que l'on trouve le mieux une tentative de transcrire au plus près une notion intuitive dans un langage rigoureux. Et le continu est, pour le mathématicien actuel, un objet conceptuel d'une grande complexité. On a donc, dans cette notion, un mélange étonnant d'intuition sensible et d'intellection fort élaborée.

Philosophes et mathématiciens ont, au cours de l'histoire, essayé de cerner la continuité dans leurs mailles spéculatives ; cette citation de Leibniz reflète bien la perplexité engendrée par cette notion ; *"Il y a deux labyrinthes de l'esprit humain : l'un concerne la composition du continu, le second la nature de la liberté ; et ils prennent leur source à ce même infini "*.[1]

Il faut attendre la fin du XIX^{e} siècle pour que la continuité parvienne au rang des notions mathématiques strictement définies et ce, sinon de façon intellectuellement satisfaisante[2], tout au moins de façon efficace. Jusque là bien des théorèmes essentiels étaient admis sur une forte "sensation de vérité" sans justification théorique.[3]

Cet atelier propose de faire le point sur la vision du continu à la fin de l'Antiquité. Le sujet est vaste ; aussi nous contenterons-nous de deux auteurs ; Aristote et Euclide. Nous commencerons par quelques réflexions d'ordre général sur le continu.

---

1 Leibniz *De la liberté* paragraphe 6.

2 L'hypothèse du continu, à savoir, "il n'existe pas d'ensemble dont le cardinal soit compris strictement entre le cardinal de N et celui de R" a été posée par Cantor. Or cette hypothèse a été démontrée indécidable, ce qui peut troubler plus d'un esprit !

3 C'était le cas, entre autres, de l'existence d'une borne supérieure pour toute partie majorée de R ou de la réciproque du théorème de Cauchy.

Réflexions préliminaires.

De l'opposition du continu et du discret.

Le contraire du continu au sens aristotélicien du terme, c'est-à-dire ce qui dans le même genre donne la différence la plus grande[4], c'est le discret ; le discontinu n'est lui, qu'un opposé intermédiaire.

Le domaine du continu est celui des sensations ; la douceur d'un objet, les nuances d'un arc-en-ciel, la persistance d'une odeur, le flux de l'eau qui coule. Le mot vient du latin "contenere", tenir ensemble. Le domaine du discret est plus intellectuel ; c'est celui de la mise en ordre, du dénombrement d'une collection d'objets, de la communication. Même racine que discerner ; du grec krinein, séparer, choisir.

Dans le langage courant l'opposition continu-discret est ambiguë ; à partir de combien de cheveux est-on chauve ? A partir de combien de grains de sable a-t-on un tas de sable ?

De même dans la vie de tous les jours. Certains changements d'échelle font passer du continu au discret : la surface lisse d'un glacier est composée d'une myriade de cristaux de glace. Un film est fait d'images ponctuelles. Les montres à ressort marquent un temps continu, les montres à quartz un temps discret. La règle à calcul utilise le continu, la calculette le discret. De façon plus générale, en technologie, l'analogique est continu, le numérique est discret.

Dans le domaine de la pensée spéculative, cette opposition est d'une grande importance. Par exemple dans une vision créationiste et fixiste du monde de provenance biblique, Dieu crée successivement la lumière, le ciel, la végétation, les astres, les animaux, l'homme. C'est une création discrète même si cela a fait beaucoup de bruit. Le transformisme, lui, relève du continu.

René Thom cherche à réhabiliter le continu ; il voudrait que celui-ci soit reconnu comme ontologiquement premier par rapport au discret. Dans *Esquisse d'une sémiophysique*, il oppose Aristote chantre du continu, topologue avant l'heure et Platon chantre de l'arithmétique donc du discret. "La théorie des catastrophes" est, dit-il, *"une théorie continuiste des discontinuités"*.

En physique l'opposition onde/corpuscule correspondant à l'opposition continu/discret est fondamentale et suscite de grandes difficultés de représentation en mécanique quantique.

En mathématiques, le continu est le substrat de la géométrie ; il est dans les figures planes, droites et courbes, les surfaces et les corps. La topologie développe une théorie de la continuité fondée sur les notions intuitives d'ouverts, de voisinages, de frontières, de limites, de déformations continues..., toutes notions auxquelles elle donne un sens précis.

---

4 *Métaphysique* I, 4.

Le discret est lié au comptage ; il est la base de l'arithmétique. Son matériau est le nombre. C'est aussi le domaine de l'algèbre ; on combine des éléments, on les relie ou on les disjoint.[5] Dans le discret, on compte et on calcule.

L'opposition géométrie/ arithmétique de la mathématique grecque sans doute consécutive à la découverte de l'irrationalité, s'est adoucie au XVII^{e} siècle avec la géométrie analytique, et actuellement la plupart des concepts mathématiques un peu élaborés font appel à toutes ces disciplines. De nombreux objets mathématiques proviennent d'un mariage entre topologie et algèbre comme par exemple l'espace vectoriel topologique. Mais aussi, on se sert d'une des deux disciplines pour obtenir des résultats dans l'autre ; c'est le cas de la topologie algébrique ou de la géométrie algébrique.

Cependant *les Eléments* de Bourbaki comportent deux grandes parties : les structures algébriques et les structures topologiques.

On trouve en probabilités un bel exemple de dépassement de cette opposition. Dès que le nombre des événements élémentaires est important, on quitte les probabilités discrètes pour passer au continu. Par exemple la loi multinomiale, discrète, est approximée par une fonction gaussienne qui est une fonction continue.

En ce qui concerne les fondements, jusqu'au XIX^{e} siècle, la géométrie était considérée comme la garante de la vérité mathématique. Puis les choses se sont renversées ; le continu est construit à partir des nombres entiers qui prennent le rôle de fondation de la discipline toute entière. C'est ce à quoi s'oppose, entre autres, René Thom[6].

Le continu comme objet paradoxal

Dès qu'il y a de l'infini il y a du paradoxe et comme le dit Aristote "dans le continu l'infini apparaît en premier lieu"[7].
De plus, comme nous l'avons vu plus haut c'est un objet fortement ancré dans le réel et apparemment simple ; les célèbres paradoxes de Zénon mettent mal à l'aise plus d'un mathématicien aguerri. En voici deux autres.

Le premier date des Grecs et pose encore problème à certains : comment un segment de droite, qui a une longueur non nulle, peut-il être composé de points de longueur nulle, ou comment les instants forment-ils la durée, ou comment un agglomérat d'êtres sans dimension peut-elle avoir une dimension, ou encore comment une somme de zéros peut-elle produire un nombre positif ?

Le second, beaucoup plus récent, est le suivant ; soit $(r_n)_{n\in N}$ la suite des rationnels. Les rationnels, comme les irrationnels, sont denses dans R, c'est-à-dire que dans tout intervalle ouvert aussi petit soit-il, il y a une infinité de rationnels et d'irrationnels. Si μ est la mesure usuelle sur R, on a les égalités et inégalités suivantes ;

---

5 Alain Badiou ; *Le Nombre et les nombres* p.21.

6 *Le labyrinthe du Continu*. Colloque de Cerisy. R.Thom ; *L'Antériorité Ontologique du Continu sur le Discret*.

7 *Physique* Livre III.

$$\mu\{\bigcup_{n\in N}]r_n - \frac{1}{2^n}, r_n + \frac{1}{2^n}[\} \leq \sum_{n\in N}\mu]r_n - \frac{1}{2^n}, r_n + \frac{1}{2^n}[= \sum_{n\in N} \frac{2}{2^n} = 2$$

Autrement dit, les intervalles centrés sur les rationnels ne remplissent pratiquement rien !

Définition mathématique actuelle du continu.

La définition la plus générale du continu est la définition topologique ; c'est un espace compact et connexe. Cela veut rendre compte de façon intrinsèque de l'idée de quelque chose d'un seul tenant, "sans trous", qui possède ses extrémités et les limites de toutes ses suites de Cauchy. Ce n'est pas une définition très satisfaisante car ainsi la droite réelle n'est pas un continu contrairement à l'intuition et à la tradition, mais on n'a pas trouvé mieux !

En effet, le plus souvent, quand, en mathématiques, on parle de continu on se réfère de manière informelle à l'ensemble des nombres réels R, substrat de l'analyse réelle. C'est un objet qui nous est tellement familier que l'on a souvent tendance à oublier toute la complexité qu'il contient. La droite réelle est l'identification d'un système de symboles que nous appelons nombres réels, avec les points de la droite euclidienne de telle sorte qu'à chaque symbole on puisse, au moins en théorie, associer un point de la droite et inversement. Pour ce faire nous avons besoin :

-du postulat d'Archimède qui permet d'associer à tout point un nombre ou à tout segment sa mesure. Ce même postulat permet de dire que tout intervalle, aussi petit soit-il, contient une infinité de points ou encore que tout segment est divisible à l'infini.

Mais ce postulat est insuffisant pour faire un continu. Il ne donne pas la connexité, il y a des "trous". Par exemple, l'ensemble des rationnels répond au postulat d'Archimède sans être un continu. Il faut donc en plus :

-un axiome de continuité (Weierstrass, Dedekind ou Cantor) pour qu'à tout nombre réel, même irrationnel, corresponde un point sur la droite orientée.

C'est cet axiome qui assure l'existence de la quatrième proportionnelle, celle du point d'intersection d'une droite et d'un cercle, les propriétés de R mentionnées dans la note 3 et bien d'autres.

Nous allons voir deux aspects du continu, l'un d'ordre qualitatif ou topologique, que nous rechercherons chez Aristote, l'autre d'ordre quantitatif, métrologique que nous étudierons chez Euclide.

Le continu chez Aristote ou l'intuition du continu

Aristote veut comprendre la nature, "la physis", et c'est là qu'il rencontre le continu :*"la nature est principe de mouvement et de changement"* et "le *mouvement appartient aux entités continues"* [8].

A priori ce n'est pas le continu mathématique, mais le continu physique qui se trouve dans les données "naturelles" telles le temps, l'espace, le mouvement.

---

8 *Physique* ; Livre III.

Mais pour Aristote les objets mathématiques n'ont pas d'existence réelle indépendante. Ils sont considérés comme abstraits des objets naturels et surtout dissociés des conditions du mouvement ; ce sont des produits de l'intellect humain influencé par les sensations corporelles. Ils sont une représentation partielle du monde réel, une simplification. Dans ces conditions, la différence entre un concept physique et un concept mathématique peut être fort ténue.

C'est dans la *Physique*, dans *Métaphysique K*, qui est un résumé de la *Physique* et aussi dans les *Catégories*, au chapitre 6 intitulé "quantité", que la continuité est examinée par Aristote.

Le continu est une notion employée par Aristote sans définition jusqu'au Livre V de la *Physique*, comme un terme connu, premier, dont la caractéristique essentielle est d'être indéfiniment divisible :*"le continu est le divisible à l'infini"*. Il faut entendre cette divisibilité comme potentielle, l'infini chez Aristote étant toujours en puissance. En effet, si le continu était divisible en indivisibles, les indivisibles étant de mesures nulles, ils ne pourraient constituer une mesure déterminée. Nous verrons plus loin un autre argument fondé sur la nature de l'indivisible et la définition du continu.

On trouve d'autres formulations de cette propriété, par exemple celle-ci ;*"pour les grandeurs, dans le sens de la diminution, on dépasse une grandeur quelconque."*[9], qui fera l'objet de la Proposition 1 du Livre X des *Eléments* d'Euclide. Ceci n'est autre qu'un équivalent de ce que nous appelons l'axiome d'Archimède[10], plus un axiome de divisibilité simple, c'est-à-dire de l'existence de la $n^{\text{ème}}$ partie d'une grandeur. L'usage du terme grandeur ainsi que le fait de retrouver cette caractéristique dans un traité de mathématique, nous fait penser que le continu est très proche d'un concept mathématique.

Nous nous trouvons donc à la frontière des deux domaines, physique et mathématique, là où l'intuition et l'imagination jouent simultanément. Le continu n'est pas un objet idéal, purement intellectuel, et n'est pas non plus une description stricto sensu du donné empirique.

Grandeur - mouvement - temps.

Dans la *Physique* le continu est attribut de la grandeur, du mouvement et du temps. Ces trois entités sont en étroite dépendance et sont ontologiquement hiérarchisées par Aristote ; pas de mouvement sans changement de lieux, pas de temps sans mouvement ou changement.

S'il y a mouvement c'est qu'il y a changement de lieu auquel correspond une grandeur. Sans mouvement, sans changement il n'y a pas de notion de temps ; par exemple dans le sommeil. C'est le mouvement qui crée le temps :*"Le temps n'existe pas sans le changement... c'est en percevant le mouvement que nous percevons le temps."*[11]

---

9 Ibid 207 b.

10 Deux grandeurs A et B étant données, il existe un entier naturel n tel que $nA>B$.

11 Physique 219, a.

La continuité va se transmettre de la grandeur au mouvement et du mouvement au temps. *"C'est par la continuité de la grandeur que le mouvement est continu ; et par le mouvement le temps."*
"Le mouvement correspond à la grandeur et le temps au mouvement, parce que ce sont des quantités et des quantités continues et divisibles ; c'est en effet parce que la grandeur a ces caractères qu'ils retombent sur le mouvement, et, par le mouvement sur le temps" [12].

Grandeur, mouvement et temps sont donc toutes trois des quantités. Cependant la position d'Aristote sur le sujet n'est pas immuable, et dans *Catégories* 6 le temps appartient à la quantité en soi et le mouvement est rejeté dans la quantité par accident. Or les mathématiques ne régissent que les quantités en soi, qu'elles soient discrètes ou continues ; dans les conditions de *Catégories* 6 elles ne peuvent donc pas aider à la compréhension du mouvement, ce qui posera quelques problèmes aux physiciens du XVIIe siècle[13].

La détermination, la mesure vont donc elles aussi se transmettre ; grandeur, temps et mouvement se déterminent, se mesurent réciproquement ; *"par le temps nous mesurons le mouvement, par le mouvement le temps"* [14]. C'est par le mouvement des astres que nous déterminons le temps, et c'est par le temps que nous disons qu'un mouvement est plus ou moins rapide. De même pour la grandeur et le mouvement ; *"nous disons en effet qu'une route est considérable si le voyage est tel, et que le voyage est considérable si la route est telle"*. Les distances sont souvent comptées en heures ou jours de voyage.

Cette interdépendance est la base de l'argumentation par laquelle Aristote tente de résoudre les paradoxes de Zénon d'Elée sur le mouvement.

Concernant la détermination du continu, nous avons pour l'instant son infinie divisibilité, c'est-à-dire un équivalent du postulat d'Archimède ou encore la densité. Aristote a dû être conscient de l'insuffisance de cette propriété puisque, au livre V de la *Physique*, il va chercher à affiner la notion.

Définition du continu.

Texte de *Physique* V, 3. (voir fin de l'article) Aristote donne les définitions de différents modes de proximité, de juxtaposition des extrémités de deux parties adjacentes d'un même tout ; le but est de cerner au plus près la continuité. Nous laisserons de coté les problèmes posés par la notion d'intermédiaire qu'il serait trop long de développer ici.[15] On peut se contenter de sa signification usuelle d'entre-deux.

---

12 Ibid 220, b.

13 *Le Labyrinthe du Continu* ; La physique du Continu chez Aristote, sa réponse à Zénon par H. Barreau.

14 *Physique 220 b.*

15 On peut sur ce sujet consulter H.Barreau précedemment cité.

Les principaux termes mis en jeu sont les suivants :

Le contact ; sont en contact les choses dont les extrémités sont ensemble, c'est-à-dire dans un même lieu.
Le consécutif est ce qui n'est séparé par rien du même genre ; une ligne après une ligne, les nombres, une maison après une maison.
La symphyse est définie au Livre IV, 5 ; quand deux termes deviennent un par génération. Exemple : les os du crâne. C'est une articulation peu mobile.

Et enfin

Le continu: *"Le continu est dans le genre du contigu ; je dis qu'il y a continuité, quand les limites par où les deux choses se touchent ne sont qu'un seule et même chose, et, comme l'indique le nom, tiennent ensemble ; or cela ne peut se produire quand les extrémités sont deux. Une telle définition montre que le continu se trouve dans les choses dont la nature est de ne faire qu'une lorsqu'elles sont en contact. Et l'unité du tout sera celle du facteur éventuel de continuité, comme le clouage, le collage, l'assemblage, la greffe."*

Signalons au passage la définition donnée dans *La géométrie plane*, classe de seconde, de le Lebossé et Hémery en 1952 ; *"On appelle point la séparation entre deux portions contiguës d'une ligne"*. On voit qu'Aristote n'est pas très loin !

Puis Aristote établit une hiérarchie entre ces notions :
contact→consécutif ; continu→contact ; symphyse→contact.

Ce texte pose de nombreuses interrogations.

En premier lieu, il ne faut pas se laisser abuser par l'expression : "le continu est..."qui pourrait laisser penser que le continu est un substantif. Le continu n'est pas un objet mais une propriété de certaines choses naturelles. Du Livre III au Livre VIII de la *Physique* Aristote fait une théorie du mouvement, et c'est en tant qu'attribut du mouvement que le continu l'intéresse. Nous ne sommes pas dans le domaine mathématique ; cependant la définition du continu par Aristote restera la seule, à quelques modifications près, à la disposition des mathématiciens jusqu'au XIX^{e} siècle. Lors de sa définition du continu en 1883, Cantor fait une remarque : *"je sais très bien que le mot "continu" n'a pas encore reçu de signification fixe en mathématiques..."*.

Plus qu'à des définitions, nous avons affaire à une description de relations que le lecteur connaît déjà ; tous les termes ont été utilisés précédemment dans l'ouvrage. Les relations décrites sont avant tout spatiales, mais le temps est là en arrière-plan et le mouvement "sans lacune, ou peu" est la base intuitive de ce développement.

Le contact est une relation accidentelle entre deux choses différentes, autres, pas forcément du même genre. Les extrémités sont dans un lieu unique immédiat. Si on prend cela comme une définition, se pose le problème de deux choses différentes se trouvant dans un même lieu. Cette notion est mathématiquement impossible ; si les extrémités sont dans un même lieu, elles sont confondues. Par ailleurs, ***si tout ce qui est en contact est consécutif***, on ne voit plus la différence entre le contact et la contiguïté.

Les trois notions suivantes, consécutif, contigu et continu forment une sorte de hiérarchie dont le critère serait la proximité entre les extrémités des parties ; G. G. Granger parle même de ***"suite ordonnée selon le degré croissant de "voisinages" des éléments qu'elles qualifient"***.

Le consécutif correspond à la proximité la plus faible. Deux choses sont séparées soit réellement, soit symboliquement, par quelque chose d'autre, éventuellement du vide. La notion ne s'applique pas qu'aux objets naturels et il semble même que la suite des entiers et sa structure d'ordre joue le rôle de modèle pour la consécution. La question se pose de savoir si les parties consécutives ou contigües sont de même genre ou non. Dans les exemples donnés par Aristote pour le consécutif, elles le sont ; ceci impliquerait que dans le contigu elles le soient aussi, puisque le contigu est ce qui est à la fois consécutif et en contact. Or au livre V en 228a on peut lire que "peuvent être contigus des mouvements qui ne sont identiques, ni spécifiquement, ni génériquement : un homme qui court peut en effet avoir, immédiatement après, un accès de fièvre, et, quand, par exemple, le flambeau passe de main en main, c'est un transport contigu, mais non continu". On peut donc en conclure que dans le consécutif, les parties ne sont pas du même genre, mais qu'elles doivent cependant avoir entre elles un air de parenté pour pouvoir être différentiées de ce qui les sépare. Ce peut être aussi le substrat séparateur, comme par exemple le vide qui , par son homogénéité soit la marque des parties en consécution.

Dans le contigu, on trouve en premier le consécutif puis le contact. Faut-il y voir une priorité donnée à la relation d'ordre ? La séparation précédente entre les parties n'existe plus ; cependant elles sont différentiées, ainsi que leurs extrémités. Autrement dit, comme pour la consécution, les parties préexistent au tout et c'est leur arrangement mutuel qui forme le contigu. La seconde phrase du paragraphe concernant l'intermédiaire doit être, d'après les spécialistes, tel Ross, replacé plus haut dans le paragraphe traitant de l'intermédiaire.

Dans le continu, le lien entre les parties est maximal ; il n'y a plus de différentiation entre elles, elles sont homogènes et les extrémités en contact ne font plus qu'une. Aristote ne prend pas le continu comme déjà constitué ; il poursuit la chaîne commencée avec le consécutif et le contigu. Pour ce faire, il prend des choses de même nature et les assemble de telle sorte que les extrémités fusionnent de proche en proche. Le but est de rendre compte d'une part de la gradation d'intimité entre les parties dans la chaîne précitée, et d'autre part de l'unité immanente au continu, unité qui implique l'existence seulement potentielle des dites parties. Nous reviendrons dans les paragraphes suivants sur cette unité ainsi que sur ces étranges extrémités fusionnantes.

Mais, avant cela, une autre question se pose ; pourquoi la définition du continu intervient-elle après quatre livres dans lesquels cette notion a été abondamment utilisée ?

Une première réponse consiste à dire qu'Aristote a l'intuition de l'insuffisance de l'infinie divisibilité pour caractériser le continu, et qu'il recherche ce que nous appelons actuellement la connexité[16], et qui, du point de vue intuitif, correspond à une absence de trous, une saturation de matière, quelque chose comme une sur-densité qui dépasserait le "beaucoup beaucoup" de points. Un argument serait que dans le Livre VI, Aristote montre que la définition ci-dessus entraîne l'infinie divisibilité et que par conséquent elle est plus forte. Mais aucun texte, à notre connaissance, ne nous permet d'étayer une telle hypothèse entachée de rétrospection.

Une réponse plus modeste est qu'il a besoin de cette définition pour argumenter sur le statut de l'indivisible.

Nature de l'indivisible

En premier lieu l'indivisible est sans partie ; et de ce fait il ne peut être mesuré par rien. C'est l'idée que reprend Euclide dans sa définition du point : *"Le point est ce dont la partie est nulle"*.

En second lieu, l'indivisible n'est pas une partie du continu : la ligne n'est pas composée de points, ni le temps d'instants. On retrouve cela un peu partout.
"Il est impossible qu'un continu soit formé d'indivisibles." (231 a).
"Nul continu n'est divisible en choses sans parties" (231, b).
"La continuité des instants entre eux, comme celle des points, est impossible." (218a)
"L'instant n'est pas plus partie du temps que l'élément du mouvement ne l'est du mouvement ou les points de la ligne." (220, a).

L'argumentation de ces affirmations qui se trouve dans *Physique* VI, 1 est la suivante :

- L'indivisible n'a pas d'extrémité, puisqu'il est sans partie.

"En effet, on ne peut dire que les extrémités des points font un, puisque pour l'indivisible il n'existe pas une extrémité qui serait distincte d'une autre partie ; ni que les extrémités sont ensemble, car il n'y a rien dans une chose sans parties qui soit une extrémité, puisque l'extrémité est distincte de ce dont c'est l'extrémité."

- Par conséquent, deux indivisibles ne peuvent être en contact : s'il y avait contact ce serait du tout au tout. Le tout serait réduit à l'indivisible ; par exemple la ligne serait réduite au point.
- Il ne peut *"y avoir consécution entre un point et un point, un instant et un instant"* car la consécution nécessite un intermédiaire d'un autre genre.

D'une part, l'indivisible n'est pas une partie du continu, et d'autre part tout continu est divisible en parties qui sont toujours divisibles. En effet, si le continu était divisible en indivisibles, il y aurait contact d'indivisible à indivisible, et nous venons de voir que cela est impossible. La définition du Livre V entraîne donc l'infinie divisibilité du continu.

Mais alors, quel est le statut de l'indivisible, comme le point ou l'instant ?

---

16 Un espace est topologiquement connexe s'il n'existe pas de partition de l'espace en deux ouverts, ou encore s'il n'existe pas de partie propre non vide à la fois ouverte et fermée. On peut remarquer que ces définitions sont données sur le mode négatif.

"Les extrémités ne sont pas des substances , mais toutes ces choses sont bien plutôt des limites". [17] C'est à partir de la grandeur à trois dimensions que l'on obtient par abstraction, surfaces, lignes et points comme limites ou extrémités. Or la limite est d'une autre espèce que ce qu'elle limite[18], elle est d'une autre nature, elle est hétérogène au tout. Cela se voit dans la mesure d'un volume ; les bords ne "comptent" pas, et un cube sans bord a même volume qu'un cube avec bord. Nous avons là un argument supplémentaire pour affirmer que l'indivisible n'est pas une partie du tout. Point et instant en tant qu'indivisibles de l'espace et du temps sont des modèles, et c'est à partir d'eux qu'Aristote va essayer de cerner la nature de l'indivisible.

"L'instant est la continuité du temps, comme on l'a dit ; car il relie le temps passé au futur ; et, d'une manière générale, il est la limite du temps ; en effet commencement d'une partie, fin d'une autre. Mais cela ne se voit pas comme sur le point quand il demeure en repos. Et c'est en puissance que l'instant divise. Et comme tel, il est toujours autre ; au contraire en tant qu'il relie, il est toujours le même, comme pour les lignes mathématiques. Car le même point n'est pas toujours un quant à la définition, puisqu'il est autre quand on divise la ligne; mais en tant qu'on le prend dans sa fonction unifiante, il est le même de toutes façons (quant à la définition et quant au sujet). Ainsi l'instant est, d'un côté, division en puissance du temps, de l'autre, il limite et unifie les deux parties. Or quant au sujet, la division et l'unification sont la même chose, mais non quant à l'essence." [19]

L'indivisible n'a qu'une existence potentielle, puisqu'il n'est pas toujours un, puisqu'il peut devenir autre, passer du un au deux et inversement ; quand on coupe en deux une ligne mathématique, le point devient deux, le début d'une des lignes et la fin de l'autre. Opération impossible dans un corps réel, d'où la virtualité de l'indivisible, et non l'existence effective.

Mais il est nécessaire ; l'instant est indispensable au temps car *"sans le temps pas d'instants, sans instants pas de temps."* [20]C'est par sa fonction de détermination des parties puisqu'il en marque le début et la fin, par sa fonction unifiante, bref c'est par son rôle, qu'il a un statut. Mais tous les indivisibles ne sont pas identiques ; le point est plus concret que l'instant car il lui arrive de s'actualiser aux extrémités d'un segment ou lorsqu'il est désigné distinctement. Un point peut être mobile ou au repos, mais pas l'instant. Ainsi tous les indivisibles n'ont pas les mêmes déterminations, ils ont malgré leur peu d'être leurs individualités propres.

Nous avons donc affaire à une chose étrange située entre être et non-être.

Si Aristote est très ferme sur sa position concernant la non composition du continu par des indivisibles, il nous semble parfois un peu distrait sur la relation

---

17 Aristote ; *Métaphysique* 1090 b, 1060 b

18 Aristote ; *Catégories* 6.

19 Aristote ; *Physique* 222, a.

20 Ibid 219, b.

réciproque des indivisibles ; nous avons deci-delà relever quelques phrases qui nous paraissent ambiguës et que nous livrons à votre sagacité. Dans *Métaphysique* K 12, 1089 a ; *"Le point ne se confond pas avec l'unité ; les points sont susceptibles d'être en contact, les unités ne le sont pas."* et dans *Physique* 207, a ;*"C'est seulement du point consécutif qu'un point est différent"* . N'y-a-t'il pas contradiction avec le développement précédent et cette autre phrase de *Physique* 231, b, 6 ; *"Maintenant, il n'y aura pas plus de consécution entre un point et un point, un instant et un instant, de façon à en faire la longueur ou le temps".* Aristote est pris entre deux problèmes ; il veut concilier l'ordre entre les points et le fait qu'un point et son successeur ne font qu'un. Or le seul modèle d'ordre qu'il ait à sa disposition est celui des nombres entiers.

Ces "lapsus" montrent la difficulté du sujet traité, la nécessité de dissocier concepts physiques et mathématiques et la prégnance de certains modèles archaïques comme celui de l'ordre de la suite des entiers.

Il nous faut voir maintenant la relation entre le continu et l'unité que nous avons rencontrée lors de la définition du continu dans le Livre V de la *Physique.*

Le continu, le un et le multiple.

"Le continu est l'unité dans la multiplicité." est une formule célèbre, nous dit Poincaré dans *La science et l'hypothèse.*

Chez Aristote, l'association du un et du multiple dans le continu est fréquente et commence dès le Livre I de la *Physique*. *"L'un se dit soit du continu soit de l'indivisible ...Si c'est le continu, l'un sera multiple ; car le continu est divisible à l'infini"* [21]. Le continu est le lieu où les opposés classiques un et multiple coïncident ; Aristote transgresse ainsi les interdits posés par ses prédécesseurs qui *"se donnaient beaucoup de mal pour éviter de faire coïncider en une même chose l'un et le multiple".*

-Le continu est un, et le un est continu ; *"un mouvement qui est absolument un est nécessairement continu, en tant que tout mouvement est divisible et que, s'il est continu, il est un."* [22]

-Un mouvement non-uniforme et continu est dit "un" mais il l'est moins qu'un mouvement uniforme. *"Le mouvement non-uniforme est un dans le cas où il est continu, mais il l'est moins."*[23] Est uniforme un mouvement qui n'est pas décomposable, à support régulier, droite ou cercle de préférence et de vitesse constante.[24]

Cette association du un et du continu relève et de la sensation et de la métaphysique ; le continu est la marque d'une homogénéité plus ou moins parfaite, d'une uniformité. Le continu intuitif est parfaitement lisse. La conception ordinaire *"suppose entre les éléments du continu une sorte de lien*

---

21 Physique 185, b.

22 Ibid 228, a.

23 Ibid 229, a.

24 Ibid 228, b.

intime qui en fait un tout"[25]. Est sous-jacente l'idée philosophique du "même", de l'identité, de la permanence.

On retrouve cette idée au Moyen-Age chez Avicenne qui, dans *La Métaphysique du Shifa* (III-2), distingue "l'un par continuité", "l'un par continuité véritable" et "l'un par continuité non véritable". Dans "l'un par continuité véritable" ***"la multiplicité est en puissance seulement."*** L'unité par agrégation, surtout si elle est artificielle relève de "la continuité non véritable". On la trouve aussi chez des contemporains comme René Thom ;***"J'estime que le continu archétypique est un espace ayant la propriété d'une homogénéité qualitative parfaite"*** .

Enjeux

L'insistance d'Aristote sur l'impossibilité pour un continu d'être composé d'indivisibles laisse penser qu'il y a, derrière cette question un, ou des enjeux. Nous en voyons deux.

L'un d'ordre métaphysique et théologique est une opposition à la théorie atomiste prônée par Leucippe et Démocrite. Pour eux, tout est composé d'atomes et de vide ; les atomes sont des particules insécables, indivisibles, imperceptibles aux sens, mais accessibles à la pensée, et sont seuls détenteurs de l'Etre. C'est un conflit que l'on retrouve 2000 ans plus tard lorsque les théologiens aristotéliciens s'opposeront à l'atomisme, incompatible, de leur point de vue, avec le dogme de la transsubstantiation.[26]

L'autre enjeu est d'ordre métaphysico-mathématique et porte sur la composition des solides et des surfaces. Aristote fait souvent référence à une école ou un courant de pensée d'influence pythagoricienne et platonicienne, qui considère les surfaces comme des collections de lignes et les solides comme des collections de surfaces. ***"Il y a des philosophes qui font tous les corps sujets à la génération en les composant de surfaces et en les résolvant en surfaces. "***[27]

Considéraient-ils la ligne comme composée de points ? Il est difficile de savoir si oui ou si c'est Aristote qui leur assigne cette assertion. Voici son argumentation : ***"Il est évident que le même raisonnement qui compose les solides de surfaces compose les surfaces de lignes, et les lignes de points : mais s'il en est ainsi, la partie de la ligne ne sera pas nécessairement une ligne".*** Mais d'après Aristote lui-même et certains commentateurs, ces philosophes mathématiciens s'efforçaient à ne pas parler de "point" mais de "ligne

---

25 Poincaré ; *La science et l'hypothèse.*

26 G. Minois ; *L'église et la science* ; tome 1 p.348-352. A partir de St Thomas d'Aquin, le miracle eucharistique est expliqué ainsi : les accidents subsistent, à savoir la couleur, la consistance etc... du pain, alors que la substance du pain disparaît, remplacée par celle du corps du Christ. Dans l'atomisme substance et accident sont une seule et même chose, sont donc inséparables même par un miracle, rendant totalement incompréhensible la transformation du pain.

27 *Traité du Ciel* 299, a. Aristote s'oppose sans doute à Platon qui, dans le *Timée* en 53 sq. constitue les solides à partir de triangles.

insécable"[28] , ce qui ne résout rien, car *"il faut bien que ces lignes insécables aient une limite : aussi l'argument qui établit l'existence de la Ligne insécable établit-il aussi celle du Point"*.[29].

Le fondement d'une telle théorie est d'ordre métaphysique ; c'est le plus simple qui est ontologiquement premier, qui a le plus d'existence[30]. Ces philosophes *"de ce que le point est limite ou extrémité de la ligne, celle-ci de la surface, cette dernière du solide, pensent qu'il est nécessaire qu'existent de telles réalités naturelles"*.

Aristote ne peut qu'être en désaccord avec cette pensée. Une première raison est que pour lui, ce qui est ontologiquement premier, ce qui a le plus d'être, ce sont les corps. Surfaces, lignes et points sont obtenus à partir du corps par abstraction et n'ont pas d'existence véritable. Pour contrer la théorie de ces philosophes, Aristote montre dans le Traité du ciel en 299 a et b, que tout corps pesant est divisible et que, par conséquent, le point qui est indivisible, n'a pas de poids. Si le point a une existence réelle on arrive à des absurdités : *"Si le point n'a aucune gravité, il est évident que les lignes n'en ont pas non plus ; et si elles n'en ont pas , les surfaces n'en ont pas davantage ; en sorte que nul corps n'en a."*

En second lieu une telle vision des choses, celle des philosophes mathématiciens, revient à poser l'infini comme actuel, et à admettre dans le continu des parties non homogènes au tout. Les raisonnements mathématiques basés sur cette théorie sont appelés "méthode de démonstration par les hétérogènes" ou encore méthode des indivisibles[31].

Ces contradictions ont été surmontées, mais non sans mal, à la fin du XIX^{e} siècle. Jusque là on n'osera pas dire qu'une droite est constituée de points. La théorie des ensembles résout le problème de l'élément et de la partie vingt deux siècles après les interdits d'Aristote, en différentiant l'appartenance de l'inclusion, l'élément a de la partie {a} ; $a \in A$ mais $\{a\} \subset A$. Par cet artifice le principe de l'homogénéité de la partie et du tout est sauvegardé ; l'élément est hétérogène à l'ensemble, la partie, elle, est homogène. *"Seule une nette distinction entre un ensemble constitué d'un unique élément et cet ensemble*

---

28 On peut sur ce sujet consulter L.Robin ; *La Théorie platonicienne des Idées et des nombres d'après Aristote* p. 227 sq.et p.472-474.

29 *Métaphysique*, A, 9.

30 Dans les définitions du Livre I des *Eléments*, Euclide définit d'abord le point, puis la ligne dont les extrémités sont des points puis la surface. Peut-on en déduire quelque arrière-pensée métaphysique ? Nous ne le pensons pas. L'ordre de présentation est ici d'ordre logique et peut-être pédagogique,la géométrie plane étant considérée comme plus simple que la géométrie dans l'espace.

31 Méthode empirique de quadrature qui permet de comparer deux surfaces ou deux solides (mais pas deux segments) par décomposition en une infinité de lignes ou de surfaces reconnues égales ou proportionnelles chacune à chacune et mises en correspondance biunivoque. Archimède l'utilise dans la *Méthode* comme procédé heuristique. Ce procédé sera très utilisé au XVII^{e} par Cavalièri, Galilée et bien d'autres. Elle sera aussi très critiquée. On peut consulter J.L. Gardies ; *Pascal entre Eudoxe et Cantor*.

lui-même rend possible le maintien du principe selon lequel toute partie doit être homogène au tout". [32]

Corps, surfaces et lignes sont alors conçus comme des ensembles de points ;

$$A = \bigcup_{a \in A} \{a\}$$

que A soit un ensemble fini ou infini, continu ou non. L'infini actuel n'est plus un tabou.

Le continu et la quantité

Quelques remarques préliminaires.

Pour nous gens du XX^{e} siècle, la quantité dans le continu se présente sous deux formes ;

- la puissance d'une partie c'est-à-dire le nombre d'éléments de cette partie, son cardinal. C'est le domaine du discret, du comptage, du dénombrement, de l'arithmétique.
- la mesure de cette partie, si elle existe[33]. S'il s'agit de la droite, à toute partie de la droite on associe sa longueur, d'une surface son aire etc.

Intuitivement, ces deux notions sont liées ; plus il y a d'éléments, plus la mesure doit être grande ou, ce qui est équivalent "le tout est plus grand que la partie"[34]. Il a fallu surmonter cette intuition "naturelle" pour donner une cohérence à ces deux quantifications et pouvoir donner la mesure d'un ensemble à partir des mesures de ses parties constituantes. Grâce à la σ–additivité[35] de la mesure, le paradoxe de la mesure du tout et de la somme des mesures de ses parties soulevé par Aristote est surmonté ; il est vrai, pas pour tout le monde !

Le problème du dénombrement des éléments d'un continu, ce que nous appelons la cardinalité d'un ensemble, n'a pas été abordé par les Grecs. Est-ce dû à l'interdit sur l'infini en acte ? Nous n'avons donc à ne nous intéresser qu'au problème de la mesure avec les deux problèmes de l'irrationalité et de la correspondance entre nombre et point sur la droite euclidienne, ce que nous allons voir en examinant le début du Livre V des *Eléments* d'Euclide.

---

32 Zermelo.

33 Haussdorff (1868-1942) a montré que pour $n < 3$ toute partie bornée de R^n était mesurable.

34 Dans *Les paradoxes de l'infini*, Bolzano reste prisonnier de cette intuition. Au par.21, il estime la pluralité de [0;5] plus petite que celle de [0;12] malgré la correspondance biunivoque entre ces deux ensembles. Au par.41 il fait quelques confusions entre la mesure et la cardinalité ;***"si le rapport des grandeurs de deux objets de l'espace totalement semblables est irrationnel, celui des ensembles de leurs points sera aussi irrationnel."*** Nous voilà avec un infini irrationnel !

35 La mesure n'est additive que si elle porte sur une infinité dénombrable.

Que fait Euclide ?

Euclide ne définit pas le continu ; il n'en parle même jamais[36]. Mais le problème est sous-jacent d'une part à la mesure des grandeurs et d'autre part à l'existence du point d'intersection de deux lignes qui "se croisent".

Mesurer, c'est associer à toute grandeur un nombre ; or pour un Grec, un nombre c'est un entier. Si deux segments sont commensurables on peut s'en sortir avec des formules du genre 2A=3B. Mais comment traiter la mesure des grandeurs incommensurables comme la diagonale du carré de coté unité ? La réponse théorique est donnée dans le Livre V des *Eléments* d'Euclide attribué à Eudoxe de Cnide (-408, -355), élève de Platon à l'Académie. On lui attribue aussi le Livre X qui en est la continuation.

Texte du Livre V

Les définitions du Livre V porte sur les grandeurs sans que cette notion soit précisée, mais tout porte à penser qu'il s'agit de grandeurs continues.

Définition 3.
D'une part, on ne parle de raison qu'entre grandeurs homogènes, dans un sens qui sera précisé plus loin ; d'autre part les comparaisons de deux raisons se feront sur le mode de l'égal et de l'inégal[37] et non par exemple du plus ou moins beau, ou du beaucoup et du peu[38].

Définition 5 :
On ne peut faire le rapport entre deux grandeurs A et B que s'il existe un entier n tel que nB>A, et un entier m tel que mA>B. C'est ce que l'on appelle l'axiome d'Eudoxe ou l'axiome d'Archimède. Mais pour nous ce n'est pas, comme c'est le cas ici, une condition d'existence d'un objet mathématique mais une propriété de certains corps au sens moderne du terme ; on part d'un ensemble dans lequel l'opération "rapport entre deux éléments" existe comme opération interne, et on se demande si les éléments de ce corps satisfont à l'axiome d'Archimède.

Cette définition comporte deux aspects, l'un négatif, l'autre positif.
Voyons le premier qui précise l'homogénéité de la définition 3 et interdit ;
– les rapports entre grandeurs qui ne sont pas de même espèce comme, par exemple, la raison entre une grandeur dans un espace à n dimensions et une grandeur dans un espace à n+1 dimensions . En effet si A est une surface et B un segment nous n'avons aucun critère de comparaison entre A et B autre que leurs mesures respectives, mais c'est justement ça qu'il n'est pas possible

36 A une exception près ; dans la traduction des *Eléments* faite par Vitrac la demande 2 du Livre I est la suivante ; *"et de prolonger continûment en ligne droite une ligne droite limitée."*

37 Aristote ; *Catégories* 6, 35 ; *"le caractère le plus propre de la quantité, c'est donc bien qu'on peut lui attribuer l'égal et l'inégal."*

38 Aristote ; *Métaphysique* A, 9, 992 a 16 ; *"le nombre n'est pas contenu dans les grandeurs géométriques, parce que le beaucoup et le peu différent des principes des grandeurs."*

de faire. Et bien entendu il n'y a pas de raison possible entre une vitesse et un temps. Cet interdit perdurera longtemps ; Galilée donnera la loi de la chute des corps sous la forme $\frac{s_1}{s_2} = \frac{t_1^2}{t_2^2}$.

- les rapports entre grandeurs de même espèce mais incomparables comme angle et angle corniculaire. Livre III proposition 16 : *"l'angle corniculaire est plus petit qu'aucun angle rectiligne aigu"*. Les Grecs avaient leurs infiniment petits ! Cet axiome empêchera les mathématiciens du XVIII^{e} siècle de travailler avec bonne conscience sur les infiniments petits. En effet si x est un infiniment petit il n'existe aucun n tel que $nx > 1$.

Par contre la définition 5 permet, et c'est son coté positif, d'inclure dans la notion de raison les rapports entre grandeurs incommensurables. En effet, grâce à elle, on peut montrer ce que nous avons vu chez Aristote que *"pour les grandeurs dans le sens de la diminution, on dépasse une grandeur quelconque"* c'est-à-dire la proposition X, 1 des *Eléments*. Puis, on peut déterminer la commensurabilité ou l'incommensurabilité de deux grandeurs par un procédé équivalent à l'algorithme d'Euclide sur les entiers ; c'est la proposition X, 2.

Voici le procédé : A et B étant deux grandeurs homogènes telles que A>B, il existe une suite d'entiers n_i et une suite de grandeurs R_i telles que

$A=B.n_1+R_1 \qquad R_1 < B$
$B=R_1\, n_2+R_2 \qquad R_2<R_1$
....
$R_k=R_{k+1}n_{k+2}+R_{k+2} \qquad R_{k+2} < R_{k+1}$
....

Si l'opération a une fin, c'est-à-dire si on arrive à un reste nul, si *"un reste mesure le reste précédent"*, alors A et B sont commensurables et la raison A/B est égale à une raison entre entiers. Si par exemple A et B sont des segments (lignes en grec), on peut associer à la raison A/B un segment, donc un point sur A, point que nous pourrions appeler "rationnel".

Mais si l'opération est sans fin, A et B sont incommensurables ; rien ne permet de dire qu'il existe sur A de point correspondant à la raison A/B, c'est-à-dire de point "irrationnel". L'affirmation de l'existence d'un tel point demande un axiome de continuité du genre de celui de Dedekind.

L'axiome d'Eudoxe est nécessaire pour attribuer une raison à toute grandeur continue, mais insuffisant pour faire l'opération inverse.

Henri Lebesgue dans *La mesure des grandeurs* II, 7 et 8 montre de façon très claire comment la comparaison du segment AB et du segment U pris comme unité permet, grâce à l'axiome d'Archimède de trouver la mesure en nombre décimal de AB (si on procède par analogie, permet de justifier la raison AB/U) ; puis il s'intéresse à l'opération inverse et se demande *"si toute suite de chiffres indéfinie vers la droite, et comportant une virgule, est un nombre. C'est-à-dire si cette suite provient de la comparaison d'un segment AB à l'unité U"*. Si nous reprenons l'analogie commencée, la question est la suivante : à toute raison eudoxienne abstraite, c'est-à-dire à toute proportion, peut-on faire correspondre une ligne (en langage actuel, un segment), ou un point B sur une droite passant par A, correspondant à la raison envisagée ? La réponse de Lebesgue est : il est nécessaire que, pour toute suite de segments emboîtés les uns dans les autres et dont la grandeur tend vers zéro, il existe un point B commun à tous les segments (axiome de continuité) et qu'il n'y en ait qu'un (axiome d'Archimède).

Bien entendu les Grecs n'ont pas d'axiome de continuité. Si A est une grandeur géométrique incommensurable à la grandeur U, A/U a une existence ; il appartient au domaine des raisons, il a un statut. On est parti du géométrique et on est arrivé dans le monde des raisons, mais le voyage de retour n'est pas possible ; on ne peut à une raison faire correspondre une grandeur.

Reste à voir quel est le statut des raisons. Si, parfois, une raison est égale à un nombre (entier) ou à une raison de nombres, dans le cas général ce n'est ni un nombre ni une grandeur.

Définition 6

Elle permet de définir l'égalité entre deux raisons ; A/B=C/D (où A et B sont de même espèce ainsi que C et D mais pas forcément que A et B) si, chaque fois que nA>mB alors nC>mD , si nA<mB alors nC<mD et si nA=mB alors nC=mD. Autrement dit, A/B=C/D lorsqu'elles sont toutes deux supérieures aux mêmes rationnels et inférieures aux mêmes rationnels c'est-à-dire lorsqu'elles définissent la même coupure dans l'ensemble des rationnels. Dedekind s'inspirera de la définition 6 ; il part de Q, ensemble des nombres rationnels et il en fait une partition en deux classes non vides A_1 et A_2 de sorte que tout nombre de A_1 soit plus petit que tout nombre de A_2 ; si aucun rationnel ne fait la coupure *"nous créons un nombre nouveau, irrationnel x que nous considérons comme parfaitement défini par cette coupure"* [39]. L'intérêt de la démarche de Dedekind sur celle d'Eudoxe est qu'il construit l'ensemble des réels, alors qu'Eudoxe ne donne qu'un moyen pour comparer au coup par coup deux raisons.

La définition d'Eudoxe est conceptuellement remarquable mais peu maniable car elle fait intervenir une infinité de relations. Pratiquement, Archimède se sert des raisons presque uniquement pour exposer des résultats qu'il a trouvés par ailleurs par d'autres moyens.

L'égalité entre raisons étant établie, la définition 4 ,*"une proportion est une identité de raison"* donne la proportion comme une raison indépendante de tout substrat géométrique. Et c'est, nous semble-t-il, à la proportion que le terme de "nombre eudoxien" doit faire référence.

Définition 8

Si $nA > mB$ et $nC < mD$ pour un couple d'entiers (m,n), alors $A/B > C/D$.

Les définitions 6 et 8 établissent une relation d'ordre entre les raisons. Elles permettent de comparer des grandeurs : si U est l'unité de grandeur, A/U et

---

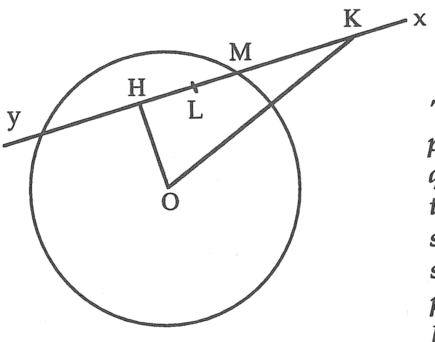
39 R. Dedekind ; *Continuité et nombres irrationnels. Les nombres, que sont-ils et à quoi servent-ils?* traduit de l'allemand par J. Milner et H. Sinaceur, Paris, Navarin 1979. La première édition allemande est de 1888.

B/U sont comparables mais sans détermination de valeurs. La théorie d'Eudoxe est une théorie de la mesure des grandeurs sans valeur numérique.

Dans la suite du Livre V, Euclide établit des règles de manipulations de proportions[40], mais il ne définit ni le produit ni la somme. Cependant il se sert parfois du produit de deux raisons sous la forme $A/B \times C/D = (A \times C)/(B \times D)$, mais sans définition explicite.

Rien ne permet non plus de considérer les raisons comme des opérateurs de grandeur ; si A/B est une proportion irrationnelle et C une grandeur, alors, le produit $A/B \times C$ n'est pas défini. Ce serait l'équivalent de l'existence de la quatrième proportionnelle car il faudrait admettre qu'il existe une grandeur D telle que $D/C = A/B$, ce qui exige un axiome de continuité. Euclide utilise la quatrième proportionnelle, par exemple dans le Livre XII, mais cela ne résulte d'aucune définition ni axiome.

Il existe un autre problème lié à l'absence d'un continu explicite ; l'existence de points d'intersection entre deux figures du plan n'est ni postulée ni démontrée ; c'est le cas par exemple des points d'intersection entre un cercle et une droite ou entre deux cercles. On retrouve ce manque dans plusieurs propositions : dans le Livre I les propositions 1, 12 et 22. Un axiome de continuité est nécessaire, axiome qui peut être construit sur le modèle des coupures de Dedekind.



"Si tous les points d'une ligne droite peuvent être répartis en deux classes telles que chaque point de la première classe se trouve à gauche de chaque point de la seconde classe, alors il existe un point et un seul qui produit cette répartition de tous les points en deux classes, cette division de la ligne droite en deux parties". [41]

Considérons par exemple l'intersection d'une droite (D) et d'un cercle de centre O et de rayon R. Si H est le pied de la perpendiculaire issue de O sur (D), alors $OH < R$ et H partage (D) en deux demi-droites Hx et Hy. Considérons la demi-droite Hx. Appelons première classe les points L de Hx tels que $OL < R$ et seconde classe les points K de Hx tels que $OK \geq R$. L'axiome de Dedekind permet d'affirmer l'existence d'un point M unique sur la droite séparant les deux classes, et on montre sans difficulté que $OM = R$; M est donc l'intersection de la droite et du cercle.

---

40 On peut consulter *Nombres, grandeurs et continu* de J.Dhombres.

41 R. Dedekind ; *Continuité et nombres irrationnels.*

Sans cet axiome, les nombres irrationnels, c'est-à-dire les raisons eudoxiennes incommensurables, ne correspondent à aucun point sur la droite, et ce peut être le cas du point M.

"Il est clair que si les points dont les coordonnées sont commensurables étaient seuls regardés comme réels, le cercle inscrit dans un carré et la diagonale de ce carré ne se couperaient pas, puisque les coordonnées du point sont incommensurables".[42]

On voit ainsi s'introduire dans un corpus théorique d'une grande précision, une "absence" d'axiome dérivant d'une évidence empirique. Il est difficile de rester dans le pur domaine de l'idéalité mathématique et l'intuition sensible est un guide qui a ses traîtrises. La difficulté du continu provient en bonne part de la familiarité de la notion et des fausses évidences qui en découlent. Notion de base de notre perception et de notre mode de penser, il est source de paradoxes dans chacun des domaines où il intervient. Et les mathématiques ne dérogent pas à cette règle, bien au contraire !

Se pose alors le problème du continu dans l'enseignement. Dans une brochure de l'I.R.E.M. de Lille de 1995, Eliane Cousquer regrette l'abandon de la construction des réels en début de premier cycle universitaire. Nous partageons totalement son regret mais pourquoi cet abandon ? N'est-il pas "malsain" de ne justifier des règles sur une notion omniprésente en mathématiques que par la seule intuition ? Et quelle intuition ? empirique, intellectuelle ? alors que nous savons que l'une comme l'autre sont insuffisantes pour justifier tout ce que nous sollicitons du continu ? En effet cette notion, telle que nous l'employons en mathématiques, est une construction et non une conceptualisation abstraite de la nature. Elle nécessite un saut dans l'idéalité pure, dans l'axiomatisation, dans la convention.

Alors pourquoi cet évitement ? Si, comme le dit Eliane Cousquer, la construction des réels par les suites de Cauchy n'est pas à la portée des étudiants, celle de Dedekind, elle, ne présente aucune difficulté théorique.

Mais ne faudrait-il pas, avant tout, en montrer la nécessité ? sinon elle risque d'apparaître comme inutile et arbitraire.

Au moins deux voies permettent la sensibilisation des étudiants à la nécessité de cette construction. L'une passe par une liste des propriétés du continu numérique intuitivement admises mais non fondées. L'autre pourrait être l'étude d'un moment historique que l'enseignant trouverait particulièrement significatif.

Nous avons voulu dans cet atelier montré deux de ces moments. L'un, la théorie des proportions par Eudoxe restera pendant plus de deux mille ans la seule référence rigoureuse concernant la mesure. L'autre, la description du continu par Aristote, est le point de départ d'une longue réflexion d'ordre qualitatif sur le continu : comment concilier la densité (l'infinie divisibilité), l'ordre entre les parties (la consécution), et la connexité (la fusion des limites des parties consécutives). La théorie des ensembles permettra de surmonter ces

---

42 Poincaré ; *La science et l'hypothèse* p.54.

difficultés et donnera aux mathématiciens du XX^e siècle un continu topologiquement bien défini et coupé de ses racines empiriques.

Textes lus à l'atelier

Aristote : *Physique* Livre V, 3 et Livre VI, 1 jusqu'à 231 b, 18.
Euclide : *Eléments* ; Livre V, Définitions de 1 à 8 et Livre X propositions 1 et 2.

ARISTOTE . Physique . Livre VI

LIVRE VI

3
[Consécutivité - Contiguïté - Continuité]

18 Après cela, il faut dire ce que c'est qu'être ensemble et être séparé, ce que c'est qu'être en contact, intermédiaire, consécutif, contigu, continu, et à quelles sortes d'êtres chacune de ces qualités appartient naturellement.

Simultanéité

21 *Ensemble* se dit selon le lieu de toutes les choses qui sont dans un lieu unique immédiat ; *séparé*, quand les lieux sont différents.

Contact

23 Sont *en contact* les choses dont les extrémités sont ensemble.

Est *intermédiaire* le terme où ce qui change d'une façon continue et conforme à la nature parvient naturellement avant d'atteindre le terme extrême vers lequel se fait le changement. L'intermédiaire suppose au moins trois choses : d'une part, en effet, le contraire est l'extrémité du changement ; d'autre part, se meut d'une façon continue ce qui ne présente pas, ou très peu, de lacune quant à la chose, non pas quant au temps (rien n'empêche en effet qu'il y ait lacune quant aux choses, si par contre, aussitôt après la note la plus haute, on donne la basse), plutôt quant à la chose comme domaine du mouvement. On le
226 b voit dans le mouvement selon le lieu et dans les autres[1]. D'autre part, le contraire selon le lieu est ce qui est à la plus grande distance en ligne droite, car la plus courte ligne s'est laissé déterminer et le déterminé est [*pour le reste*]la mesure.

Consécutivité

34 Est *consécutif* ce qui, venant simplement après le commencement et déterminé ainsi par la position ou par la propriété ou autrement, n'est séparé de la chose avec laquelle il y a consécution par aucun in-
227 a termédiaire du même genre. J'entends comme une ligne ou des lignes après une ligne, une unité ou des unités après une unité, une maison après une maison, sans que rien empêche qu'il y ait une chose autre à titre d'intermédiaire[1]. Car ce qui est consécutif est consécutif à une certaine chose et est une certaine chose qui est postérieure ; en effet un n'est pas consécutif à deux, ni le premier jour du mois au second, mais l'inverse.

Contiguïté

6 Contigu est ce qui, étant consécutif, est en outre en contact. Mais, comme tout changement suppose une opposition et que l'opposition est ou contrariété, ou contradiction, comme d'autre part les contradictoires n'admettent pas de milieu, c'est dans les contraires, on le voit, que sera l'intermédiaire[2].

Continuité

10 Le continu est dans le genre du contigu ; je dis qu'il y a continuité, quand les

limites par où les deux choses se touchent ne sont qu'une seule et même chose, et, comme l'indique le nom, tiennent ensemble ; or cela ne peut peut se produire quand les extrémités sont deux. Une telle définition montre que le continu se trouve dans les choses dont la nature est de ne faire qu'une lorsqu'elles sont en contact. Et l'unité du tout sera celle du facteur éventuel de continuïté, comme le clouage, le collage, l'assemblage, la greffe.

Hiérarchie de ces notions

17 On voit d'autre part que c'est le consécutif qui est premier, car tout ce qui est en contact est consécutif, mais tout ce qui est consécutif n'est pas en contact : c'est pourquoi le consécutif se rencontre dans des chooses qui sont antérieures logiquement, comme les nombres, mais non pas le contact. De même la continuité implique nécessairement le contact, mais le contact ne fait pas encore la continuité ; car les extrémités peuvent bien être ensemble sans être forcément une, mais, si elles sont une, elles sont forcément ensemble. Par suite, la symphyse est postérieure quant à la génération, car la symphyse des extrêmes exige leur contact, tandis que les choses en contact ne sont pas naturellement toute en symphyse[1], et là, où il n'y a pas contact, il n'y a évidemment pas non plus symphyse. Par suite, si le point et l'unité sont, comme on le dit, séparés[2], le point et l'unité ne peuvent être identiques ; aux uns en effet appartient le contact, tandis qu'aux unités c'est le consécutif ; les premiers peuvent avoir un intermédiaire (toute ligne est intermédiaire entre deux points), les autres non, vu qu'il n'y a pas d'intermédiaires entre deux et un.

32 Ce que c'est qu'être ensemble, separé, en contact, intermédiaire, consécutif, contigu, continu, et aussi à quelle sorte de choses chacune de ces qualifications appartient, on l'a dit.

ARISTOTE . Physique . Livre VI

LIVRE VI

1
[La composition du continu]

231 a *La ligne n'est pas composée d'indivisibles.*

21 Si la continuité, le contact, la consécutivité obéissent aux définitions précédentes le continu est ce dont les extrémités sont une seule chose ; le contact est entre ce dont les extrémités sont ensemble ; le consécutif est ce entre quoi il n'y a aucun intermédiaire du même genre), il est impossible qu'un continu soit formé d'indivisibles, par exemple qu'une ligne soit formée de points, s'il est vrai que la ligne soit un continu et le point, un indivisible. 26 En effet, on ne peut dire que les extrémités des points font un, puisque pour l'indivisible il n'existe pas une extrémité qui serait distincte d'une autre partie ; ni que les extrémités sont ensemble, car il n'y a rien dans une chose sans parties qui soit une extrémité, puisque l'extrémité est distincte de ce dont c'est l'extrémité[1].

29 En outre, il faudrait alors que les points dont serait fait le continu fussent, ou en continuité, ou en contact réciproque ; même raisonnement pour tous les indivisibles. Or ils ne peu-
231 b vent être continus, d'après ce qu'on vient de dire, et, quant au contact, il faut qu'il ait lieu, soit du tout au tout, soit de la partie à la partie, soit de la partie au tout ; mais, l'indivisible étant sans parties, ce sera forcément du tout au tout ; or le contact du tout au tout ne fera point une continuité, car le continu a des parties étrangères les unes aux autres et il se divise en parties qui se distinguent de cette façon, c'est-à-dire qui seront séparées quant au lieu.

6 Maintenant, il n'y aura pas plus de consécution entre un point et un point, un instant et un instant, de façon à en faire la longueur ou le temps. En effet, sont consécutives les choses entre lesquelles il n'y a aucun intermédiaire du même genre, tandis que, pour des points, l'intermédiaire est toujours une ligne, pour des instants, un temps[1]. Ajoutons que le continu serait divisible en indivisibles, s'il est vrai que chacun des deux doive se diviser en ce dont il est composé. Mais nul continu n'est divisible en choses sans parties.

12 D'autre part, il n'est pas possible qu'entre les points et les instants il y ait aucun intermédiaire d'un genre différent ; un tel intermédiaire en effet sera évidemment, s'il existe, ou bien indivisible, ou bien divisible, et, s'il est divisible, ce sera, ou bien en indivisibles, ou bien en parties toujours divisibles ; or c'est là le continu. 15 Mais il est clair que tout continu est divisible en parties qui sont toujours divisibles ; si en effet c'était en indivisibles, il y aurait contact d'indivisibles à indivisibles ; en effet dans les continus, si l'extrémité est une, il y a aussi contact.

LE CINQUIÈME LIVRE
DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE.

DÉFINITIONS.

1. Une grandeur est partie d'une grandeur, la plus petite de la plus grande, quand la plus petite mesure la plus grande.

2. Une grandeur plus grande est multiple d'une grandeur plus petite, quand la plus grande est mesurée par la plus petite.

3. Une raison, est certaine manière d'être de deux grandeurs homogènes entr'elles, suivant la quantité.

4. Une proportion est une identité de raisons.

5. Des grandeurs sont dites avoir une raison entr'elles, lorsque ces grandeurs, étant multipliées, peuvent se surpasser mutuellement.

6. Des grandeurs sont dites être en même raison, la première à la seconde, et la troisième à la quatrième, lorsque des équimultiples quelconques de la première et de la troisième, et d'autres équimultiples quelconques de la seconde et de la quatrième sont tels, que les premiers équimultiples surpassent, chacun à chacun, les seconds équimultiples, ou leur sont égaux à la fois, ou plus petits à la fois.

7. Les grandeurs qui ont la même raison sont dites proportionnelles.

8. Lorsque, parmi ces équimultiples, un multiple de la première surpasse un multiple de la seconde, et qu'un multiple de la troisième ne surpasse pas un multiple de la quatrième, on dit alors que la première a avec la seconde une plus grande raison que la troisième avec la quatrième.

Bibliographie

ARISTOTE *Métaphysique* tome 1 et 2. Edition Vrin 1986.
Organon I Catégories. Edition Vrin 1989.
Physique tome1 et 2. Les Belles Lettres 1986.
Traité du ciel. Edition Vrin 1949.

AVICENNE *Métaphysique du Shifa*. Tome 1. Edition Vrin 1978.

BADIOU Alain *Le Nombre et les nombres*. Seuil 1990.

BKOUCHE Rudolf *Autour du théorème de Thalès*. IREM de Lille 1994.

BOLZANO Bernard *Les paradoxes de l'infini*. Editions du Seuil 1993.

COUSQUER Eliane *De la Théorie des proportions à la Théorie des Nombres Réels*. Brochure de l'I.R.E.M. de Lille de 1995.

DHOMBRES Jean *Nombre, mesure et continu*. Cedic/Nathan 1978.

EUCLIDE Les oeuvres d'Euclide traduites par Peyrard. Blanchard 1993.

GARDIES Jean-Louis *Pascal entre Eudoxe et Cantor*. Edition Vrin 1984.

GRANGER Gaston-Gilles *Le concept de continu chez Aristote et Bolzano*. Etudes philosophiques, 1969.
La théorie aristotélicienne de la science ; Aubier 1976.

LEBESGUE Henri *La mesure des grandeurs*. Blanchard 1975.

MINOIS Georges *L'église et la science*. Fayard 1990.

POINCARE Henri *La science et l'hypothèse*. Champs Flammarion 1989.

ROBIN.L. *La théorie platonicienne des Idées et des nombres d'après Aristote, étude historique et critique*, Paris, 1923.

SALANSKIS J.M. et SINACEUR H. *Le labyrinthe du continu* ; Colloque de Cerisy. Springer-Verlag 1992.