Les géométries non euclidiennes : travail interdisciplinaire math-philo

Jacqueline GUICHARD

Ce travail interdisciplinaire s'est fait dans le cadre de l'*Atelier Philo-Math* de l'IREM de Poitiers qui, depuis septembre 1991, tient trois ou quatre sessions par an, et qui s'est constitué initialement pour répondre à un besoin d'échanges : d'une part, échanges sur des points importants d'histoire et d'épistémologie des mathématiques, et d'autre part, en corrélation plus ou moins étroite selon les questions avec le premier point, échanges sur la conception et l'analyse critique de travaux à proposer aux élèves.

Les géométries non euclidiennes ont d'abord constitué un des thèmes de travail de l'*Atelier* de 1992 à 1994, à partir d'un projet de travail interdisciplinaire avec des élèves de TC et de TA1. Une activité a été réalisée au L.P.I. du Futuroscope (86) en 1991-92 par Dominique Gaud (math.) et Claude Chrétien (philo.), remise sur le métier et améliorée en 1992-93 [1] ; une autre par Jean-Pierre Sicre au lycée Jean Macé de Niort (79), en 1993-94.

Il nous a paru intéressant de concevoir, à partir de là, la structure d'une action de formation à l'adresse des collègues intéressés.

En proposant le stage décrit ci-dessus [2], co-animé par un enseignant de mathématiques et un enseignant de philosophie [3], nous avions un double objectif avec un axe commun.

---

1 Descriptif et document de travail pour l'élève se trouvent dans : *TRAVAUX INTERDISCIPLINAIRES* : • Mathématiques et Philosophie • Sciences Physiques et Philosophie *EN CLASSES TERMINALES SCIENTIFIQUES, Géométries non euclidiennes* : pp. 65-82 & annexes E-F-G. I.R.E.M. de Poitiers, septembre 1993.

2 Les matériaux qui ont servi à la conception de ce stage - documents de travail (textes, exercices), compléments mathématiques, historiques et épistémologiques - ont été réunis dans une brochure : *SUR LES GEOMETRIES NON EUCLIDIENNES. Documents pour travaux interdisciplinaires philo-math.* D. Gaud - J. Guichard - J.-P. Sicre - J. Souville. I.R.E.M. de Poitiers. Juin 95. Le plan de la journée de formation est reproduit ci-après (**DOC. 0**).

3 Respectivement : D. Gaud - J. Guichard, J.-P. Sicre - J. Guichard, J. Souville - J. Guichard, le stage d'une journée ayant eu lieu en trois lieux différents de l'académie, en fonction des inscriptions des stagiaires.

MATHÉMATIQUES

Compostage : 0947 **Durée : 1 jour**

GÉOMÉTRIES NON EUCLIDIENNES (MATHS / PHILO)

proposé par : *IREM* *pour* LYC

OBJECTIFS : MATHÉMATIQUES-PHILOSOPHIE : LES GÉOMÉTRIES NON EUCLIDIENNES ET LE CHANGEMENT DE STATUT DE LA NOTION DE VÉRITÉ DANS LES SCIENCES. ÉTUDIER AU TRAVERS D'UN ENSEMBLE DE TEXTES, L'INCIDENCE DE L'ÉMERGENCE DES GÉOMÉTRIES NON EUCLIDIENNES SUR LE STATUT DE LA NOTION DE VÉRITÉ EN MATHÉMATIQUES OU EN PHYSIQUE.

EFFETS ATTENDUS : MISE EN PLACE D'UNE ACTION INTERDISCIPLINAIRE AU NIVEAU DES CLASSES DE TERMINALES, A LAQUELLE PEUVENT COLLABORER DES PROFESSEURS DE MATH PHILO PHYSIQUE ET HISTOIRE.

REMARQUE :

académie de poitiers - plan académique de formation 94-95 - p. 46

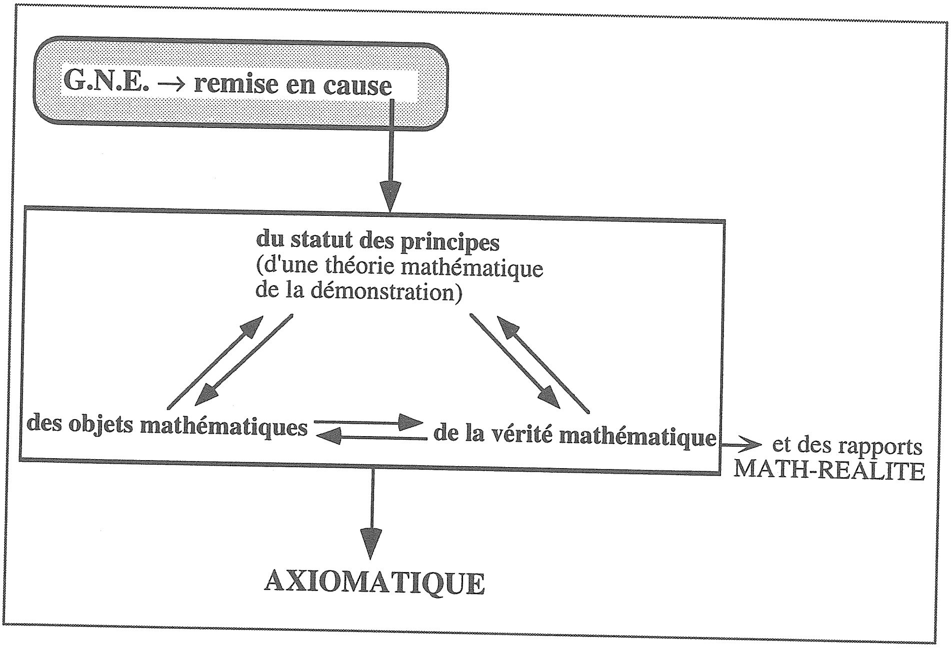
Le double objectif :

– Permettre aux enseignants de commencer ou de continuer une formation en histoire et épistémologie des mathématiques centrée sur un contenu qui n'est pas un objet d'enseignement, mais qui représente dans l'histoire des mathématiques un tournant, peut-être une rupture épistémologique.

– Leur donner la possibilité, à partir des documents et travaux proposés dans le stage, d'envisager de s'engager dans la conception d'activités interdisciplinaires avec leur(s) collègue(s) de mathématiques ou de philosophie à l'adresse de leurs élèves.

L'axe commun, c'est ***l'hypothèse du gain de sens***, pour les enseignants et pour les élèves : travailler sur les géométries non euclidiennes, non pas en tant qu'objet de savoir mathématique "atemporel", mais à partir de leur préhistoire, des "tribulations" de leur avènement, des controverses, à l'aide de textes et de petits exercices pour amorcer une représentation du changement par rapport à la géométrie euclidienne, ce n'est pas seulement travailler sur les géométries non euclidiennes, qui ont représenté un moment important dans l'histoire des mathématiques, c'est travailler sur un changement qui met directement en jeu le statut des objets mathématiques – qu'est-ce qu'un droite, un cercle...? y a-t-il des objets "droite", "cercle"..., définis ou définissables indépendamment d'une théorie mathématique déterminée ? –, un changement qui questionne par là-même le statut des axiomes, de la vérité et de la démonstration mathématiques. [4]

4 Dans le même esprit, une séance d'une demi-journée a été proposée en formation initiale des IUFM 2° année de l'Académie de Poitiers en 1993-94 et 1994-95, dans le cadre d'un module géométrie de trois demi-journées ; séance elle aussi co-animée interdisciplinairement "math-philo" (J.-P. Sicre - J. Guichard).



C'est en fait travailler sur le sens de l'activité mathématique, sur ce que c'est que faire des mathématiques : ce qui fait que l'activité a du sens, – un sens mathématique – pour celui qui la fait, et sur ce qui fait le mathématique d'une activité, même si cette dernière détermination n'est pas facile à cerner.

descriptif d'une stratégie

Cette stratégie, modulable en fonction du temps et du public, comporte des documents qui ont été utilisés en tout ou partie, en formation et dans les classes.

En avant-propos, le rappel du "coupable", le cinquième postulat d'Euclide [5] – dans la formulation d'Euclide, avant de revenir à la formulation plus connue dite de Playfair (1748-1819).

– **1. L'entrée choisie : 2 repères**, avant et après la constitution de géométries non euclidiennes; ou encore de la première mise en forme axiomatique du savoir mathématique à l'axiomatisation de la géométrie : Euclide, Hilbert, présenté par J. Itard [6].

---

5 cf. ci-après, **DOC 1**.

6 Extrait de *Histoire des mathématiques*. Bouveresse J., Itard J., Salé E. Larousse, Paris 1977, pp. 61- 66.

La raison de ce second choix : nous avons pris cette version de l'axiomatique de Hilbert comme document de travail avec les élèves, et avec les collègues en formation, pour avoir une vision d'ensemble "ramassée" des axiomes de Hilbert, la composition de son texte se prêtant mal à un travail nécessairement très limité en durée. On y perd la perception de l'organisation des axiomes, mais aussi des précisions sur le sens, intéressantes à prendre en compte chez celui que la tradition retient comme le père du formalisme.

C'est l'entrée dans la problématique esquissée ci-dessus, puisque la différence de statut des termes premiers est apparente.

– 2. **Quelques repères historiques** pour commencer à prendre la mesure du chemin parcouru et du changement, à travers la persistance des problématiques et la difficulté des obstacles à franchir pour reconnaître la validité mathématique de résultats non euclidiens. Lorsqu'on ne dispose pas de beaucoup de temps, on peut s'en tenir à quelques "passages obligés" dans la riche histoire des parallèles :

• Proclus, mémoire de l'Antiquité, des tentatives de redéfinition des parallèles [7] et des tentatives de démonstrations du cinquième postulat [8].

• Dans la théorie arabe des parallèles, les démonstrations de :
 – Ibn Al Haytham connu sous le nom de Alhazen (965-1041),
 – Omar Khayyam (v. 1045-1130) [9].
Ils ont en commun de partir d'un quadrilatère et de raisonner par l'absurde : ils ont donc reconnu le lien entre le problème des parallèles et celui de la somme des angles du quadrilatère et du triangle.
Nous retrouvons le principe de leurs démonstrations chez les précurseurs du XVIIIème siècle.

• Dans le foisonnement des démonstrations des XVIIIème-XIXème siècles, les résistances de Saccheri, de Taurinus [10] permettent de mettre en évidence le poids d'une rationalité qui a la force de plus de vingt siècles.

---

7 Proclus. *Les commentaires sur le premier livre des Éléments d'Euclide*, traduit du grec par Paul Ver Eecke. Desclée de Brouwer, Bruges 1948, pp. 168-169. Et, Chabert J-L. *La préhistoire des géométries non euclidiennes*, publication de l'IREM de Picardie 1987, p. 80, Amiens 1987 ; et *Les géométries non euclidiennes*. REPERES-IREM N°1. Octobre 90, pp. 69-91. Editions Topiques, Pont-à-Mousson 1990.

8 Chabert J-L. *La vraie fausse démonstration du cinquième postulat*. In : I.R.E.M. *Histoire de problèmes - Histoire des mathématiques*, ch. 11. Ed. ellipses 1993, pp. 277-297.

9 Cf. aussi, Dahan-Dalmedico A. et Peiffer J. *Une histoire des mathématiques. Routes et dédales* (1982). Points, Sciences n° 49, Editions du Seuil 1986, pp. 151-153.

10 Toth I. *La révolution non euclidienne*. La Recherche n°75. Février 77. Paris 1977. Rééd. dans LA RECHERCHE en histoire des sciences. Points/Sciences S37, Le seuil, Paris 1983, pp. 241-265.

– 3. Pour **faire travailler la représentation**, un texte de Poincaré :

– Soit un extrait de : *L'espace et la géométrie* (1908) [11].

«Supposons, par exemple, un monde renfermé dans une grande sphère et soumis aux lois suivantes :
La température n'y est pas uniforme ; elle est maxima au centre, et elle diminue à mesure qu'on s'en éloigne, pour se réduire au zéro absolu quand on atteint la sphère où ce monde est renfermé.
Je précise davantage la loi suivant laquelle varie cette température. Soit R le rayon de la sphère limite ; soit r la distance du point considéré au centre de cette sphère. La température absolue sera proportionnelle à $R^2 - r^2$.
Je supposerai de plus que, dans ce monde, tous les corps aient même coefficient de dilatation, de telle façon que la longueur d'une règle quelconque soit proportionnelle à sa température absolue.
Je supposerai enfin qu'un objet transporté d'un point à un autre, dont la température est différente, se met immédiatement en équilibre calorifique avec son nouveau milieu.
Rien dans ces hypothèses n'est contradictoire ou inimaginable.
Un objet mobile deviendra alors de plus en plus petit à mesure qu'on se rapprochera de la sphère limite.
Observons d'abord que, si ce monde est limité au point de vue de notre géométrie habituelle, il paraîtra infini à ses habitants. Quand ceux-ci, en effet, veulent se rapprocher de la sphère limite, ils se refroidissent et deviennent de plus en plus petits. Les pas qu'ils font sont donc aussi de plus en plus petits, de sorte qu'ils ne peuvent jamais atteindre la sphère limite.
Si, pour nous, la géométrie n'est que l'étude des lois suivant lesquelles se meuvent les solides invariables, pour ces êtres imaginaires, ce sera l'étude des lois suivant lesquelles se meuvent les solides déformés par ces différences de température *dont je viens de parler.»*

Poincaré explicite ensuite quelles seraient les lois de ce monde et quelle serait la géométrie de ces êtres. <Une étude mathématique, de cet extrait se trouve dans la brochure géométries non euclidiennes … citée ci-dessus>

soit le texte sur un monde sphérique peuplé d'animaux plats qui construiraient une géométrie sphérique, extrait de : *Les géométries non-euclidiennes* (1891) [12].

«Imaginons un monde uniquement peuplé d'êtres dénués d'épaisseur ; et supposons que ces animaux «infiniment plats» soient tous dans un même plan et n'en puissent sortir. Admettons de plus que ce monde soit assez éloigné des autres pour être soustrait à leur influence.

11 Poincaré H. *L'espace et la géométrie* (1908). *La science et l'hypothèse*. Ch. IV. Flammarion 1968, pp. 88-91.

12 Poincaré H. *Les géométries non-euclidiennes* (1891). *La science et l'hypothèse*. Ch. III. Flammarion 1968, pp. 63-66.

Pendant que nous sommes en train de faire des hypothèses, il ne nous en coûte pas plus de douer ces êtres de raisonnement et de les croire capables de faire de la géométrie. Dans ce cas, ils n'attribueront certainement à l'espace que deux dimensions.
Mais supposons maintenant que ces animaux imaginaires, tout en restant dénués d'épaisseur, aient la forme d'une figure sphérique, et non d'une figure plane et soient tous sur une même sphère sans pouvoir s'en écarter. Quelle géométrie pourront-ils construire ?
Il est clair d'abord qu'ils n'attribueront à l'espace que deux dimensions ; ce qui jouera pour eux le rôle de la ligne droite, ce sera le plus court chemin d'un point à un autre sur la sphère, c'est-à-dire un arc de grand cercle, en un mot leur géométrie sera la géométrie sphérique.»

– 4. **Des exercices mathématiques**, dans les modèles de Klein-Beltrami et de Poincaré. Exercices utilisant des connaissances au programme des classes scientifiques [13].

– 5. **Réflexion sur les conséquences épistémologiques.**

– **5.1.** Selon le public, les objectifs de formation, le temps dont on dispose, on peut se limiter à une étude du passage de l'*Axiomatique* [14] de R. Blanché qui réalise un survol rapide et synthétique du problème et de ses conséquences épistémologiques [15], – en visant à provoquer une étude distanciée, c'est-à-dire :

– qui permette aux lecteurs néophytes que sont nos élèves de ne pas prendre à la lettre ce que R. Blanché dit de l'usage du cinquième postulat: « *Mais, après avoir commencé la chaîne de ses déductions, il arrive à deux reprises à Euclide d'invoquer, dans le cours même d'une démonstration et pour les besoins de celle-ci, une proposition très particulière qu'il demande qu'on lui accorde, sans pouvoir la justifier autrement que par une sorte d'appel à l'évidence intuitive.* » [16] ce qui outrepasse largement le texte d'Euclide [17] auquel il peut être utile de revenir avec les élèves

– qui permette de mettre en débat ce qui est présenté comme une évidence enfin attestée par l'histoire des mathématiques : le caractère conventionnel des points de départ ; avec la possibilité de prolonger l'analyse par une étude comparative de

13 Cf. extrait ci-dessous, **DOC 5.**

14 Blanché R. *L'Axiomatique*. (1955). Ed. Quadrige n° 116 / PUF 1990, pp. 12-15. cf. ci-après **DOC. 2.**

15 Selon ce qui a été fait auparavant avec les élèves, on peut utiliser une lecture commentée de ce texte comme introduction pour donner une idée du chemin à parcourir, en extraire les éléments d'une problématique, esquisser un plan de travail, et retrouver le texte en fin de parcours pour une lecture "instruite". C'est la démarche que j'ai proposée cette année 1994-95 à des étudiants de DEUG II° année de Philosophie de l'Université de Poitiers.

16 Cf. ci-après **DOC. 2.** lignes 6 à 11.

17 Cf. ci-après **DOC. 2.**

la conception classique des axiomes et des postulats et d'une prise de position opposée, comme le conventionnalisme de H. Poincaré [18].

– 5.2. Ou bien, on peut, à partir de l'étude du texte de R. Blanché, aller du côté du problème du statut des objets mathématiques : droite, cercle ..., avec par exemple un petit travail d'appropriation mathématique de la question à l'aide d'extraits de R. Carnap : *Les fondements philosophiques de la physique* [19], et l'analyse épistémologique de G. Bachelard, dans *Le nouvel esprit scientifique* [20].

* * * * *

---

18 Cf. ci-après **DOC. 3.1 & 3.2.**

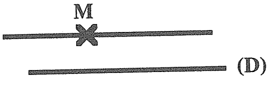
19 Carnap R. *Les fondements philosophiques de la physique* (1966). A. Colin 1973, pp. 131-141. Reproduit dans : Bartholy M.-C., Despin J.-P., Grandpierre G. *Philosophie critique*. 3. la science - épistémologie générale, Paris, Magnard 1978

20 Bachelard G. *Le nouvel esprit scientifique* (1934), ch. I. Vrin (1968), pp. 20-23. Cf. ci-après, **DOC. 4.**

DOC. 0. Plan de la journée inscrite au plan académique de formation 94-95

GÉOMÉTRIES NON EUCLIDIENNES (MATH/PHILO)

Plan général



Par un point situé hors d'une droite...

I. Entrée : "avant et après...."......1825

L'hypothèse de l'angle aigu est absolument fausse car elle répugne à la nature de la ligne droite. Girolamo Saccheri 1733

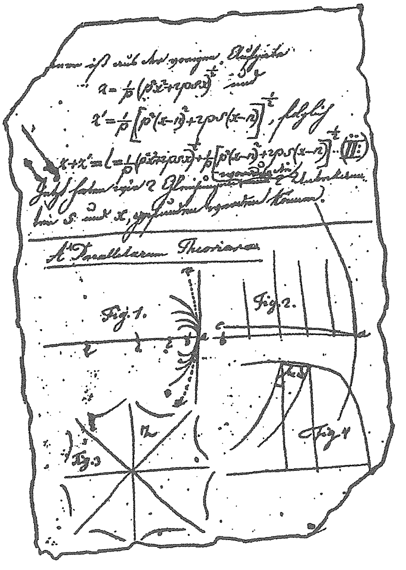
II. Bref historique

III. Entrée dans un univers non euclidien

IV. Recherche de modèles

V. Exercices mathématiques pour les élèves

VI. Esquisse synthétique d'une analyse des conséquences



Janos Bolyai (1820)

Isolé sur une pseudosphère...

Un triangle (dont les trois angles sont nuls).

François Le Lionnais

"J'ai peur des criaillements des ignorants"
Gauss à Bessel 1829

DOC. 1.1. les postulats ou demandes d'Euclide. *Éléments.* Livre I. Trad. Peyrard 1819. Rééd. Blanchard 1993 pp. 1-4.

1. Conduire une droite d'un point quelconque à un point quelconque.

2. Prolonger indéfiniment, selon sa direction, une droite finie.

3. D'un point quelconque, et avec un intervalle quelconque, décrire une circonférence de cercle.

4. Tous les angles droits sont égaux entre eux.

5. Si une droite, tombant sur deux droites fait les angles intérieurs du même côté plus petits que deux droits, ces droites, prolongées à l'infini, se rencontreront du côté où les angles sont plus petits que deux droits.

6. Deux droites ne renferment point un espace.

Définition 35. Les parallèles sont des droites, qui, étant situées dans un même plan, et étant prolongées à l'infini de part et d'autre, ne se rencontrent ni d'un côté ni de l'autre.

DOC. 1.2. Le "coupable" : le cinquième dit «*le postulat des parallèles*»...

«Si une droite, tombant sur deux droites, fait les angles intérieurs du même côté plus petits que deux droits, ces droites, prolongées à l'infini, se rencontreront du côté où les angles sont plus petits que deux droits.»

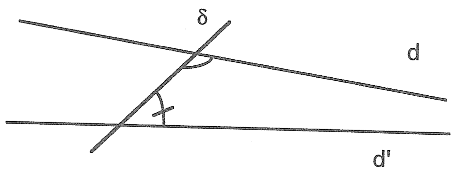
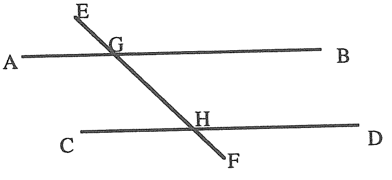


fig. 1

... son intervention dans la démonstration de la **proposition 29** du Livre I des éléments. **Trad. B. Vitrac. PUF 1990,** Vol. 1. pp. 251-252.

Une ligne droite tombant sur des droites parallèles fait des angles alternes égaux entre eux, et aussi l'angle extérieur égal à l'angle intérieur et opposé, et les angles intérieurs et du même côté égaux à deux droits.



En effet, que la droite EF tombe sur les droites parallèles AB, CD. Je dis qu'elle fait des angles alternes égaux : ceux sous AGH, GHD, et l'angle extérieur, celui sous EGB, égal à celui sous GHD, intérieur et opposé, et les angles intérieurs et du même côté, ceux sous BGH, GHD, égaux à deux droits.

En effet, si celui sous AGH est inégal à celui sous GHD, l'un d'entre eux est plus grand. Que celui sous AGH soit le plus grand. Que celui sous BGH soit ajouté de part et d'autre.

Ceux sous AGH, BGH sont donc plus grands que ceux sous GHD, BGH. (N.C. 4) [21]. Mais ceux sous AGH, BGH sont égaux à deux droits (Prop. 13). Donc ceux sous BGH, GHD sont plus petits que deux droits. Les droites sur des angles plus petits que deux droits, prolongées indéfiniment se rencontrent (Dem. 5) [22].

Donc les droites AB, CD, prolongées indéfiniment, se rencontreront. Or elles ne se rencontrent pas, puisqu'elles ont été supposées parallèles. Donc l'angle sous AGH n'est pas inégal à l'angle sous GHD. Donc il est égal. Mais celui sous AGH est égal à celui sous EGB (Prop. 15) et donc celui sous EGB est égal aussi à celui sous GHD (N.C. 1).

Que celui sous BGH soit ajouté de part et d'autre. Ceux sous EGB, BGH sont donc égaux à ceux sous BGH, GHD (N.C. 2). Mais ceux sous EGB, BGH sont égaux à deux droits (Prop. 13). Et donc ceux sous BGH, GHD sont égaux à deux droits (N.C. 1).

Donc, une ligne droite tombant sur des droites parallèles fait des angles alternes égaux entre eux, et aussi l'angle extérieur égal à l'angle intérieur et opposé, et les angles intérieurs et du même côté égaux à deux droits. Ce qu'il fallait démontrer.

21 N.C. = notion commune, ou axiome. Dem. = demande ou postulat.

22 En fait une forme abrégée de la Dem. 5 puisque la position des angles n'a pas à être rappelée. (Note du traducteur)

DOC. 2. Blanché R. *L'Axiomatique.* (1955). Ed. Quadrige n° 116 / PUF 1990, pp. 12-15.

§ 2. LES POSTULATS. – La première chose qui ait tourmenté les lecteurs d'Euclide amis de la rigueur, c'est l'intervention des postulats. Ce qui a d'abord gêné, ce n'étaient pas proprement les trois postulats qui figurent en tête des *Éléments*, à côté des définitions et des axiomes, et qui ont un caractère opératoire très général, visant seulement à annoncer qu'on se permettra des constructions avec la règle et le compas. Mais, après avoir commencé la chaîne de ses déductions, il arrive à deux reprises à Euclide d'invoquer, dans le cours même d'une démonstration et pour les besoins de celle-ci, une proposition très particulière qu'il demande qu'on lui accorde, sans pouvoir la justifier autrement que par une sorte d'appel à l'évidence intuitive. C'est ainsi que, pour démontrer sa 29e proposition, il lui faut admettre que, par un point hors d'une droite, ne passe qu'une seule parallèle à cette droite. La symétrie apparente entre la proposition énonçant que par un point passe au moins une parallèle, proposition qui est établie par une démonstration (théorème d'existence), et celle qui énonce qu'il en passe une au plus (postulat d'unicité), rendait plus scandaleuse encore la dissymétrie des justifications. Le postulat des parallèles survenait ainsi comme un maillon étranger au système, comme un expédient destiné à combler une lacune dans l'enchaînement logique. Aux yeux des géomètres, il faisait figure de théorème empirique, dont la vérité n'était pas mise en question, mais dont la démonstration restait à découvrir. Les savants alexandrins, arabes et modernes s'y employèrent successivement, mais il se révélait toujours à l'analyse que les prétendues démonstrations se fondaient sur quelque autre supposition, demeurée le plus souvent implicite : on n'avait fait que changer de postulat. On sait comment l'échec des démonstrations directes suggéra l'idée d'une démonstration par l'absurde, et comment à son tour l'échec des démonstrations par l'absurde aboutit bientôt, par un renversement du point de vue, à la constitution des premières géométries dites non euclidiennes. La portée épistémologique de ces nouvelles théories est considérable. En particulier, elles ont fortement contribué à déplacer le centre d'intérêt de la géométrie spéculative, en le transportant du contenu vers la structure, de la vérité extrinsèque des propositions isolées vers la cohérence interne du système total. La somme des angles d'un triangle est-elle égale, inférieure ou supérieure à deux angles droits ? Des trois cas concevables, un géomètre ancien eût répondu que le premier était vrai, les deux autres faux. Pour un moderne, il s'agit là de trois théorèmes distincts, qui ne s'excluent mutuellement qu'à l'intérieur d'un même système, selon que le nombre des parallèles est postulé égal, supérieur ou inférieur [23] à un, et qui même se tolèrent dans

23 Le théorème, mentionné à la page précédente <ci-dessus l. 14-15>, qui établit l'existence de la parallèle, postule qu'on peut prolonger une droite indéfiniment, ce qu'il est permis de refuser.

un système affaibli et plus général, où le nombre des parallèles possibles est laissé en suspens. Que l'expérience à notre échelle vérifie l'une, et l'une seulement, de ces trois propositions, cela ne concerne que l'utilisation pratique de la science, non la science pure et désintéressée. L'idée ainsi apparue à l'occasion de la théorie des parallèles doit naturellement s'étendre à l'ensemble des postulats. On voit alors se dissocier les deux aspects de la vérité géométrique, jusque-là intimement mêlés dans une union étonnante. Un théorème de géométrie était à la fois un renseignement sur les choses et une construction de l'esprit, une loi de physique et une pièce d'un système logique, une vérité de fait et une vérité de raison. De ces couples paradoxaux, la géométrie théorique laisse maintenant décidément tomber le premier élément, qu'elle renvoie à la géométrie appliquée. Il n'y a plus, pour les théorèmes, de vérité séparée et pour ainsi dire atomique : leur vérité, c'est seulement leur intégration au système, et c'est pourquoi des théorèmes incompatibles entre eux peuvent également être vrais, pourvu qu'on les rapporte à des systèmes différents.

Quant aux systèmes eux-mêmes, il n'est plus question pour eux de vérité ou de fausseté, sinon au sens logique de la cohérence ou de la contradiction interne. Les principes qui les commandent sont de simples hypothèses, dans l'acception mathématique de ce terme : ils sont seulement posés, et non affirmés ; non pas douteux, comme les conjectures du physicien, mais situés par delà le vrai et le faux, comme une décision ou une convention. La vérité mathématique prend ainsi un caractère global : c'est celle d'une vaste implication, où la conjonction de tous les principes constitue l'antécédent, et celle de tous les théorèmes le conséquent.

Dans l'interprétation traditionnelle, la démonstration mathématique était catégorique et apodictique. Elle disait : ces principes étant vrais absolument, telle proposition, que j'en déduis, est donc vraie aussi. Aristote l'appelait : le syllogisme du nécessaire. Maintenant, elle dit seulement ceci : si l'on pose, arbitrairement, tel ensemble de principes, voici les conséquences qui, formellement, en résultent. La nécessité ne réside plus que dans le lien logique qui unit les propositions, elle s'est retirée des propositions elles-mêmes. La mathématique est devenue, selon le mot de Pieri, un système hypothético-déductif.

DOC. 3.1. Proclus. *Les commentaires sur le premier livre des Éléments d'Euclide,* traduit du grec par Paul Ver Eecke. Desclée de Brouwer, 1948. Sur les postulats et axiomes, p. 157 & pp.168-69.

Le propre des axiomes et postulats est donc de ne demander ni démonstration ni assurances géométriques, mais d'être acceptés comme reconnus et de devenir les principes des choses qui viennent à leur suite. /.../

POSTULAT V

Cela aussi [24] doit être absolument rejeté des postulats ; car c'est un théorème que Ptolémée s'est proposé d'éluder dans un certain livre, et dont la démonstration exige beaucoup de définitions et de théorèmes. Euclide montre d'ailleurs la réciproque de ce postulat comme étant aussi un théorème [25] ; mais certains qui s'abusent sans doute, on estimé le mettre au rang des postulats, parce que l'assurance de l'inclinaison simultanée et la rencontre des lignes droites leur sont aussitôt fournies par la diminution des deux angles droits. Or Géminus leur a répondu comme il fallait en disant que ceux qui sont à la tête de cette science nous ont mis en garde de ne pas attacher du tout notre esprit à de vaines opinions probables dans les raisonnements géométriques /.../. Or le fait que des lignes droites s'inclinent ici l'une sur l'autre lorsque les angles diminuent est vrai et inéluctable ; tandis que le fait que les lignes droites se rencontrent finalement lorsqu'elles s'inclinent de plus en plus l'une sur l'autre dans leur prolongement est probable et non inéluctable, à moins qu'un raisonnement ne démontre que le fait est vrai pour les lignes droites. En effet, certaines lignes, indéfiniment inclinées l'une sur l'autre, sont asymptotes ; ce qui parait improbable, mais est vrai cependant, et a été découvert pour d'autres formes de la ligne. Dès lors, ce qui est possible pour ces dernières ne l'est-il pas aussi pour les lignes droites ?

---

24 c'est-à-dire le V^ème^ postulat, comme le IV^ème^ : «*On demande que tous les angles droits soient égaux entre eux". "Si l'on consent à ce postulat en le considérant comme évident et n'ayant pas besoin de démonstration, il n'en est cependant pas un et d'après Geminus, serait un axiome, parce qu'il énonce quelque chose qui arrive de soi aux angles droits et ne demande pas, à la simple réflexion de se procurer quelque chose. /.../* » Op. cit. pp.165-166. Et à la suite de cet examen critique, Proclus donne une démonstration linéaire, pp.168-169.

25 «*...D'ailleurs comment ce dont la réciproque est consignée parmi les théorèmes comme démontrable serait-il indémontrable ? Le théorème qui énonce que deux angles intérieurs de tout triangle sont plus petits que deux droits* <prop.17> *est en effet la réciproque de ce postulat, bien que le fait d'incliner toujours plus l'une sur l'autre pour des droites qui se prolongent davantage ne soit pas un indice certain de leur rencontre, parce qu'il se trouve encore d'autres lignes de plus en plus inclinées l'une sur l'autre qui, d'après ce qui a été dit plus haut, ne se rencontrent jamais.*» Proclus. *Les commentaires...*, opus cité p. 312.

DOC. 3.2. Henri Poincaré. *Les géométries non-euclidiennes* (1891). In *la science et l'hypothèse* (1908). Flammarion-science 1968, pp. 75-76.

de la nature des axiomes. – /.../

Sont-ce des jugements synthétiques *a priori*, comme disait Kant ?

Ils s'imposeraient alors à nous avec une telle force que nous ne pourrions concevoir la proposition contraire, ni bâtir sue elles un édifice théorique. Il n'y aurait pas de géométrie non euclidienne. /.../

Devons-nous donc conclure que les axiomes de la géométrie sont des vérités expérimentales ? Mais on n'expérimente pas sur des droites ou des circonférences idéales ; on ne peut le faire que sur des objets matériels. Sur quoi porteraient donc les expériences qui serviraient de fondement à la géométrie ? /.../

Les axiomes géométriques ne sont donc ni des jugements synthétiques a priori ni des faits expérimentaux. Ce sont des *conventions* ; notre choix parmi toutes les conventions possibles, est *guidé* par des faits expérimentaux ; mais il reste libre et n'est limité que par la nécessité d'éviter toute contradiction. C'est ainsi que les postulats peuvent restés *rigoureusement* vrais quand même les lois expérimentales qui ont déterminé leur adoption ne sont qu'approximatives.

En d'autres termes, *les axiomes de la géométrie* (je ne parle pas de ceux de l'arithmétique) *ne sont que des définitions déguisées.*

Dès lors que doit-on penser de cette question : la géométrie euclidienne est-elle vraie ?

Elle n'a aucun sens.

Autant demander si le système métrique est vrai et les anciennes mesures fausses, si les coordonnées cartésiennes sont vraies et les coordonnées polaires fausses. Une géométrie ne peut pas être plus vraie qu'une autre ; elle peut seulement être *plus commode.*

Or la géométrie euclidienne est et restera la plus commode :

1° Parce qu'elle est la plus simple ; et elle n'est pas telle seulement par suite de nos habitudes d'esprit ou de je ne sais quelle intuition directe que nous aurions de l'espace euclidien ; elle est la plus simple en soi de même qu'un polynôme du premier degré est plus simple qu'un polynôme du second degré ; les formules de la trigonométrie sphérique sont plus compliquées que celle de la trigonométrie rectiligne, et elles paraîtraient encore telles à un analyste qui en ignorerait la signification géométrique.

2° Parce qu'elle s'accorde assez bien avec les propriétés des solides naturels, ces corps dont se rapprochent nos membres et notre œil et avec lequel nous faisons nos instruments de mesure».

DOC. 4. G. Bachelard. *Le nouvel esprit scientifique* (1934), ch. I. Vrin (1968), pp. 20-23.

Avant d'arriver à la période de trouble, rappelons d'abord la longue unité de la pensée géométrique : à partir d'Euclide et pendant deux mille ans, la géométrie reçoit sans doute des adjonctions nombreuses, mais la pensée fondamentale reste la même et l'on peut croire que cette pensée géométrique fondamentale est le fond de la raison humaine. C'est sur le caractère immuable de l'architecture de la géométrie que Kant fonde l'architectonique de la raison. Si la géométrie se divise, le kantisme ne peut être sauvé qu'en inscrivant des principes de division dans la raison elle-même, qu'en *ouvrant* le rationalisme. Sans doute un hégélianisme mathématique serait un non-sens historique ; on ne peut cependant manquer d'être frappé du fait que des tendances dialectiques apparaissent à peu près en même temps dans la philosophie et dans la science. Il y a là une sorte de destin de la raison humaine. Comme le dit Halsted, «la découverte de la géométrie non-euclidienne, vers 1830, était inévitable». Voyons rapidement comment cette découverte se prépare à la fin du XVIII^e siècle, sans que d'ailleurs la nature épistémologique du problème soit d'abord aperçue.

En effet d'Alembert considère la *demande* d'Euclide relative au parallélisme comme un *théorème* à démontrer. Que ce théorème corresponde à une vérité, à un fait mathématique, personne n'en doute alors. Autrement dit, pour tous les géomètres jusqu'à la fin du XVIII^e siècle, les parallèles *existent* ; l'expérience usuelle légitime cette notion directement aussi bien que par ses conséquences indirectes. Ce qui parait manquer, ce qui fait scandale, c'est, qu'on n'ait pu encore coordonner ce théorème simple à l'ensemble des théorèmes démontrés. On ne met jamais en doute l'existence des parallèles. Là encore, le réalisme prématuré est une méconnaissance profonde de la nature du problème.

Cette méconnaissance persiste alors même que s'ouvre la voie de la découverte. Ainsi, c'est encore devant un théorème à démontrer, une vérité à établir, un fait à légitimer que se placent Saccheri et Lambert au XVIII^e siècle, Taurinus et de Tilly beaucoup plus tard au XIX^e siècle. Mais cependant l'élément du doute essentiel fait avec eux son apparition, encore que ce doute ne soit d'abord qu'une sorte de méthode. Ces mathématiciens se demandent en effet ce qu'il adviendrait si l'on abandonnait ou si l'on modifiait la notion de parallèle. Leur méthode dépasse légèrement la portée d'un raisonnement par l'absurde. En effet, Lambert, ne se borne pas à coordonner les conclusions bizarres – reconnaissant par exemple l'influence d'une modification de la proposition euclidienne sur la surface du triangle – mais encore il entrevoit, que la logique peut être satisfaite par un développement non-euclidien prolongé ; il en trouve la preuve dans l'analogie des droites contenues dans un plan et des grands cercles contenus dans une surface

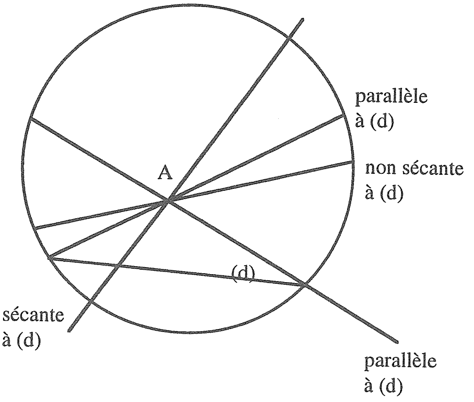
sphérique. Dans l'un et l'autre cas, plusieurs théorèmes s'enchaînent de la même manière. On voit donc se constituer une chaîne logique indépendante de la nature des chaînons. D'une façon encore plus précise, Taurinus remarque que «les grands cercles sur la sphère ont des propriétés très semblables à celles des droites dans le plan, à part la propriété exprimée dans le sixième postulat d'Euclide : deux droites ne peuvent enclore un espace [26]», ce dernier postulat étant souvent pris comme une forme équivalente du postulat classique sur la parallèle.
Ces simples remarques, ces formes toutes premières du non-euclidisme nous permettent déjà de dégager l'idée philosophique générale de la nouvelle liberté mathématique. En effet, on peut déjà se rendre compte que le *rôle* des entités prime leur *nature* et que l'essence est contemporaine de la relation. Ainsi, on comprendra le problème posé par la demande d'Euclide quand on considérera véritablement le rôle des droites dans un plan et non plus leur nature d'absolu ou d'être, quand on saura, en variant l'application, généraliser la fonction de la notion de droite dans un plan, quand on s'instruira sur le prolongement des notions en dehors de leur domaine de base. Alors la simplicité ne sera plus, comme le pose l'épistémologie cartésienne, la qualité intrinsèque d'une notion, mais seulement une propriété extrinsèque et relative, contemporaine de l'application, saisie dans une relation particulière. On pourrait dire d'une manière paradoxale que le point de départ du non-euclidisme réside dans l'épuration d'une notion pure, dans la simplification d'une notion simple. En effet, en approfondissant la remarque de Taurinus, on arrive à se demander si la droite avec parallèle ne correspond pas à une droite spéciale, à une droite trop riche, bref à une notion déjà composée, puisque, du point de vue fonctionnel, le grand cercle, analogue sur la sphère à la droite sur le plan, ne tolère pas le parallélisme. C'est précisément ce qu'exprime M. Barbarin en rappelant que dès 1826, Taurinus formulait l'opinion que «si le cinquième postulat d'Euclide n'est pas vrai, c'est qu'il y a probablement des surfaces courbes sur lesquelles certaines lignes courbes ont des propriétés analogues à celles des droites sur le plan, à part la propriété énoncée dans le cinquième postulat, divination hardie que la découverte de la *pseudosphère* par Beltrami quarante ans plus tard, devait justifier [27]». Par la suite, quand on considérera les droites comme les géodésiques d'un plan euclidien, on ne fera que revenir à cette idée directrice de Taurinus qui consiste à mettre les notions mathématiques dans une atmosphère de plus large extension – et corrélativement de moins grande compréhension – et à ne prendre les notions que par leur rôle fonctionnel strictement défini.

26 Barbarin, *La géométrie non-euclidienne*, Gauthier-Villars 2ème édition, Paris 1907, 3ème édition, Paris 1928 p. 8, (rééd. Gabay 1990).

27 Barbarin, op. cit., p. 7.

DOC. 5. Exercice pour une entrée mathématique (extrait de : SUR LES GÉOMÉTRIES NON EUCLIDIENNES. Documents pour travaux interdisciplinaires philo-math. D. Gaud - J. Guichard - J.-P. Sicre - J. Souville. I.R.E.M. de Poitiers. Juin 95.)

I.5.1 Modèle de Klein-Beltrami [28]



correspondances :

G.E	G.N.E.
plan	disque ouvert
droite	corde
point	point du disque
distance	$d(A,B) = \left\lvert \ln\left(\dfrac{AX}{AY} : \dfrac{BX}{BY}\right)\right\rvert$
demi-droite	"demi-corde"
angle	difficile à expliciter

• Remarques :

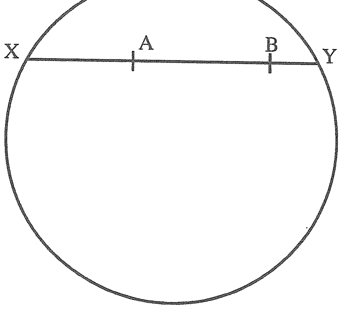
* d(A,B) est une distance :

– $d(A,B) = 0 \Leftrightarrow A=B$

– $d(A,B) = d(B,A)$

– $d(A,B) \leq d(A,C) + d(C,B)$

* Si $B \longrightarrow Y$ $d(A,B) \longrightarrow +\infty$



Exercice 1 :

Placer $C \in (AB)$ tel que $d(A,B) = d(A,C)$ $(B \neq C)$

On sait que $XY = 6$, $AX = 2$, $BY = 1$.

(distances euclidiennes)

28 Voir document dans III. Compléments mathématiques 3.