# Activités en classe à partir de textes historiques sur l'irrationalité : de Pythagore a Théon de Smyrne

*Denis DAUMAS.*

En classe de Quatrième on commence à utiliser la touche $\sqrt{\quad}$ de la calculatrice, les radicaux (racines carrées) sont abordés en classe de Troisième où l'objectif est la connaissance des règles élémentaires de calcul sur les radicaux, le mot "irrationnel" ne figure pas dans le programme officiel. Lorsqu'on interroge des élèves de Seconde, il semble que le modèle numérique des décimaux, qui s'est imposé à partir de la fin de l'école primaire, ne soit pas fondamentalement affecté par la présence de fractions non décimales puis par l'introduction des racines carrées. Ce modèle, que l'on pourrait qualifier de "décimaux discrets" dans la mesure où le nombre des décimales est très limité ( au plus celles que fournissent les calculettes), ne semble pas non plus très perturbé par l'introduction de l'analyse et du calcul infinitésimal en classes de Première et de Terminale.

Construire l'ensemble des nombres réels n'est certainement pas un préalable et la correspondance entre les nombres réels et les points d'une droite graduée donne une intuition largement suffisante pour démarrer l'enseignement de l'Analyse. L'Histoire elle même le confirme : l'ensemble des nombres réels n'est construit qu'à la fin du XIX$^{e}$ siècle, à un moment où l'Analyse a atteint un stade qui dépasse largement les objectifs des programmes actuels des Lycées.

Le champ conceptuel formé par ces nombres (décimaux / discret) et ces réels (grandeurs / continu) n'est d'ailleurs pas très éloigné de celui des *Éléments* d'Euclide. L'Histoire ne se répète pas, en particulier au cours des processus d'apprentissage, mais on peut penser que l'intrusion dans ce champ conceptuel de la mesure des grandeurs et en particulier de l'incommensurabilité, à partir de textes historiques de l'Antiquité, peut apporter un éclairage intéressant sur bien des points : à commencer par l'expression "racine carrée" et sa connotation géométrique, la notion de valeur approchée et comment des algorithmes peuvent nous les fournir, la proportionnalité et la recherche de la moyenne proportionnelle (géométrique), pour terminer avec les suites et leur convergence.

Si faire étudier en classe des textes tirés de l'Histoire des Mathématiques peut aider nos élèves à surmonter certaines difficultés ou à prendre conscience de problèmes liés à telle ou telle notion du programme, cela peut justifier ce choix, mais il y a d'autres raisons qui peuvent amener l'enseignant de Mathématiques à proposer de tels documents à ses élèves. Par exemple mettre en évidence le rôle des problèmes, ici la recherche d'une commune mesure entre la diagonale et le côté d'un carré, dans la construction des savoirs mathématiques, ou encore prendre conscience de l'hétérogénéité des styles, des préoccupations de différents mathématiciens, autre raison enfin, et ce n'est pas la moindre, inscrire l'activité des mathématiciens dans le contexte social et culturel de leur époque.

C'est dans cet esprit qu'ont été élaborées les sept activités regroupées dans le document sur lequel ont travaillé les participants à l'atelier. Il serait trop long de présenter en détail ces activités et les commentaires qui accompagnent les différents textes, aussi nous contenterons-nous de les présenter rapidement. Une édition complète de ces activités est en préparation, elle doit paraître en 1996 sous forme d'une brochure portant le même titre que cet atelier, à l'I.R.E.M. de Toulouse.

Mais avant d'aborder les activités, il est nécessaire de situer historiquement les sources utilisées et de donner des éléments qui permettent de voir quelle a été leur postérité.

## Présentation historique.

Remontons aux débuts de l'Histoire, c'est-à-dire à l'apparition de l'écriture, et notons que les premières tablettes écrites entre le Tigre et l'Euphrate, ou dans la région de Suse, contiennent des symboles numériques et sont des documents comptables. Ces nombres sont aussi bien les résultats de dénombrements que de mesures. Autrement dit, les protagonistes de notre sujet (commensurabilité et incommensurabilité) sont présents : nombres, grandeurs et mesure.

Cette mesure, qui consiste à partager une grandeur donnée en parties aliquotes[1], se heurte nécessairement à des difficultés. Certaines peuvent être surmontées par le recours à des unités différentes, ou par l'utilisation d'un système de numération qui permet d'exprimer commodément certains partages (système sexagésimal pour les Babyloniens, quantièmes[2] pour les Égyptiens). Il n'en demeure pas moins que les résultats exacts de certaines divisions ne peuvent pas être donnés de manière finie dans un système sexagésimal ( 2 divisé par 7, par exemple), et que certaines mesures ne peuvent se faire exactement pour des raisons que nous pouvons relier aujourd'hui à l'incommensurabilité. De nombreuses tablettes Babyloniennes témoignent de ces difficultés, certaines relèvent de l'incommensurabilité (nous en avons choisi deux dans la première activité), mais rien ne permet d'affirmer que les Babyloniens distinguaient ces deux types de difficultés, aussi nous garderons-nous de faire remonter si loin la conscience de l'impossibilité de trouver une commune mesure entre la diagonale et le côté d'un carré.

### Les racines Pythagoriciennes de l'incommensurabilité.

Les témoignages les plus anciens sont à notre connaissance dans l'œuvre de Platon. Nous travaillerons sur un passage du *Ménon* [3] (écrit vers 380 avant notre ère) où Socrate demande à un jeune esclave de donner le côté d'un carré d'aire

1 Une partie aliquote d'une grandeur est une partie contenue un nombre entier de fois dans cette grandeur.

2 Les Egyptiens ne connaissaient pas les fractions mais avaient des symboles pour noter les partages de l'unité en 2, 3, ..., n parties égales. Les quantièmes correspondent aux fractions de la forme $\frac{1}{n}$.

3 Platon, 1991, *Ménon*, traduit par M. Canto-Sperber, Garnier-Flammarion, Paris.

double de celle d'un carré de deux pieds de côté. Dans ce passage le problème de l'incommensurabilité de la diagonale et du côté d'un carré est clairement posé. Dans un autre dialogue, *Théétète* [4] (rédigé vers 368 avant notre ère), les deux interlocuteurs de Socrate, Théétète et Théodore, sont mathématiciens. Platon attribue à Théodore (Théodore de Cyrène / 460-369 avant notre ère) l'élaboration de preuves d'irrationalité pour les racines des nombres non carrés de 3 à 17. Théétète (410-369), élève de Théodore, évoque dans ce dialogue ses propres travaux de classification des grandeurs irrationnelles[5]. Nous retiendrons de ces témoignages qu'à l'époque de Platon l'incommensurabilité a déjà droit de cité dans les mathématiques et que le "cas de $\sqrt{2}$" est depuis longtemps réglé.

Cela confirme les multiples témoignages indirects qui font remonter aux premiers Pythagoriciens la découverte de l'incommensurabilité de la diagonale et du côté d'un carré. D'après ces mêmes témoignages, cette découverte aurait déclenché dans le système philosophique Pythagoricien – qui reposait sur les nombres entiers – une profonde crise, avec tempête, naufrage et châtiment divin pour le malheureux qui avait osé la divulguer.

Au-delà de la crise du Pythagorisme, cette découverte a été un véritable défi pour les mathématiciens. Aussi petite soit-elle, aucune partie aliquote du côté ne mesure la diagonale d'un carré. Mais il n'y a pas de partie d'une grandeur plus petite que toutes les autres, l'incommensurabilité est donc liée à l'infini. Comment les mathématiciens Grecs ont-il pu se conformer à la réponse d'Aristote aux paradoxes de Zénon c'est-à-dire laisser l'infini en acte[6] à l'écart ? Comment établir la proportionnalité de grandeurs incommensurables sans passer par les rapports numériques ? En pratique, comment terminer un calcul lorsqu'on est confronté à l'irrationalité ? Même si les mathématiciens Grecs n'ont pu prouver l'irrationalité de certains rapports, celui de "$\pi$" par exemple[7], ils ont su donner à ces questions des réponses qui sont toujours des références.

## L'irrationalité dans les Mathématiques Grecques

À l'exception de l'incommensurabilité de la diagonale et du côté d'un carré dont la démonstration est évoquée par Aristote quand il aborde le raisonnement par l'absurde[8], ou, pour le même cas, d'un ajout (scholie) au Livre X des *Éléments* d'Euclide[9], on ne trouve guère de preuves particulières d'incommensurabilité dans les ouvrages Grecs qui nous sont parvenus. Euclide donne par contre, toujours au Livre X, une preuve générale d'incommensurabilité :

---

4 Platon, 1967, *Théétète*, traduit par E. Chambry, Garnier-Flammarion, Paris.

5 Cette classification figure au Livre X des *Éléments* d'Euclide.

6 Aristote faisait la différence entre "l'infini actuel", réalisé, comme dans l'affirmation qu'un segment partagé à l'infini donne un point, et "l'infini potentiel", possibilité d'aller toujours plus loin, comme dans l'affirmation qu'il est toujours possible de partager un segment. Seul "l'infini potentiel" a droit de cité dans les mathématiques grecques.

7 Actuellement encore les mathématiciens sont en échec devant d'autres cas, celui de la constante d'Euler par exemple.

8 Aristote, 1983, *Organon III, Les premiers analytiques*, traduction par Jean Tricot, , Vrin, Paris, pages 121-122.

9 Peyrard 1819, *Les Œuvres d'Euclide*, réédition Blanchard, 1966, Paris, pages 292-293.

*"(...) les quarrés des droites qui ne sont pas commensurables en longueur, n'ont pas entr'eux la raison qu'un nombre quarré a avec un nombre quarré ; les quarrés qui n'ont pas entr'eux la raison qu'un nombre quarré a avec un nombre quarré, n'ont pas leurs côtés commensurables en longueur.* [10]

Nous dirions aujourd'hui que les racines carrées (nous avons conservé la connotation géométrique) des nombres qui ne sont pas des carrés (d'entiers ou de rationnels) sont irrationnelles. Euclide emploie également le terme "irrationnel", mais il l'applique à des grandeurs, les nombres étant uniquement des entiers dans les mathématiques grecques. Le qualificatif de rationnel ou d'irrationnel appliqué à des grandeurs conserve le caractère relatif de la commensurabilité ou de l'incommensurabilité qu'il perd complètement quand nous l'appliquons aujourd'hui à des nombres. Par ailleurs, certaines grandeurs irrationnelles pour nous sont rationnelles pour Euclide. En effet, le terme "irrationnel" n'est pas lié seulement à l'incommensurabilité, il contient aussi l'idée d'inexprimable. Or la commensurabilité des aires (commensurabilité "en puissance") permet d'exprimer indirectement le rapport des côtés qui ne sont pas alors qualifiés d'irrationnels. Ne sont "irrationnelles" que des grandeurs incommensurables, y compris en puissance, à une grandeur de référence. L'essentiel du Livre X est consacré à construire et à classer des grandeurs irrationnelles[11] : on peut citer les "binômes" que nous noterions $\sqrt{a} + \sqrt{b}$ , les "apotomes" qui correspondent à $\sqrt{a} - \sqrt{b}$ , les "médiales" à $\sqrt{\sqrt{a}}$ , et bien d'autres catégories ou sous-catégories.

Auparavant, tout au début du Livre X, Euclide fournit une autre voie pour prouver l'incommensurabilité de deux grandeurs : celle de "l'algorithme d'Euclide". L'outil est ce que nous appelons la "division euclidienne", qui consiste à retrancher autant de fois que possible une grandeur A d'une grandeur B, plus grande. Soit A est contenue un nombre entier de fois dans B et A mesure alors B, soit il y a un reste que l'on retranche à son tour autant de fois que possible de B, avec la même alternative que précédemment, et ainsi de suite. Cet algorithme, où l'on retranche les restes successifs des précédents[12], ne s'arrête que lorsqu'un reste "mesure" le précédent, ce dernier reste est alors la plus grande commune mesure de A et de B. Mais il peut se poursuivre indéfiniment, et l'algorithme fournit alors une preuve d'incommensurabilité :

*"Deux grandeurs inégales étant proposées, et si la plus petite étant toujours retranchée de la plus grande, le reste ne*

---

10 C'est la neuvième proposition du Livre X. Peyrard, opus cité note 9, page 266. La rigueur de cette proposition est discutée : elle ne respecte pas l'étanchéité parfaite jusque là entre ce qui concerne les nombres et ce qui concerne les grandeurs géométriques.

11 Selon le témoignage précité de Platon, cette classification serait dûe à Théétète.

12 Un reste est ainsi alternativement ce que l'on retranche et ce qui est retranché d'où le nom d'"anthyphérèse", construit d'après le terme utilisé par Euclide (littéralement : soustractions alternées) que l'on donne parfois à cet algorithme.

> *mesure jamais le reste précédent, ces grandeurs seront incommensurables.* [13]

Comment arrive-t-on à prouver que jamais un reste ne mesure le précédent ? Même s'il est évoqué par d'autres auteurs grecs, nous ne connaissons pas de source grecque où cet algorithme est mis en œuvre pour prouver l'incommensurabilité de deux grandeurs. Nous proposons, en exercice des reconstitutions possibles dans le cas de la diagonale et du côté d'un carré, puis d'un pentagone. Dans ces cas, la poursuite indéfinie de l'algorithme est assurée grâce à un cycle : après un certain nombre de soustractions, on se retrouve en présence de la diagonale et du côté d'un nouveau carré ou d'un nouveau pentagone. Interrompre l'algorithme revient à considérer un reste comme négligeable, et on obtient alors, avec les quotients successifs, une approximation du rapport des grandeurs par un rapport de nombres. Mais ni la recherche de preuves particulières d'incommensurabilité, ni la recherche d'approximations numériques ne sont des préoccupations d'Euclide, ses *Éléments* sont un ouvrage de théorie[14] mathématique. On trouvera dans certaines activités proposées d'autres algorithmes mis en œuvre par les Grecs pour obtenir des valeurs approchées de rapports irrationnels ( tirés d'écrits de Héron d'Alexandrie et de Théon de Smyrne ). Cependant il y avait une retombée théorique possible dans l'utilisation de l'algorithme d'Euclide : identifier les rapports de nombres ou de grandeurs grâce à l'identité des quotients (même en nombre indéfini) des divisions euclidiennes successives. Cette possibilité, évoquée par Aristote[15], et qui peut justifier la place accordée à cet algorithme dans les *Éléments*, n'est pas celle qui a été retenue par Euclide.

Il est nécessaire de rentrer dans les détails des définitions euclidienne pour en saisir vraiment la portée. C'est le but d'une des activités proposées. Dans cette introduction nous voulons évoquer le rôle qu'elles ont joué dans les mathématiques grecques et bien au delà, jusqu'au XIXe siècle.Il nous faut donc les présenter succintement.

Commençons par les nombres : pour aller vite, interprétons la définition d'Euclide[16] en disant que quatre nombres $A, B, C, D$ sont, dans cet ordre, proportionnels (ou que $\frac{A}{B} = \frac{C}{D}$) si et seulement si, il existe au moins deux nombres $m$ et $n$ ( les "nombres" sont, pour les Grecs, les entiers naturels non nuls et différents de 1) tels que, $A = m\,B$ et $C = m\,D$, ou, $n\,A = B$ et $n\,C = D$, ou, $n\,A = m\,B$ et $n\,C = m\,D$. Il y a toujours un nombre ou l'unité pour "mesurer" à la fois deux nombres $A$ et $B$, quels qu'ils soient, il existe donc toujours au moins deux nombres $m$ et $n$ tels que : $A = m\,B$ ou $n\,A = B$ ou

---

13 C'est la deuxième proposition du Livre X, Peyrard, opus cité note 9, page 259.

14 Les Grecs séparaient la théorie à laquelle s'appliquait le terme "mathématique" et le calcul, qui relevait de la "logistique".

15 Voir à ce sujet, Gardies, J-L., 1988, *L'héritage épistémologique d'Eudoxe de Cnide*, Vrin, Paris, page 22

16 Les Livres arithmétiques sont les Livres VII à IX. La définition qui est interprétée ici est la définition 21 du Livre VII. Voir Vitrac, B., 1995, *Les Éléments d'Euclide*, tome 2, P.U.F., Paris, pages 262 à 267.

$nA = mB$, ce qui permet d'envisager une telle définition de la proportionnalité des nombres.

Pour les grandeurs il n'en est pas de même, puisque deux grandeurs peuvent être incommensurables, et Euclide est contraint de donner une définition différente de la proportionnalité des grandeurs. Interprétons également la définition d'Euclide : quatre grandeurs A, B, C, D, sont dans cet ordre proportionnelles si et seulement si pour tous nombres m et n,

$$nA < mB \text{ et } nC < mD, \quad \text{ou,} \quad nA = mB \text{ et } nC = mD,$$
$$\text{ou, } nA > mB \text{ et } nC > mD.$$ [17]

Cette façon de procéder marque la rupture entre la théorie des nombres (arithmétique) et la théorie des grandeurs, et l'étanchéité est telle que dans les *Éléments* d'Euclide, les propriétés de la proportionnalité sont systématiquement démontrées pour les nombres, même lorsqu'elles sont analogues à celles qui ont été établies pour les grandeurs.

**Des Grecs à nos jours**

A la suite des Grecs, les Arabes vont poursuivre la recherche d'algorithmes qui permettent d'avoir des approximations de rapports irrationnels. Mais leurs pratiques algébriques, qui leur permettent de traiter indifféremment nombres et grandeurs, vont les éloigner de l'orthodoxie euclidienne où nombres et grandeurs ne relèvent pas des mêmes théories. Pourtant, ils ne remettront guère en cause les définitions euclidiennes, à l'exception de quelques auteurs comme Omar Khayyam qui définit de la même façon les rapports de nombres et les rapports de grandeurs en revenant à l'anthyphérèse mentionnée par Euclide. Omar Khayyam va d'ailleurs encore plus loin en rattachant ces rapports, rationnels ou non, à la catégorie des nombres :

> [ce rapport est conçu]"*non comme une ligne, une surface, un corps ou un temps, mais comme une grandeur que l'esprit abstrait de tout et qui appartient aux nombres...*"[18]

Les algébristes de la Renaissance vont traiter de la même manière les nombres et les grandeurs, la catégorie de nombre va être progressivement associée à celle des grandeurs et de leurs rapports. Nous pouvons citer Simon Stevin :

> " *Définition 2. Nombre est cela, par lequel s'explique la quantité de chaque chose.*
> *Explication. Comme l'unité est nombre par lequel la quantité d'une chose expliquée se dit un : et deux par lequel on la*

17 Les Livres consacrés à la proportionnalité des grandeurs sont les Livres V et VI, le Livre X étant consacré à l'irrationalité. La définition interprétée ici est la définition 5 du Livre V. Voir Vitrac, B., opus cité, pages 41 à 46.

18 Youschkevitch A., 1976, *Les mathématiques arabes*, Traduit par M. Cazenave et K. Jaouiche, Vrin, Paris, page 88.

> *nomme deux : et demi par lequel on l'appelle demi : et racine de trois par lequel on la nomme racine de trois, &c. "*[19]

Stevin polémique durement contre ceux qui ont fait de l'unité le principe des nombres :

> *"..., car vu que la communauté & similitude de grandeur & nombre est si universelle qu'il ressemble quasi identité, sans doute le nombre aura quelque chose en soi, qui se réfère au point. Mais que sera ce ? Ils disent l'unité : O heure infortunée en laquelle fut produite cette définition du principe du nombre ! O cause de difficulté & d'obscurité de ce qui en la Nature est facile & clair ! [...] Je dis que c'est 0 (qui se dit vulgairement Nul [...] ) ce que ne témoignent pas seulement leurs parfaites & générales communautés, mais aussi les irréfutables effets. "*[20]

En fondant les nombres sur le 0, Stevin peut conférer aux nombres les mêmes qualités qu'aux grandeurs, en particulier le continu. Toutefois, on ne les traite pas globalement et on distingue encore longtemps les nombres entiers des nombres "rompus" (fractions), des nombres " sourds" (irrationnels), des quantités " fausses" (négatifs) ou " imaginaires" (complexes). Les contraintes géométriques ne disparaissent pas pour autant et, jusqu'à la fin du XVII^e^ siècle, on respecte l'homogénéité des grandeurs pour les additionner, comme, par exemple, lorsqu'on transforme a (longueur) en $1\times a$ (surface) pour pouvoir l'additionner à $a^2$ (surface).

Les questions théoriques ne sont pas absentes (on a vu comment Stévin donnait 0 comme principe fondateur des nombres), mais leur fonction est de remettre en cause des schémas qui sont devenus gênants. En ce qui concerne la définition des rapports irrationnels, les définitions euclidiennes sont dépassées et perdent de leur sens, mais les propriétés communes des rapports de nombres et des rapports de grandeurs permettent de travailler et peu nombreux seront, pendant longtemps, les mathématiciens qui tenteront de redéfinir ces rapports. Une des rares tentatives est celle d'Antoine Arnauld[21], qui trouve les *Éléments* d'Euclide *" confus & brouillés"*. Mais il a beau accumuler les axiomes et invoquer ses méthodes *" plus nettes et plus naturelles"*, sa présentation n'est guère satisfaisante. Il le reconnaîtra lui-même quelques années plus tard.

A la fin du XVII^e^ et au cours du XVIII^e^ siècle, on redécouvre l'algorithme d'Euclide et on enrichit la méthode euclidienne par l'utilisation des quotients successifs pour développer les irrationnels en fractions continues. Citons par

19 Stevin S., 1535, *Arithmétique,* fac-similé partiel de l'édition de 1634 in Mnémosyne n°9, Janvier 1995, Université Denis Diderot, Paris VII, page 6.

20 Ibid. pages 9 et 10.

21 Arnauld, A., 1667, *Nouveaux Èlémens de Géométrie,* fac similé par l'IREM de Dijon.

exemple Lord Brouncker ( 1620-1684 ) qui donne $\frac{\pi}{4} = \cfrac{1}{1+\cfrac{1^2}{2+\cfrac{3^2}{2+\cfrac{5^2}{2+\cdots}}}}$

Fondant la théorie des fractions continues, Euler (1707-1783) démontre qu'une fraction continue périodique ( par exemple $\sqrt{2} = \cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\cdots}}}}$ ) est solution d'une équation du second degré à cœfficients entiers. Lagrange (1736-1813) démontre la réciproque. Cette théorie des fractions continues se révèle particulièrement productive, Euler s'en sert pour prouver l'irrationalité de e, elle fournit à Lambert (1728-1777) le départ de sa démonstration de l'irrationalité de π, c'est également une généralisation de la notion de fraction continue qui permet à Hermite (1822-1901) de prouver la transcendance de e, puis à Lindemann (1852-1939) celle de π.

Les problèmes de fondement théorique vont réapparaître au milieu du XIX$^{e}$ siècle. Jusque là on s'est contenté d'une intuition géométrique des nombres réels (la droite) pour développer l'Analyse. Mais la continuité et ses conséquences (théorème des valeurs intermédiaires, calcul différentiel et intégral) rendent le concept plus complexe et le recours à l'intuition géométrique est remis en question par tout un courant de mathématiciens qui estime que des fondements arithmétiques seraient plus solides.

Dès 1817, Bolzano (1781-1848) refuse les épreuves géométriques de ce que l'on nomme aujourd'hui le "théorème des valeurs intermédiaires" :

> *"Il n'y a absolument rien à objecter ni contre la justesse ni contre l'évidence de ce théorème géométrique. Mais il y a là une faute intolérable contre la bonne méthode qui consiste à vouloir déduire les vérités des mathématiques pures (ou générales) (c'est-à-dire de l'arithmétique, de l'algèbre ou de l'analyse) des considérations qui appartiennent à une partie appliquée (ou spéciale) seule, à savoir la géométrie."* [22]

En France Meray (1835-1911), en Allemagne l'école de Weierstrass : Cantor (1845-1918) et Heine (1821-1881), s'appuient sur les suites de Cauchy de rationnels pour définir les nombres réels. Dedekind (1831-1916) voit dans les définitions du Livre V des *Éléments* d'Euclide les " coupures" de l'ensemble des rationnels qui lui servent à construire les nombres réels.

---

22 Bolzano B., 1817, *Démonstration purement analytique du théorème : entre deux valeurs quelqonques qui donnent deux résultats de signes opposés se trouve au moins une racine réelle de l'équation*, traduit par Sébasteli, J., in Revue Française d'Histoire des Sciences, 1964. L'extrait cité se trouve dans Dhombres, J., et alii, 1987, *Mathématiques au fil des âges*, p 206.

Pour terminer sur une note contemporaine, signalons qu'il y a toujours des mathématiciens qui travaillent sur l'irrationalité : Roger Apéry[23] a prouvé en 1978 l'irrationalité de $\zeta(3)$, c'est-à-dire de $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3}$. On ne sait toujours pas développer $\pi$ en fraction continue simple, de la forme $\cfrac{1}{a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cdots}}}$.

## Les activités.

La première est consacrée à l'étude de deux tablettes datant de l'Ancien Âge Babylonien (environ dix-huit siècles avant notre ère). Après une rapide initiation au système de numération sexagésimal, on découvre sur la première tablette une excellente approximation de $\sqrt{2}$, et sur la seconde une recette, parfois appelée "algorithme de Babylone", pour obtenir une valeur approchée d'une racine carrée. Cette activité est également l'occasion d'une réflexion sur les méthodes de l'interprétation historique.

La seconde est une lecture suivie d'un passage du *Ménon* de Platon (quatrième siècle avant notre ère) où Socrate demande à un jeune esclave quel est le côté d'un carré d'aire double de celle d'un carré donné. Dans ce passage, Platon oppose l'impasse arithmétique et la simplicité d'une solution géométrique et met ainsi en relief le problème de fond, celui de l'incommensurabilité. Ce texte a un intérêt historique important car c'est le plus ancien témoignage que nous connaissons sur ce sujet. Il permet aussi, même s'il n'y a dans ce passage aucune démonstration mathématique, une prise de contact avec le contexte mathématique grec. Il peut être l'occasion d'une activité interdisciplinaire dans la mesure où l'enjeu philosophique (la théorie de la connaissance de Platon) est au centre du passage étudié.

La troisième est centrée sur un essai de reconstitution de la première démonstration d'incommensurabilité, attribuée aux premiers Pythagoriciens (cinquième siècle avant note ère). La méthode est celle d'une démonstration par l'absurde, le ressort est l'opposition pair/impair et les documents sont un passage des *Premiers Analytiques* d'Aristote[24] et un scholie aux *Éléments* d'Euclide que Peyrard publie comme 117ème et dernière proposition du Livre X.[25] Cette activité se prolonge par des exercices inspirés par une idée de Jean Itard : partant d'une propriété des nombres figurés pythagoriciens, il s'agit d'appliquer la même méthode à d'autres cas d'irrationalité. Cela donne des résultats, mais dans certains cas, c'est l'impasse.

---

23 Voir Mendès-France M., 1979, *Roger Apéry et l'irrationnel,* La Recherche n°97, Février 1979, pages 170-172.

24 Aristote,1983, *Orgnon III, Les premiers analytiques,* traduit par J. Tricot, Vrin, Paris, , pages 121-122.

25 Peyrard, opus cité note 9, pages 292-293.

Après Pythagore, Euclide (troisième siècle avant notre ère). La quatrième activité revient sur la mesure, qu'Euclide applique aussi bien aux nombres qu'aux grandeurs géométriques. Après avoir vu comment la division euclidienne permet d'obtenir le plus grand diviseur commun de deux nombres selon une méthode parfois appelée "algorithme d'Euclide" ou "anthyphérèse", on découvre qu'appliqué à deux grandeurs, le même algorithme peut parfois se poursuivre indéfiniment. Euclide démontre que ce cas caractérise deux grandeurs incommensurables. Ce critère n'est pas mis en pratique par Euclide, aussi deux exercices complètent l'activité en proposant de démontrer l'incommensurabilité de la diagonale et du côté d'un carré, puis d'un pentagone, en utilisant la méthode euclidienne. L'activité se prolonge par une application de l'algorithme d'Euclide, développée à partir du XVII^e^ siècle : les fractions continues.

La cinquième est centrée sur un passage des *Métriques* de Héron d'Alexandrie[26] (premier siècle de notre ère). C'est dans ce texte que Héron donne, sur un exemple, sa méthode pour calculer des valeurs approchées successives de racines carrées. On peut démontrer que les algorithmes de Héron et de Babylone donnent les mêmes résultats, mais l'accent est mis dans les exercices sur le caractère particulier de celui de Héron où l'on retrouve les trois médiétés fondamentales : l'arithmétique, la géométrique et l'harmonique, un exercice est consacré à la construction géométrique des différents éléments de l'algorithme. Sortant ensuite du contexte grec, l'activité se poursuit autour de la notion de suite (variation, bornes, convergence), propose des algorithmes plus modernes, à la convergence plus rapide.

Avec Théon de Smyrne, néopythagoricien du deuxième siècle de notre ère, on retrouve les nombres figurés pythagoriciens. Dans un extrait de son ouvrage *Exposition de connaissances mathématiques utiles pour la lecture de Platon*[27], apparaissent les "nombres latéraux" et les "nombres diagonaux". Ces nombres sont des entiers, et jamais le nombre diagonal n'est la diagonale d'un carré dont le côté est le nombre latéral associé, mais on démontrera, en s'appuyant sur les remarques de Théon que le rapport du nombre diagonal au nombre latéral converge vers $\sqrt{2}$. L'activité se prolonge par une adaptation de la méthode de Théon à la recherche d'approximations d'autres rapports irrationnels.

La septième et dernière activité porte sur un problème d'ordre théorique : les rapports de deux grandeurs incommensurables sont-ils condamnés à rester relégués à l'infini, inaccessibles ? Après un travail sur des passages du Livre VII des *Éléments* d'Euclide qui permet d'aborder la proportionnalité des nombres (entiers), on aborde les définitions du Livre V qui aboutissent à la proportionnalité de grandeurs commensurables ou non. Ces définitions, inspirées d'après certains auteurs par Eudoxe de Cnide (quatrième siècle avant notre ère), seront mises en œuvre pour démontrer quelques propriétés des proportions.

---

26 Héron d'Alexandrie, *Les Métriques*, extraits in Chabert & alii, 1994, *Algorithmes au fil des âges*, Belin, Paris, page 231.

27 Théon de Smyrne, 1892, *Exposition des connaissances mathématiques utiles pour la lecture de Platon*, traduit par J. Dupuy, réimpression Culture et civilisation, Bruxelles, 1966.

## Bibliographie.

Les sources des textes cités sont données dans les notes de bas de page. Pour approfondir les sujets abordés dans l'atelier, vous pouvez consulter :


Caveing M., 1982, *La constitution du type mathématique de l'idéalité dans la pensée grecque,* thèse présentée devant l'Université de Paris X, Atelier national de reproduction des thèses, Lille[28].

Cousquer E., 1992, *Histoire du concept de nombre,* IREM de Lille.

Daumas D., 1990, *Sur la démonstration de l'irrationalité chez les Grecs,* in *La démonstration mathématique dans l'Histoire,* Actes du 7ème colloque d'épistémologie et d'histoire des mathématiques, IREM de Besançon et IREM de Lyon, pages 389-423.

Daumas D., 1994, *Une approche de l'irrationalité :algorithme d'Euclide et fractions continues,* in *Histoire d'infini,* Actes du 9ème colloque d'épistémologie et d'histoire des mathématiques, IREM de Brest, pages 387-410.

Daumas D. et Guillemot M., 1993, *Faut-il toujours raison garder ?,* in Commission inter-IREM d'Histoire et d'épistémologie des mathématiques, *Histoires de problèmes, Histoire des mathématiques,* Ellipses, Paris, pages 33-57.

Dhombres J., et alii, 1987, *Mathématiques au fil des âges,* Gauthier-Villars, Paris.

Dhombres J., 1978, *Nombre, mesure et continu. Épistémologie et Histoire,* Cedic/Nathan, Paris.

Gardies J-L., 1984, *Pascal entre Eudoxe et Cantor,* Vrin, Paris.

1988, *L'héritage épistémologique d'Eudoxe de Cnide. Un essai de reconstruction,* Vrin, Paris.

Serfati M., 1992, *Quadrature du cercle, fractions continues et autres contes. Sur l'histoire des nombres irrationnels et transcendants aux XVIIIe et XIXe siècles,* Fragments d'histoire des Mathématiques IV, brochure APMEP n°86, Paris.


28 Cet ouvrage est en cours de réedition par les Presses Universitaires de Lille. Est annoncé notamment le tome 3 : *l'irrationalité en mathématiques jusqu'à Euclide* qui sera donc disponible en librairie.