Approches des notions de nombres rationnels et irrationnels à partir de textes grecs et latins

Michel Ballieu et Jean-Michel Delire
Centre Altaïr d'histoire des sciences et des techniques,
Université Libre de Bruxelles

INTRODUCTION.

Cet article ne résulte pas, comme tel, d'une expérience d'utilisation en classe de textes grecs et latins en vue d'éclairer certains points délicats ou fondamentaux du cours de mathématiques. Il relate cependant des expériences partielles dans ce sens. D'une part, certains (extraits de) textes, grecs en particulier, ont été abordés en 1991-92 et en 1992-93 comme versions non vues par des élèves de 15-16 ans en section gréco-latine. Ils ont pu l'être grâce à la collaboration de deux professeurs de grec, pour la traduction et le sens général[1], et du professeur de mathématiques pour leur exploitation dans le cadre de son cours. Mais ils l'ont été de manière non thématique, répartis sur l'année scolaire en fonction de l'occasion, ce qui est souvent inévitable dans un travail interdisciplinaire. D'autre part, certains outils, développés dans le cadre de l'article en relation avec les textes, comme les fractions continues, ont été utilisés par l'enseignant de mathématiques parce qu'ils sont riches à la fois historiquement et pédagogiquement, même s'ils ne figurent pas au programme de mathématiques.

Mais cet article se veut surtout une incitation à tenter de telles expériences. Il fournit, pour ce faire, d'autres textes grecs et latins à proposer aux collègues de langues anciennes, ainsi qu'un fil conducteur (rationalité/irrationalité) qu'il ne faut surtout pas prendre au pied de la lettre, le but recherché étant simplement que les enseignants qui le liront puisent largement et selon leur goût dans cet ensemble (et dans les quelques références que nous citons) pour donner aux mathématiques cette dimension humaine à laquelle on les associe trop rarement.

1. LA CLASSIFICATION GRECQUE DES NOMBRES « RATIONNELS ET IRRATIONNELS ».

Traditionnellement un nombre rationnel est défini comme égal au rapport de deux entiers, mais la manipulation fréquente, en classe, d'approximations rationnelles (comme 1,4; 1,41421; pour $\sqrt{2}$ par exemple) amène les élèves à des confusions qu'il est nécessaire de dissiper.

On pourrait, par exemple, démontrer qu'un nombre typique des irrationnels comme $\sqrt{2}$ ne peut être exprimé comme rapport de deux entiers. C'est à une telle démonstration, connue déjà peut-être de certains pythagoriciens, que fait allusion le texte α[2] :

Texte α : Aristote, *Premières analytiques*, I.23,41 a 26-27

Πάντες γὰρ οἱ διὰ τοῦ ἀδυνάτου περαίνοντες τὸ μὲν ψεῦδος συλλογίζονται, τὸ δ' ἐξ ἀρχῆς ἐξ ὑποθέσεως δεικνύουσιν, ὅταν ἀδύνατόν τι συμβαίνῃ τῆς ἀντιφάσεως τεθείσης, οἷον ὅτι ἀσύμμετρος ἡ διάμετρος διὰ τὸ γίνεσθαι

Traduction

En effet, tous ceux qui achèvent le raisonnement jusqu'à l'impossible concluent d'abord à l'erreur et la déduisent ensuite des fondements, de l'hypothèse, quand une impossibilité survient parce qu'une hypothèse contradictoire a été

* Chercheur attaché à l'Institut de Philologie et Histoire Orientales de l'Université Libre de Bruxelles.

[1] Que soient ici remerciées, pour avoir osé inclure ces textes dans leurs cours de grec, Mmes Olivier et Labrique, professeurs de langues anciennes à l'Athénée Charles Janssens (Bruxelles).

[2] Tous les textes grecs présentés ci-dessous proviennent de l'excellent **Greek Mathematical Works**, translated by Ivor Thomas, 2 vol., Loeb Classical Library, Cambridge, Mass. & London, 1980 (première édition 1939).

τὰ περιττὰ ἴσα τοῖς ἀρτίοις συμμέτρου τεθείσης. Τὸ μὲν οὖν ἴσα γίνεσθαι τὰ περιττὰ τοῖς ἀρτίοις συλλογίζεται, τὸ δ'ἀσσύμετρον εἶναι τὴν διάμετρον ἐξ ὑποθέσεως δείκνυσιν, ἐπεὶ ψεῦδος συμβαίνει διὰ τὴν ἀντίφασιν.

posée. De même que la diagonale est incommensurable /avec le côté du carré/ par le fait que les impairs sont égaux aux pairs si elle est supposée commensurable[3]. Donc, il est d'abord conclu que les impairs sont égaux aux pairs et il est ensuite montré, contrairement à l'hypothèse, que la diagonale est incommensurable, puisque l'erreur survient du fait de l'hypothèse contradictoire.

La démonstration en question est la suivante (en termes modernes) :

Si $\sqrt{2} = a/b$ (avec a et b naturels premiers entre eux) alors $2b^2 = a^2$, ce qui implique a pair (et donc b impair). En posant $a = 2a'$, il vient $2b^2 = 4a'^2$, ou $b^2 = 2a'^2$. b serait donc à la fois pair et impair, une contradiction.

Ce texte d'Aristote est intéressant à plusieurs égards.

- Il introduit le principe de la démonstration par l'absurde : « l'achèvement (rigoureux) d'un raisonnement jusqu'à l'impossible » oblige de conclure au caractère « contradictoire de l'hypothèse », c'est-à-dire à la vérité de l'hypothèse contraire. Ainsi, supposer que la « diagonale » (du carré de côté 1, donc $\sqrt{2}$) puisse être un rationnel a/b, commensurable avec le côté du carré, implique que b est à la fois pair et impair. $\sqrt{2}$ est donc forcément irrationnel.
- Il permet d'expliciter quelque peu cette « bizarre » opération logique qu'est l'implication $P \Rightarrow Q$, fausse seulement quand P est vraie et Q fausse.
- Il rappelle la répartition pythagoricienne du monde en deux classes opposées, représentées ici par le pair et l'impair, ailleurs par l'humide et le sec, voire même par la femme et l'homme.

C'est d'ailleurs aux pythagoriciens que l'on attribue les premières recherches concernant le caractère rationnel ou irrationnel d'un nombre, comme le précise le texte β.

Texte β : Euclide, *Eléments X*, scholie 1, éd. Heiberg v.415.7-417.14.

Ἦλθον δὲ τὴν ἀρχὴν ἐπὶ τὴν τῆς συμμετρίας ζήτησιν οἱ Πυθαγόρειοι πρῶτοι αὐτὴν ἐξευρόντες ἐκ τῆς τῶν ἀριθμῶν κατανοήσεως. κοινοῦ γὰρ ἁπάντων ὄντος μέτρου τῆς μονάδος καὶ ἐπὶ τῶν μεγεθῶν κοινὸν μέτρον εὑρεῖν οὐκ ἠδυνήθησαν. αἴτιον δὲ τὸ πάντα μὲν καὶ ὁποιονοῦν ἀριθμὸν καθ'ὁποιασοῦν τομὰς διαιρούμενον μόριόν τι καταλιμπάνειν ἐλάχιστον καὶ τομῆς ἀνεπίδεκτον, πᾶν δὲ μέγεθος ἐπ'ἄπειρον διαιρούμενον μὴ καταλιμπάνειν μόριον,

Traduction

Dès l'origine, les pythagoriciens se dirigèrent vers la recherche de la « rationalité[4] » après l'avoir extraite, les premiers, de l'observation des nombres. Alors qu'en effet, la mesure de l'unité est commune à tous /les nombres/, ils ne purent trouver une mesure commune aux grandeurs. La raison en est que tout nombre, quel qu'il soit, lorsqu'il est découpé par des divisions, quelles qu'elles soient, laisse quelque plus petite partie qui n'admet pas de division alors que

[3] Nous avons traduit *sym-metros* et *a-sym-metros* par leurs équivalents français, dérivés du latin, com-mensurables et in-com-mensurables. De manière générale, nous traduirons les termes spéciaux du texte grec par des mots français proches en évitant, quand c'est possible, les expressions «rationnels» et «irrationnels» puisque, nous le verrons, les concepts grecs ne recouvrent pas parfaitement les représentations qu'évoquent ces termes pour nous.

[4] Nous traduisons ici sum-metria par « rationalité » et non « com-mensurabilité »; ce dernier terme, en effet, ne peut être utilisé qu'en référence à deux objets que l'on compare.

ὃ διὰ τὸ εἶναι ἐλάχιστον τομὴν οὐκ ἐπιδέξεται, ἀλλὰ καὶ ἐκεῖνο ἐπ'ἄπειρον τεμνόμενον ποιεῖν ἄπειρα μόρια, ὧν ἕκαστον ἐπ'ἄπειρον τμηθήσεται, καὶ ἁπλῶς τὸ μὲν μέγεθος κατὰ μὲν τὸ μερίζεσθαι μετέχειν τῆς τοῦ ἀπείρου ἀρχῆς, κατὰ δὲ τὴν ὁλότητα τῆς τοῦ πέρατος, τὸν δὲ ἀριθμὸν κατὰ μὲν τὸ μερίζεσθαι τῆς τοῦ πέρατος, κατὰ δὲ τὴν ὁλότητα τῆς τοῦ ἀπείρου . . . τῶν γὰρ Πυθαγορείων λόγος τὸν πρῶτον τὴν περὶ τούτων θεωρίαν εἰς τοὐμφανὲς ἐξαγαγόντα ναυαγίῳ περιπεσεῖν.

toute grandeur, lorsqu'elle est divisée sans arrêt, ne laisse pas de partie qui n'admet pas de division du fait qu'elle est la plus petite, mais bien une /partie qui/, divisée sans arrêt, donne des parties innombrables, dont chacune pourra être divisée sans arrêt. En un mot, la grandeur appartient à l'ordre de l'illimité pour la division, mais du limité pour la totalité, tandis que le nombre /appartient à l'ordre/ du limité pour la division, mais de l'illimité pour la totalité. ... Une histoire /raconte/ que le premier des pythagoriciens qui a rendu publique l'étude de ces sujets est tombé /à l'eau/ lors d'un naufrage.

Ce texte introduit la distinction, classique depuis les mathématiques grecques, entre nombre et grandeur. Elle n'est plus aussi claire aujourd'hui, où nous connaissons la notion de coupure et où nous associons aisément un nombre à un segment sur une droite munie d'un repère. Dans le contexte qui nous occupe, cette distinction équivaut à l'opposition entre nombre rationnel, qui peut être représenté par un «vrai» nombre, et nombre irrationnel, qui doit être représenté par un segment (par exemple, la diagonale d'un carré comme nous l'avons vu pour $\sqrt{2}$) incommensurable avec l'unité.

Plus remarquable encore est ce « découpage par des divisions » (il s'agit en fait de l'algorithme d'Euclide) qui attribue à un nombre le caractère limité, fini et à une grandeur le caractère illimité, infini. Si l'on se place du point de vue de la représentation décimale des nombres (et c'est ce que feront les élèves, qui ont appris que les rationnels ont un développement limité ou illimité périodique et les irrationnels un développement illimité non périodique), il semble y avoir une contradiction.

La dernière partie du texte rappelle une autre caractéristique des pythagoriciens: le secret auquel ils étaient tenus au sujet des découvertes de la secte. On ne nous dit pas cependant si l'indiscret, en « tombant » à l'eau, a été puni par les dieux ou par les hommes.

Texte γ : Platon, *Théétète*, 147 D -148 B

ΘΕΑΙΤΗΤΟΣ. Περὶ δυνάμεών τι ἡμῖν Θεόδωρος ὅδε ἔγραφε, τῆς τε τρίποδος πέρι καὶ πεντέποδος [ἀποφαίνων] ὅτι μήκει οὐ σύμμετροι τῇ ποδιαίᾳ, καὶ οὕτω κατὰ μίαν ἑκάστην προαιρούμενος μέχρι τῆς ἑπτακαιδεκάποδος· ἐν δὲ ταύτῃ πως ἐνέσχετο. ἡμῖν οὖν εἰσῆλθέ τι τοιοῦτον, ἐπειδὴ ἄπειροι τὸ πλῆθος αἱ δυνάμεις ἐφαίνοντο, πειραθῆναι συλλαβεῖν εἰς ἕν, ὅτῳ πάσας ταύτας προσαγορεύσομεν τὰς δυνάμεις.

ΣΩΚΡΑΤΗΣ. Ἦ καὶ ηὕρετέ τι τοιοῦτον;

ΘΕΑΙ. ἔμοιγε δοκοῦμεν, σκόπει δὲ καὶ σύ.

Traduction

Théétète : A propos des carrés, Théodore nous décrivait quelque chose à l'aide de figures, prouvant à propos /du côté/ de celui de 3 pieds et /de celui/ de 5 pieds qu'ils ne sont pas commensurables en longueur avec le (côté de longueur 1) pied, et ainsi de suite /les/ prenant un par un jusqu'à celui de 17 pieds. A celui-ci, il fut retenu en quelque manière.

Ainsi, nous est venue /l'idée/, puisque les /côtés irrationnels de/ carrés semblaient en nombre illimité, d'essayer de /les/ rassembler par la pensée en un /ensemble/ à l'aide /du nom/ duquel nous désignerons tous ces /côtés irrationnels de/ carrés.

Socrate : Et avez-vous trouvé un tel /ensemble/ ?

ΣΩ. Λέγε.
ΘΕΑΙ. Τὸν ἀριθμὸν πάντα δίχα διελάβομεν τὸν μὲν δυνάμενον ἴσον ἰσάκις γίγνεσθαι τῷ τετραγώνῳ τὸ σχῆμα ἀπεικάσαντες τετράγωνόν τε καὶ ἰσόπλευρον προσείπομεν.

ΣΩ. Καὶ εὖ γε.
ΘΕΑΙ. Τὸν τοίνυν μεταξὺ τούτου, ὧν καὶ τὰ τρία καὶ τὰ πέντε καὶ πᾶς ὃς ἀδύνατος ἴσος ἰσάκις γενέσθαι, ἀλλ'ἢ πλείων ἐλαττονάκις ἢ ἐλάττων πλεονάκις γίγνεται, μείζων δὲ καὶ ἐλάττων ἀεὶ πλευρὰ αὐτὸν περιλαμβάνει, τῷ προμήκει αὖ σχήματι ἀπεικάσαντες προμήκη ἀριθμὸν ἐκαλέσαμεν.

ΣΩ. Κάλλιστα. ἀλλὰ τί τὸ μετὰ τοῦτο;

ΘΕΑΙ. ὅσαι μὲν γραμμαὶ τὸν ἰσόπλευρον καὶ ἐπίπεδον ἀριθμὸν τετραγωνίζουσι, μῆκος ὡρισάμεθα, ὅσαι δὲ τὸν ἑτερομήκη, δυνάμεις, ὡς μήκει μὲν οὐ συμμέτρους ἐκείναις, τοῖς δ'ἐπιπέδοις ἃ δύνανται. καὶ περὶ τὰ στερεὰ ἄλλο τοιοῦτον.

Thééthète : Il me semble. Juge /-s-en/, toi-même.
Socrate : Parle.
Théétète : Nous avons réparti tous les nombres en deux /ensembles/. D'abord, les /nombres/ capables d'être égaux un nombre égal de fois, après /les/ avoir comparés au carré pour la forme, nous les avons déclarés carrés et équilatéraux.
Socrate : Et c'est bien !
Théétète : Ensuite, les nombres dans l'intervalle de ces derniers, parmi lesquels 3, 5 et tous les /nombres/ incapables d'être égaux un nombre égal de fois, mais qui sont supérieurs un nombre inférieur de fois ou inférieurs un nombre supérieur de fois et que comprennent des côtés toujours supérieur et inférieur, après /les/ avoir comparés à leur tour aux rectangles, nous /les/ avons déclarés nombres oblongs.
Socrate : Bien, mais ensuite ?
Théétète : Des lignes qui construisent en carré un nombre plan et équilatéral, nous /les/ avons définies « rationnelles », et /des lignes/ qui /construisent en carré/ un /nombre/ oblong, /nous les avons définies/ « irrationnelles » parce qu'elles n'ont pas de commune mesure avec les premières en longueur, mais bien par les surfaces /carrées/ qu'elles produisent. Au sujet des solides, /on a/ un autre /cas/ analogue.

Du point de vue historique, nous apprenons ici que Théodore a découvert pour $\sqrt{n}$ (où *n* est un nombre non carré, inférieur à 17) une démonstration d'irrationalité. Cette extension de la découverte pythagoricienne permet à Platon de se poser la question de l'existence d'une classe de nombres irrationnels dont le carré est rationnel et il propose pour les dénommer le terme *dynamis*, qu'il détourne ainsi de son sens premier de « puissance » (deuxième, puisque le verbe associé à *dynamai* signifie « être capable en carré », particulièrement dans l'expression du théorème de Pythagore[5]), pour en faire l'ancêtre de notre « racine carrée ».

[5] Diogène Laerce, viii, 11-12 : (...) τοῦ ὀρθογωνίου τριγώνου ἡ ὑποτείνουσα πλευρὰ ἴσον δύναται ταῖς περιεχούσαις. **Traduction**: Le côté hypoténuse du triangle rectangle est égal en carré aux /côtés/ entourant /l'angle droit/; Plutarque, *Vie d'Epicure*, 11, 1094 B.: (...) περὶ τῆς ὑποτεινούσης ὡς ἴσον δύναται ταῖς περιεχούσαις τὴν ὀρθήν (...) **Traduction**: au sujet de l'hypoténuse vu qu'elle est égale en carré aux /côtés/ entourant l'/angle/ droit . On en trouve aussi une utilisation à la fin du texte γ: τοῖς δ'ἐπιπέδοις ἃ δύναται. **Traduction**: par les surfaces qu'elles produisent en carré. Il est intéressant de suivre l'évolution du sens du mot dynamis dans le texte γ lui-même: en ligne 1, περὶ <u>δυνάμεων</u> peut être traduit « au sujet des carrés »; en ligne 2, δυνάμεως est sous-entendu, auprès de l'article <u>τῆς</u> et des adjectifs <u>τρίποδος</u> (καὶ) <u>πεντέποδος</u>, comme substantif introduit par la préposition περί mais il ne peut s'agir encore ici de carrés puisqu'ils sont dits μήκει οὐ σύμμετροι τῇ ποδιαίᾳ, c'est-à-dire « incommensurables en longueur avec le côté unité (le pied) »,

Ce dernier texte va plus loin que le précédent dans l'analyse des grandeurs puisque Théétète y distingue les grandeurs commensurables en ligne (celles qui « construisent en carré un nombre équilatéral ») qu'il nomme ici mèkoi[6] et non plus simplement summetroi, des grandeurs incommensurables en ligne, mais commensurables « par les surfaces /carrées/ qu'elles représentent », qu'il nomme donc dynameis et non plus simplement asummetroi.

Cela confirme l'impression que nous avions déjà à la lecture du texte précédent, à savoir que les Grecs semblent découper les nombres plus finement que nous, non pas en deux catégories, rationnels et irrationnels, mais en trois (plus encore si on considère la dernière phrase comme allusion à la création d'un nouvel ensemble, celui des racines cubiques d'entiers).

Le texte δ le montre plus clairement encore.

Texte δ : Euclide, *Eléments*, X, Définitions.

α'. Σύμμετρα μεγέθη λέγεται τὰ τῷ αὐτῷ μέτρῳ μετρούμενα, ἀσύμμετρα δέ, ὧν μηδὲν ἐνδέχεται κοινὸν μέτρον γενέσθαι.

β'. Εὐθεῖαι δυνάμει σύμμετροί εἰσιν, ὅταν τὰ ἀπ'αὐτῶν τετράγωνα τῷ αὐτῷ χωρίῳ μετρῆται, ἀσύμμετροι δέ, ὅταν τοῖς ἀπ'αὐτῶν τετραγώνοις μηδὲν ἐνδέχηται χωρίον κοινὸν μέτρον γενέσθαι.

γ'. Τούτων ὑποκειμένων δείκνυται, ὅτι τῇ προτεθείσῃ εὐθείᾳ ὑπάρχουσιν εὐθεῖαι πλήθει ἄπειροι σύμμετροί τε καὶ ἀσύμμετροι αἱ μὲν μήκει μόνον, αἱ δὲ καὶ δυνάμει. καλείσθω οὖν ἡ μὲν προτεθεῖσα εὐθεῖα ῥητή, καὶ αἱ ταύτῃ σύμμετροι εἴτε μήκει καὶ δυνάμει εἴτε δυνάμει μόνον ῥηταί, αἱ δὲ ταύτῃ ἀσύμμετροι ἄλογοι καλείσθωσαν.

Traduction

1. Sont dites commensurables les grandeurs mesurées par la même mesure et incommensurables, celles dont une mesure commune ne peut exister.
2. Des droites sont commensurables en carré quand les carrés /construits/ à partir d'elles sont mesurés par la même /unité de/ surface et incommensurables quand une mesure commune de surface ne peut exister pour les carrés /construits/ à partir d'elles.
3. Il est démontré, à partir de ces principes, que, par rapport à une droite donnée, existent des droites, illimitées en nombre, commensurables et incommensurables, les unes en longueur seulement, les autres en carré. Que la première droite soit donc nommée « dicible » ainsi que (dicibles) les /droites/ commensurables avec elle, soit en longueur et en carré, soit en carré seulement, tandis que les /droites/ incommensurables avec elle, qu'elles soient nommées « indicibles ».

Ici, les grandeurs, qu'Euclide nomme rapidement « droites », sont à nouveau de deux sortes : les droites commensurables avec une droite de référence, soit directement (les mèkoi de Platon), soit par l'intermédiaire des carrés qu'elles produisent (les dynameis de Platon), et celles qui ne sont pas commensurables ni directement ni en carré. Les premières sont nommées rhètai « dicibles » par Euclide, les secondes alogoi « indicibles ».

Mais comme il a été déjà vu ci-dessus, la classe des « dicibles » ne coïncide pas avec la classe des rationnels (puisque les dynameis $\sqrt{n}$ y appartiennent), ni celle des « indicibles » avec les irrationnels (pour la même raison).

---

comme l'a montré Théodore (de même <u>δυνάμεις</u> en ligne 8). Par la suite, le texte opposera les longueurs des côtés qui construisent en carré un nombre équilatéral (carré) aux longueurs des côtés qui construisent en carré un nombre oblong (non carré, mais commensurables avec le côté unité). Ce sont ces derniers que caractérise le terme δύναμις et que nous traduisons imparfaitement par (côtés) irrationnels (de carré) puisqu'il s'agit d'une classe particulière d'irrationnels.

[6] Ce terme signifiait à l'origine « longueur ; mesure » et Théétète le récupère ici pour l'opposer à dynamis et exprimer le segment dont la mesure est commensurable directement avec le segment unité.

Essayons maintenant de voir d'où provient cette division des nombres chez les Grecs et, bien que nous sachions qu'il y a là-dessous l'algorithme d'Euclide, posons-nous la question (comme se la poseraient peut-être les élèves) de savoir si une représentation positionnelle des nombres peut amener une telle division.

En fait, nous aussi, d'une certaine manière, nous pouvons partager les nombres en *trois* classes :

- les nombres à développement décimal limité, comme 1/5 = 0,2 ;
- les nombres à développement décimal illimité périodique, comme 1/3 = 0,333...;
- les nombres à développement décimal illimité non périodique comme $\sqrt{2}$, π.

mais ces trois classes ne sont pas les mêmes que chez les Grecs et, en fait, elles dépendent de la base de numération choisie. En effet,

- en base 2, 1/5 = 0,0011 0011 0011... est un illimité périodique ;
- en sexagésimal (base 60), 1/3 = 0,20 est un limité !

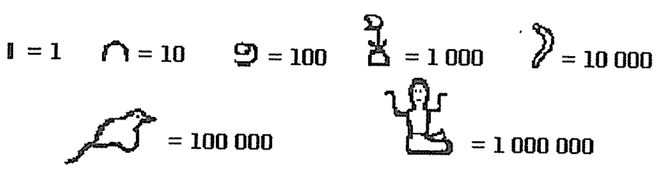
Ce type de classification n'est donc pas vraiment « raisonnable » ; elle n'est d'ailleurs pas utilisée. Pour en arriver avec les élèves à cette conclusion, il est évidemment souhaitable, dans les années antérieures -car c'est une matière que l'on peut aborder relativement tôt- d'étudier quelque peu les systèmes de numération[7].

2. QUELQUES SYSTEMES DE NUMERATION.

Certains concepts « attrayants pour de jeunes élèves » peuvent être abordés, comme la numération égyptienne, qui date d'environ deux millénaires avant J.-C. et qui est un des systèmes les plus primitifs. L'écriture de 9 999, par exemple, nécessite l'emploi de trente-six symboles! Notre connaissance des mathématiques égyptiennes ne repose que sur un très petit nombre de documents, parmi lesquels le fameux *Papyrus Rhind* (BM 10057 et BM 10058), copié vers 1650 av. J.-C. par le scribe Ahmès, à partir d'un texte datant du dix-neuvième siècle avant notre ère. C'est l'un des plus intéressants papyrus mathématiques ; il contient fort probablement quatre-vingt-quatre problèmes d'arithmétique et de géométrie (avec solutions) ainsi qu'une table de décomposition de certaines fractions en somme de fractions dont les numérateurs valent 1 et dont les dénominateurs sont tous différents deux à deux (fractions dites *égyptiennes*). Ce type de fraction est, comme on le verra, lié à la méthode utilisée par les calculateurs égyptiens pour opérer une division.

Le papyrus fut découvert vers le milieu du siècle dernier dans une petite construction proche du temple mortuaire de Ramsès II. Il fut acheté à Luxor, avec d'autres antiquités égyptiennes -- notamment le *Rouleau de cuir des Mathématiques égyptiennes* (BM 10250) -- en 1858 par l'écossais Alexander Henry Rhind (1833-1863). Ce jeune avocat était venu là pour raisons de santé. Les deux documents précités furent vendus en 1865 au *British Museum* où on peut toujours les voir.

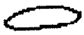
Le système de numération égyptien est *décimal non positionnel.* En lecture de droite à gauche, les symboles suivants sont utilisés :

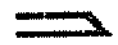


[7] Il n'est nullement question, bien sûr, de faire un exposé historique complet de ces systèmes; ceux qui désirent en savoir plus consulteront entre autres :
G.Ifrah, **Histoire universelle des chiffres**, Laffont, 1994.
G.Guitel, **Histoire comparée des numérations écrites**, Flammarion, 1975.

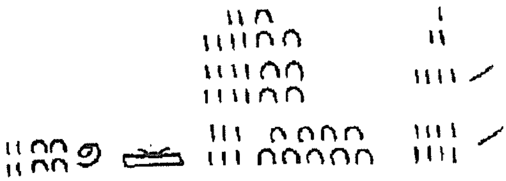
Exemple :  = 12 345

Fractions :  $= \frac{1}{3}$

 **se prononce** *rè* **et signifie ouverture, bouche, porte.**

Il existe deux exceptions :  $= \frac{2}{3}$ **et**  $= \frac{1}{2}$

Les Egyptiens opéraient la multiplication par « duplications » successives. Le problème 32 du papyrus Rhind illustre cette « technique » pour calculer 12 x 12.



	1	12
	2	24
/	4	48
/	8	96 le résultat est 144

Le scribe coche les « composantes » en base 2 du multiplicateur.

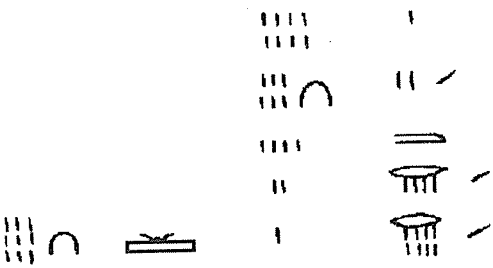
 Ce symbole signifie: « le résultat est ».

Quant à la division, le scribe la réalise en utilisant le fait que c'est l'opération inverse de la multiplication. Considérons le problème 24 du *Papyrus Rhind*, qui s'énonce : *une quantité plus son septième fait 19; que vaut la quantité?*

Pour le résoudre, le scribe utilise -on est en tout cas tenté de le croire- la méthode de *fausse position simple* ; il suppose que la solution est 7 (pourquoi ?), ce qui donne

$$\text{quantité} + \frac{1}{7}\ \text{quantité} = 8 \qquad \text{(et non 19)}$$

et ainsi, autant de fois il faut multiplier 8 pour obtenir 19, autant de fois il faudra multiplier 7 pour obtenir la réponse au problème. Ceci conduit le scribe à devoir diviser 19 par 8. Voyons comment il procède :



	1	8
/	2	16
	$\frac{1}{2}$	4
/	$\frac{1}{4}$	2
/	$\frac{1}{8}$	1 le résultat est 19.

Le résultat de la division de 19 par 8 est ainsi $2\frac{1}{4}\frac{1}{8}$. Nous remarquons le rôle des «fractions égyptiennes». Maintenant, il reste au scribe à multiplier 7 par ce résultat ; il obtiendra $16\frac{1}{2}\frac{1}{8}$ qui est la solution du problème 24.[8]

Intéressons-nous à un passé plus récent. Chacun de nous a entendu parler de numération «littérale», entre autres chez les Grecs et les Latins. Considérons donc l'exemple le plus connu, celui des «chiffres romains» en oubliant bien sûr tout à fait notre système à nous et essayons d'opérer - sans tricher - l'addition suivante :

CCCLXXI + MCCVII + MDCXXXVI + DVIII

Même avec l'écriture ci-dessous, la réponse correcte semble tenir du « miracle » :

			C	C	C	L	X	X	I
				M	C	C	V	I	I
		M	D	C	X	X	X	V	I
					D	V	I	I	I
M	M	M	D	C	C	X	X	I	I

Le système de numération utilisé par les Grecs n'était pas, lui non plus, positionnel. Les unités de 1 à 9, dizaines de 10 à 90 et centaines de 100 à 900 étaient simplement représentées par les lettres de l'alphabet grec, comme le montre le tableau ci-contre. Cet alphabet ne comptant que vingt-quatre lettres, les Grecs reprirent de l'alphabet phénicien les lettres qu'ils n'avaient pas encore utilisées. Ainsi le *waw*, qui n'avait servi que dans certains alphabets grecs très archaïques, nota le 6. Il prit plus tard le nom de *stigma*, du fait de sa ressemblance avec la ligature byzantine de *sigma* et *tau*. Le *qoppa*, qui dérive du *qof* phénicien sert à noter 90 et le *sade*, qui servait dans certains alphabets archaïques à noter le son « *s*» mais fut supplanté rapidement par le *sigma* dérivant du *sin* phénicien, a été réutilisé pour noter 900. Son nom actuel de *sampi* provient de sa ressemblance avec la ligature byzantine entre *sigma* et *pi*.

1	α´	70	ο´
2	β´	80	π´
3	γ´	90	ϙ´
4	δ´	100	ρ´
5	ε´	101	ρα´
6	ϛ´	102	ρβ´
7	ζ´	200	σ´
8	η´	300	τ´
9	θ´	400	υ´
10	ι´	500	φ´
11	ια´	600	χ´
12	ιβ´	700	ψ´
13	ιγ´	800	ω´
14	ιδ´	900	ϡ´
15	ιε´	1000	,α
16	ιϛ´	2000	,β
17	ιζ´	3000	,γ
18	ιη´	4000	,δ
19	ιθ´	5000	,ε
20	κ´	6000	,ϛ
21	κα´	7000	,ζ
22	κβ´	8000	,η
30	λ´	9000	,θ
40	μ´	10000	,ι
50	ν´	20000	,κ
60	ξ´	100000	,ρ

Les «mots» ainsi formés étaient pourvus d'un signe diacritique (') en haut à droite ou surmontés d'une barre horizontale pour les distinguer du texte grec lui-même. Au-delà de 1000, on recommençait avec α, pourvu cette fois d'un signe en bas à gauche. Ce système aurait pu être appliqué jusqu'à 999.999, mais la myriade (10.000) était la «grande» unité de base pour les Grecs. C'est pourquoi les nombres supérieurs à une myriade étaient plutôt notés de façon à mettre en évidence le nombre de myriades. Ainsi, 424.281 était noté: $\overset{\mu\beta}{M}$,δσπα', soit quarante-deux <u>myriades</u> et quatre mille deux cent quatre-vingt-un. Cette notation facilitait la lecture, comme le fait notre point quand nous lisons quatre cent vingt-quatre <u>mille</u> deux cent quatre-vingt-un.

[8] Pour d'autres exemples, on se reportera au livret accompagnant le film vidéo **Les comptes de Bastet** réalisé par l'IREM de Toulouse.

Ces exemples permettent de mettre en évidence quelques réalités historiques :

- le peu de progrès effectué dans l'art du calcul;
- la raison des techniques de multiplication et division par « duplications» successives (cf. Egypte);
- la nécessité d'utiliser des auxiliaires de calcul (abaque, boulier, ...) même pour résoudre des problèmes qui nous paraissent élémentaires;
- la considération que le commun des mortels avait pour les « abacistes », etc...

La découverte du principe de position n'a manifestement pas été évidente puisqu'elle a échappé à pas mal de civilisations. Le monde occidental a dû attendre qu'il lui fût transmis par les Arabes, qui étaient eux-mêmes allés le «pirater» chez les Indiens. Avant cela, on trouve ce principe positionnel chez les savants de Babylone (-2000 av.J.-C.), chez les astronomes Mayas, sans doute à l'époque dite classique, entre le troisième et le neuvième siècle de notre ère, ainsi que chez les savants chinois, un peu avant le début de notre ère. Ces trois systèmes étaient cependant assez imparfaits en comparaison de la numération indienne d'où est issue la nôtre.

G.Ifrah signale que la première numération positionnelle écrite de base 10, dont les symboles ont préfiguré nos chiffres actuels, est née en Inde septentrionale voici près de quinze siècles; on trouve ces symboles, dit-il, dans des gravures sur cuivre (chartes légales rédigées en sanskrit). De nos jours, l'authenticité de ces documents sur cuivre est contestée. La prudence et l'honnêteté de l'historien des sciences (modèle fin de vingtième siècle) l'engagent plutôt à situer cette numération dans une fourchette allant du cinquième au huitième siècles.

C'est probablement Abdallah Mûhammad ibn Mûsâ al-Khwarîzmî al-Magûsî (v.780--v.850), savant d'origine persane ayant vécu à la Cour du Calife abbasside al-Ma'mûn, qui contribua le premier à faire connaître, aux Arabes d'abord, aux peuples de l'Occident chrétien ensuite, la numération indienne positionnelle. Son traité d'arithmétique (al-Hisab al-Hind c'est-à-dire *le Calcul à l'indienne*) est en effet le premier ouvrage arabe connu dans lequel sont développés cette numération et le calcul selon la méthode des Indiens. La seule copie qu'on en connaisse à l'heure actuelle est le manuscrit Cambridge Ii.Vi.5 (XIVè siècle) conservé à la Bibliothèque de l'Université de Cambridge. Nous donnons ci-dessous la traduction française du folio 104 de ce manuscrit, établie à partir de la traduction anglaise. Une des caractéristiques du manuscrit est que les «chiffres nouveaux» ne sont en général pas transcrits: il y a des «blancs» dans le manuscrit. Pourquoi?

Chez nous, cette numération ne s'est imposée que fort lentement: il est toujours très difficile de bouleverser les habitudes. De plus, l'usage de ces nouveaux chiffres est désapprouvé par le «Pouvoir», peut-être simplement parce qu'ils nous viennent tout droit de chez les «Infidèles». Une autre raison, sans doute de la méfiance à leur égard: leur forme n'est pas bien fixée! La responsabilité en incombe peut-être à Gerbert d'Aurillac. Né en Aquitaine vers 945, ce dernier étudia les mathématiques et l'astronomie lors d'un séjour en Espagne. Moine, il termina sa vie comme pape (celui de l'an mille!) sous le nom de Sylvestre II (de 999 à 1003). Il est notamment «l'instigateur» d'un abaque à jetons (*apices)* où les *calculi* de valeur 1 étaient remplacés par lesdits *apices* sur lesquels il y avait un chiffre (indo-arabe). La forme ronde de ces jetons leur permettait d'accomplir des rotations si bien que l'écriture des chiffres en devenait imprécise. Signalons encore, pour terminer, qu'en ce qui concerne les chiffres dits arabes, il existe deux graphies différentes:

- la graphie hindi (هندي) utilisée par les arabes d'Orient :

١ ٢ ٣ ٤ ٥ ٦ ٧ ٨ ٩ ٠

- la graphie ghubar (غبار) utilisée par les Occidentaux :

1 2 3 4 5 6 7 8 9 0

Le mot arabe *ghûbar* signifie «poussière:» et fait allusion à la poussière dont on remplissait une tablette pour s'en servir comme d'une ardoise (on traçait les chiffres avec les doigts dans la poussière de la tablette.)

Texte I : *Thus Spake al-Khwarîzmî: A Translation of the Text of Cambridge University Library Ms.Ii.Vi.5*, by John N. CROSSLEY & Alan S. HENRY, **Historia Mathematica**, 17 (1990), 103-131

Traduction française du folio 104:
[Fol. 104r] Algorizmi a dit: Louange à Dieu, notre guide et défenseur, Lui qui mérite d'une part, qu'on lui rende Son dû, d'autre part, qu'on Le loue sans réserve; supplions-le de nous guider dans le chemin de la rectitude, de nous faire approcher la vérité; de plus, qu'Il nous aide, dans Sa bienveillance, à présenter et à révéler ce qui suit: à propos de la numération des Indiens au moyen de IX symboles (*literae*) grâce auxquels ils proposent leur système général de numération, dans un souci de facilité et de concision, (...)
Algorizmi a dit: ayant remarqué que les Indiens avaient conçu IX symboles pour leur système général de numération, afin de les disposer selon un schéma établi, j'ai voulu révéler, à propos de leur usage, quelque chose qui peut aider ceux qui apprennent, si Dieu le veut.(...)
Ainsi, ils ont conçu IX symboles, dont les formes sont: < 9 8 7 6 5 4 3 2 1 >.(...) Et déjà, j'ai signalé dans le livre d'algèbre et d'al-muqâbala, c'est-à-dire de restauration et d'opposition [Rosen 1831], que tout nombre est composé et obtenu à partir de l'unité. Ainsi, on trouve un dans tout nombre et c'est ce qui est dit dans un autre traité d'arithmétique [Aristote, *Métaphysique*, 987b]. Car un est la racine de tout nombre et est un nombre «à part». C'est la racine du concept de nombre parce qu'on trouve tout nombre grâce à lui. Mais c'est un nombre «à part» parce qu'on le trouve à partir de lui-même, c'est-à-dire sans l'aide d'aucun autre nombre. Mais le reste des nombres ne peut être trouvé sans le «un». Car lorsqu'on dit un, puisqu'on le trouve à partir de lui-même, il ne dépend d'aucun autre nombre. Mais le reste des nombres nécessite {nécessite} un, parce qu'on ne peut pas dire deux ou trois si l'on de dispose pas, a priori, de un. Un nombre n'est ainsi rien d'autre qu'une collection d'unités et, comme nous l'avons dit, on ne peut dire ni deux, ni trois si un ne précède; nous n'avons en fait pas discuté d'un mot mais d'un objet. Car [Fol.104v] deux ou trois ne peuvent exister si on ignore un. Mais un peut exister sans le deuxième ou le troisième. Ainsi, deux n'est rien d'autre que le double ou la répétition de un; et de la même manière, trois n'est rien d'autre que le triple de cette même unité; et c'est ainsi que tu dois l'entendre pour le reste des nombres. Mais maintenant, revenons-en au traité.
J'ai trouvé, a dit Algorizmi, que tout ce qui peut s'exprimer en termes de nombre, est également ce qui va depuis un jusqu'à IX, c'est-à-dire ce qui est entre IX et un; ainsi, un est doublé et il en vient deux et de la même manière, un est triplé et il en vient trois; et ainsi de suite pour le reste jusqu'à IX.
¶ Alors on met X à la place de un et on double et on triple X comme on l'avait fait pour un; de son double, il vient XX, de son triple, XXX, et ainsi de suite jusqu'à XC ¶. Après ceci, C (cent) recule à la place de un et est doublé, triplé, exactement comme il a été fait dans le cas de un et de X; et il en viendra CC et CCC etc. jusqu'à DCCCC (neuf cents). De nouveau, mille est mis à la place de un et en doublant et triplant, comme nous l'avons dit, il vient IImille et IIImille etc. jusqu'à l'infini, en utilisant cette méthode. Et j'ai remarqué que les Indiens travaillaient selon les positions ci-dessous: la première de ces positions est celle des unités, ...

Fibonacci (Léonard de Pise) a, lui aussi, donné une description de la notation décimale positionnelle des nombres dans son célèbre *Liber Abbaci*:

Texte II : *Liber Abbaci compositus a Leonardo filiorum Bonaccii pisano in anno m cc ii et correctus ab eodem in (m cc) xx viii.*

Incipit capitulum primum.

Nouem figure yndorum hee sunt .9 8 7 6 5 4 3 2 1. Cum his itaque nouem figuris et cum hoc si(n)gno .0. quod arabice zephyrum appellatur scribitur quilibet numerus ut inferius demonstratur. Nam numerus est unitas perfusa collectio siue congregatio unitatum que per suos in infinitum ascendit gradus. Ex quibus primus ex unitatibus que sunt ab uno usque in decem constat. Secundus ex decenis que sunt usque in centum sit. Tertius sit ex centenis que sunt ad centum usque in mille. Quartus sit ex millenis que sunt a mille usque in decem milia et sic sequentium graduum in infinitum quilibet ex decuplo sui antecedentis constat. Primus gradus in descriptione numerorum incipit a destera. Secundus uero uersus sinistram sequitur primum. Tertius secundum sequitur. Quartus tertium. Et quintus quartum. Et semper sic uersus sinistram gradus gradum sequitur. Figura itaque que in primo reperitur gradu se ipsam representat hoc est si in primo gradu fuerit figura unitatis unum representat. Si binarii duo si ternarii tria. Et ita per ordinem que secuntur usque si nouenarii .nouem. Figure quidem que in secundo gradu fuerint tot decenas representant quot in primo unitates. Hoc est si figura unitatis secundum occupat gradum denotat decem si binarii viginti si ternarii triginta et si nouenarii nonaginta.
Figura namque que in tertio fuerit gradu tot centenas denotat quot in secundo decenas uel in primo unitates ut si figura unitatis .centum. ...

Traduction

Ici commence le chapitre un.

Il existe neuf figures indiennes .9 8 7 6 5 4 3 2 1. Et ainsi, avec ces neuf figures et avec le symbole .0. que les Arabes appellent zéphyr, on écrit n'importe quel nombre comme il est montré ci-dessous. Car tout nombre est unité ou collection abondante c'est-à-dire ensemble d'unités qui s'élève jusqu'à l'infini par la position de celles-ci.
La première de ces positions est constituée des unités qui vont depuis un jusqu'à dix. La seconde se compose des dizaines qui s'étendent de dix à cent. La troisième, des centaines qui vont de cent à mille. La quatrième, des milliers, depuis mille jusqu'à dix mille et ainsi, dans l'infinité des positions suivantes, n'importe quelle figure représente le décuple de son antécédent. La première position dans l'écriture des nombres commence à droite. La seconde, en fait, suit la première dans la direction de la gauche. La troisième suit la deuxième; la quatrième, la troisième; la cinquième, la quatrième et ainsi, toujours vers la gauche, une position suit une position. C'est ainsi que la figure qu'on trouve en première position est l'image d'elle-même, c'est-à-dire que si, en première position, on a mis la figure de l'unité, elle représente un; si on a mis celle des deux unités, deux; si c'est celle des trois unités, trois et ainsi, elles se suivent dans l'ordre jusqu'à neuf unités; mais ces neuf figures, mises en deuxième position, représentent autant de dizaines que d'unités en première position c'est-à-dire que, si la figure de l'unité occupe la deuxième position, elle désigne dix; si c'est celle des deux unités, vingt; si c'est celle des trois unités, trente; si c'est celle des neuf unités, nonante.
Et de fait, la figure qu'on a mise en troisième position désigne autant de centaines que de dizaines en deuxième position ou d'unités en première; ainsi, si la figure est celle des unités, elle représente cent

3. REPRESENTATIONS DES FRACTIONS (CONTINUES ET UNITAIRES) ET ALGORITHME D'EUCLIDE DANS QUELQUES TEXTES LATINS MEDIEVAUX.

Les textes grecs α à δ nous avaient introduit à la problématique de la classification des nombres en Grèce ancienne. La raison de cette classification, différente de la nôtre exprimée dans les systèmes positionnels, réside dans l'algorithme d'Euclide dont nous aborderons la description à l'aide des fractions continues. Les textes grecs qui utilisent des fractions étant rares[9], nous utiliserons encore des extraits du Liber Abbaci pour illustrer certaines représentations historiques de fractions continues et unitaires (égyptiennes).
Disons tout de suite que la notation des fractions chez Fibonacci peut, a priori, sembler assez curieuse. En fait, elle est liée à la technique de calcul utilisée pour opérer des divisions. par exemple, pour diviser 224 par 75, Fibonaccicommence par rechercher la *regula* de 75 c'est-à-dire une espèce de décomposition de 75 en facteurs premiers (décomposition qui privilégie cependant les puissances de 2 constituées d'un seul chiffre, de même que le facteur 10).

$$75 = 3x5x5$$

ce que Fibonacci note $\frac{1.0.0}{3.5.5}$ (Attention: les points séparent, ils ne multiplient pas)

La division de 224 par 75 se présente alors ainsi:

224÷3 = 74 reste 2
74÷5 = 14 reste 4
14÷5 = 2 reste 4

Fibonacci note le résultat: $\frac{2.4.4}{3.5.5}$ 2, qui signifie:

$$2+\frac{4}{5}+\frac{4}{5x5}+\frac{2}{3x5x5}=2+\frac{4+\frac{4+\frac{2}{3}}{5}}{5}$$ (Ici, les *x* indiquent bien des multiplications)

C'est ce que Léonard de Pise appelle *fractiones in gradibus*.

Un autre exemple: $\frac{1.5..7}{2.6.10}=\frac{7+\frac{5+\frac{1}{2}}{6}}{10}$

Texte III: Liber Abbaci.

...Item si sub quadam alia uirgula sint .2. et .6. et .10. et super .2. sit .1. et super .6. sint .5. et super .10. sint .7. ut hic ostenditur $\frac{1.5..7}{2.6.10}$ septem que sunt super 10 in capite uirgule representant .septem decenas. et .5. que sunt super

Traduction

...De même si sous un certain trait, on a 2, 6 et 10 et que, au-dessus du 2 soit 1, au-dessus du 6, 5 et au-dessus du 10, 7 comme on le montre ici $\frac{1.5..7}{2.6.10}$, le sept qui se trouve au-dessus du 10 au début du trait représente sept dixièmes; le 5

[9] Sur ce sujet, on consultera avec profit les articles de Fowler et Vitrac dans P.Benoît, K.Chemla, J.Ritter (éd.). **Histoires de Fractions, Fractions d'Histoire**, Birkhaüser, 1992.

6 denotant 5 sextas unius decime partis et quod est super 2 denotat medietatem sexte unius decime partis et sic singulariter de singulis intelligatur. Tamen monendum est ut semper minores numeri sint uersus sinistram sub eadem uirgula. Sed si plures fuerint uirgule rupti unius uirgule non respondent ruptis alterius et illa uirgula que est maior pars integri semper est ponenda uersus dexteram manum. Dicuntur quidem fractiones que sunt in una uirgula esse in gradibus. Et est primus gradus earum fractio que est in capite uirge a dextera parte. Secundus est fractio sequens uersus sinistram partem. Uerbi gratia in suprascripta uirga scilicet in $\frac{1.5..7}{2.6.10}$ sunt $\frac{7}{10}$ in primo gradu ipsius uirge. Et $\frac{5}{6}$ sunt in secundo. Et $\frac{1}{2}$ est in tertio hoc est in ultimo gradu eiusdem uirge et sic quot sunt numeri sub uirga tot sunt gradus eiusdem...

qui est au-dessus du 6 indique cinq sixièmes d'une dixième partie; le 1 qui est au-dessus du 2 signifie la moitié du sixième d'une dixième partie et c'est ainsi qu'il faut l'entendre isolément pour chacun des nombres. Cependant, faisons remarquer que les nombres les plus petits sont toujours à gauche sous un même trait. Mais s'il y a plusieurs traits, les morceaux de l'un des traits n'ont aucun rapport avec les morceaux de l'autre; le trait qui représente la plus grande partie de l'unité doit toujours être placé à main droite. En fait on dit des fractions qui comportent un seul grand trait, qu'elles sont «en degrés». Le premier degré de ces fractions est celui qui se trouve au début du trait, du côté droit. Le second est la fraction qui suit vers la gauche. Par exemple, dans le trait ci-dessus, à savoir $\frac{1.5..7}{2.6.10}$, $\frac{7}{10}$ est le premier degré du grand trait, $\frac{5}{6}$, le deuxième et $\frac{1}{2}$, le troisième, c'est à-dire le dernier degré de ce trait; ainsi, il y a autant de nombres sous un trait que de degrés dans ce trait...

La décomposition d'une fraction en fraction dite *égyptienne* est longtemps restée bien ancrée dans les moeurs; dans le *Liber abbaci*, on trouve encore :

Texte IV: *Liber Abbaci.*

...est huius differentie regula ut diuidas maiorem numerum per minorem et cum ipsa diuisio integra non fuerit considera inter quos duos numeros illa diuisio ceciderit. Si inter 3 et 4 ceciderit scies quia minor numerus de maiori est minus quam $\frac{1}{3}$ et plus quam $\frac{1}{4}$ ipsius. Et si inter 4 et 5 ceciderit erit minus $\frac{1}{4}$ et plus quam $\frac{1}{5}$ et sic intelligas de omnibus duobus numeris inter quos illa diuisio ceciderit deinde accipe maiorem partem que minor numerus fuerit de maiori et residuum quod inde remanebit serua quod si fuerit ex aliqua supradictarum differentiarum operare per eam. Et si illud residuum non fuerit ex aliqua su-

Traduction

... la règle de ce «type» est de diviser le plus grand nombre par le plus petit, et lorsque cette division ne donne pas un entier, tu dois constater entre quels deux nombres elle se situe. Si c'est entre 3 et 4, tu sauras que le plus petit nombre vaut moins que $\frac{1}{3}$ et plus que $\frac{1}{4}$ du plus grand. Si c'est entre 4 et 5, il vaudra moins que $\frac{1}{4}$ et plus que $\frac{1}{5}$; c'est ainsi que tu dois l'entendre en ce qui concerne les deux nombres qui encadrent le résultat de la division; ensuite prends la plus grande partie multiple du plus petit nombre dans le plus grand et ce qui reste, mets-le de côté; ce qui correspond à un des «types» décrits plus haut, tu le traiteras comme il t'a été enseigné. Et si prascriptarum differentiarum. Tunc ex ipso residuo accipies maiorem partem et hoc facies donec remanebunt partes alicuius suradictarum differentiarum uel donec habueris omnes singulares partes que minor fuerit de maiori.

...

ce qui reste ne correspond à aucun des «types» précités, alors prends la plus grande partie de ce résidu; tu agiras ainsi jusqu'à ce qu'il reste des parties d'un des «types » traités ci-dessus ou bien jusqu'à ce que tu aies les parties unitaires du plus petit nombre dans le plus grand

...

...Item hunc eumdem modum de $\frac{17}{29}$ uolumus demonstrare diuisis quidem 29 per 17 exiit 1 et amplius quare cognoscimus $\frac{17}{29}$ magis esse medietate unius integri et notandum est quia tres tertie uel quatuor quarte uel $\frac{5}{5}$ uel $\frac{6}{6}$ faciunt unum integrum similiter $\frac{29}{29}$ faciunt unum integrum ex quibus si acceperimus medietatem scilicet $\frac{1.14}{2.29}$ et extraxerimus eas de $\frac{17}{29}$ remanebunt $\frac{1..2}{2.29}$ hoc est $\frac{5}{58}$ quare $\frac{17}{29}$ sunt $\frac{5}{58}\ \frac{1}{2}$ de quibus $\frac{5}{58}$ oportet facere singulares partes scilicet per hanc eamdem differentiam quare diuide 58 per 5 exibunt 11 et amplius. Unde cognoscitur quod $\frac{1}{12}$ est maior singularis pars que sit in $\frac{5}{58}$ unde accepiatur $\frac{1}{12}$ de $\frac{58}{58}$ scilicet de integro erunt $\frac{5..4}{6.58}$ a quibus usque in $\frac{5}{58}$ deest $\frac{1..0}{6.58}$ hoc est $\frac{1}{348}$ et sic habebis pro $\frac{17}{29}$ tres singulares partes $\frac{1}{348}\ \frac{1}{12}\ \frac{1}{2}$.

... De même, par cette méthode, nous voulons présenter $\frac{17}{29}$. Après avoir divisé 29 par 17, il vient 1 et plus; c'est pourquoi nous savons que $\frac{17}{29}$ valent plus que la moitié d'une unité; remarquons que trois tiers ou quatre quarts ou $\frac{5}{5}$ ou $\frac{6}{6}$ font une unité; semblablement, $\frac{29}{29}$ font une unité de laquelle, si nous prenons la moitié, à savoir $\frac{1.14}{2.29}$ et si nous l'extrayons de $\frac{17}{29}$, il restera $\frac{1..2}{2.29}\ \frac{5}{58}$; c'est pourquoi $\frac{17}{29}$ font $\frac{5}{58}\ \frac{1}{2}$; avec ces $\frac{5}{58}$ il faut faire des parties unitaires, bien entendu, en utilisant le même type de méthode; pour cette raison, on divise 58 par 5; il viendra 11 et plus. D'où on sait que $\frac{1}{12}$ est la plus grande partie unitaire qui se trouve dans $\frac{5}{58}$ et ainsi, on prend $\frac{1}{12}$ de $\frac{58}{58}$, à savoir de l'unité; il viendra $\frac{5..4}{6.58}$ pour lesquels, jusqu'à $\frac{5}{58}$ il manque $\frac{1..0}{6.58}$, c'est-à-dire $\frac{1}{348}$ et ainsi, tu auras pour $\frac{17}{29}$ trois parties unitaires : $\frac{1}{348}\ \frac{1}{12}\ \frac{1}{2}$.

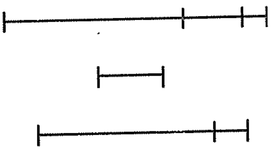
Venons-en maintenant à l'algorithme d'Euclide qui est une procédure basée sur des soustractions successives et réciproques et qui se ramène, en fait, à une suite de divisions. Ce processus porte le nom d' *anthyphérèse*, (du grec ἀνθυφαιρέω,ῶ: ἀντί -idée d'échange, en face de-, ὑπό -sous, en dessous- et αἱρέω,ῶ -enlever, supprimer, soustraire-) c'est-à-dire *soustraire graduellement et réciproquement*.

Cette idée est développée dans les propositions 1 et 2 du Livre VII des *Eléments* d' Euclide. On retrouve encore l'anthyphérèse au Livre 10, mais elle est appliquée là aux grandeurs géométriques.

Le texte V est extrait de la version II d'Adelard de Bath des *Eléments* d'Euclide; il date du douzième siècle; c'est l'un des textes les plus connus parmi Adelard de Bath, version I, Hermann de Carinthie et Gérard de Crémone. A l'heure actuelle, certains historiens des sciences attribuent cette version à Robert de Chester (vers 1140). Le texte qui suit a été établi à partir de soixante-et-un manuscrits (Birkhaüser, 1992, edited by Busard & Folkerts).

Texte V: Euclide, *Eléments* (version latine)

<VII.1> Si a maiore detrahatur minor donec minus eo supersit, ac deinde de minore ipsum reliquum donec minus eo relinquatur, itemque a reliquo primo reliquum secundum quousque eo minus supersit, atque in huiuscemodi continua detraccione nullus fuerit reliquus qui ante relictum numeret usque ad unitatem, eos duos numeros inequales contra se primos esse necesse est.



Ut autem non solum intellectui, verum eciam oculis pateat quod dicitur, huiusmodi numeri inequales duabus lineis figurentur, maiorque illorum numerorum ubicumque minoris numeracionem deficere per ypotesim proponi libeat resecetur. Similiter et minor secundum mensuracionem eius quod de maiore superfuerit, puncto signetur, sed et reliquum primum ad modum reliqui secundi et ad hunc modum donec libeat finem detraccionis facere ponendo tandem reliquam porciunculam esse unitatem. Hac igitur disposicione premissa indirecta raciocinatione proposicio roboretur, scilicet numeros illos esse incommensurabiles, hoc modo. Si enim fieri potest, sit numerus unus amborum mensura communis qui et ipse lineuncula indivisa subnotetur. Hic igitur si minorem numerat, tunc et de maiore quantum minor numerabat. Sed si totum maiorem numerat

Traduction

<VII.1> Si d'un plus grand (nombre), on enlève un plus petit jusqu'à obtenir un reste plus petit; ensuite, du plus petit, on retranche ce reste jusqu'à un reste plus petit et de même, du premier reste, on ôte le second jusqu'à ce que le reliquat soit plus petit et si la soustraction continuelle de la même manière ne laisse aucun reste qui mesure le reste qui le précède et cela, jusqu'à ce qu'on atteigne l'unité, nécessairement, les deux nombres inégaux sont premiers entre eux.

...

Ainsi, pour ouvrir non seulement à l'intelligence, mais certainement aux yeux ce qui vient d'être dit, représentons les nombres inégaux, de cette manière, par deux lignes; que le plus grand de ces nombres soit toujours diminué du plus petit et que, par l'hypothèse proposée, la mesure du plus petit fasse toujours défaut. Semblablement, avec le plus petit, selon sa mesure, on marque d'un point ce qu'il reste du plus grand et on continue ainsi à passer du premier reste à la mesure du second et à cette mesure qui marque la fin du retranchement tout en sachant bien que la petite portion qui restera sera l'unité. Alors, à partir de cette disposition préalable, grâce à un raisonnement indirect, on démontre la proposition, à savoir que les nombres sont incommensurables. En effet, s'il peut arriver qu'un nombre soit commune mesure des deux, notons-le par une ligne non divisée. Ainsi donc, puisque celui-ci[10] mesure le plus petit et que le plus petit mesurait une partie du plus grand mais que celui-ci mesure le plus

[10] «celui-ci» désigne systématiquement le nombre représenté par la ligne non divisée.

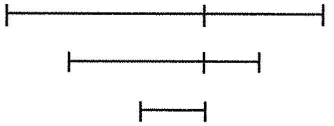
(concessum est enim ambos numerare), numerabit et reliquum. Quare et de minore quantum reliquum ipsum maioris numerabat. Sed quia totum minorem, numerabit et reliquum. Quare et de reliquo maioris primo videlicet quantum minoris reliquum numerabat. Sed quia totum maioris reliquum, numerabit et reliquum reliqui. Sic igitur ex necessitate convincitur unitatem numero illo numerari et esse numerum. Quod est impossibile. Necesse est igitur numeros propositos esse incommensurabiles.

grand tout entier (car on l'a supposé mesurer les deux nombres), il mesurera le reste (du plus grand). Et parce que le reste du plus grand mesurait une partie du plus petit, mais que celui-ci mesurait tout le plus petit, il mesurera aussi le reste (du plus petit). Et parce que le reste du plus petit mesurait une partie, évidemment du premier reste du plus grand mais que celui-ci mesurait tout le reste du plus grand, il mesurera aussi le reste du reste. Ainsi donc, on en arrive à constater que l'unité est mesurée par ce nombre et (en fait) c'est un nombre, ce qui est impossible. Il faut donc nécessairement que les deux nombres proposés soient incommensurables.

<VII.2> Propositis duobus numeris ad invicem compositis maximum numerum communem eos numerantem invenire. <Corollarium> Unde eciam manifestum est quia omnis numerus duos numeros numerans numerat numerum maximum ambos numerantem.

<VII.2> Étant donnés deux nombres non premiers entre eux, trouver le plus grand nombre qui en soit une commune mesure. <Corollaire> D'où, de plus il est évident que tout nombre mesurant deux nombres mesure le plus grand nombre mesurant ces deux nombres.

...



Si minor illorum maiorem numeret, patet, quia ipse est quem queris, quoniam et ipse se numerat, nec maior eo eum numerare posset. Quodsi minor maiorem non numerat, fiat mutua eorum predicto modo detraccio. Eritque necessarium aliquem ante unitatem reliquum inveniri qui proximum antea relictum numerat, quoniam positi sunt commensurabiles esse. Alioquin incommensurabiles essent, ut premissa asserebat. Hic igitur, qui primus occurret, ipse est quem queris. Alioquin eo maior per premisse argumentacionis similitudinem ipsum eum numerare convicetur. Quod est impossibile....

Si le plus petit de ces nombres mesure le plus grand, il est clair que c'est celui que tu recherches, puisque lui-même se mesure et qu'il n'y en a pas de plus grand qui puisse le mesurer. Mais si le plus petit ne mesure pas le plus grand, opère le retranchement entre eux selon la méthode qui vient d'être exposée. Et nécessairement, on trouvera un reste avant l'unité qui mesure celui qui le précède puisqu'on a supposé les nombres commensurables. Sans quoi, ils seraient incommensurables, comme on l'avait montré plus haut. Ainsi donc, celui qui le premier se présente est celui-là que tu cherches. Sans quoi, on en arriverait à montrer, en utilisant une argumentation semblable à celle qui précède, qu'un plus grand (nombre) mesure celui-là. Ce qui est impossible.

...

Exemple : pgcd(316,88) = 4 car

316 - 88 = 228
228 - 88 = 140
140 - 88 = 52 (< 88)
88 - 52 = 36 (< 52)
52 - 36 = 16 (< 36)
36 - 16 = 20
20 - 16 = 4 (< 16)

16 - 4 = 12
12 - 4 = 8
8 - $\underline{4}$ = $\underline{4}$

4. FRACTIONS CONTINUES, REDUITES ET EXPLOITATION AU COURS DE MATH.

Considérons encore l'exemple suivant emprunté à Aristarque de Samos (env. -310 à -230). Appliquons donc l'anthyphérèse à 7921 : 4050.

$$\begin{aligned}
7921 &= \underline{1} \times 4050 + 3871\\
4050 &= \underline{1} \times 3871 + 179\\
3871 &= \underline{21} \times 179 + 112\\
179 &= \underline{1} \times 112 + 67\\
112 &= \underline{1} \times 67 + 45\\
67 &= \underline{1} \times 45 + 22\\
45 &= \underline{2} \times 22 + 1\\
22 &= \underline{22} \times 1 + 0
\end{aligned}$$

C'est-à-dire 7921 : 4050 = [1,1,21,1,1,1,2,22] = $1 + \cfrac{1}{1+\cfrac{1}{21+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{22}}}}}}}$

lorsqu'on exprime l'anthyphérèse en termes de fraction continue.

Si on tronque l'anthyphérèse (calcul des réduites de la fraction continue),

$$[1] = 1 \qquad [1,1] = 1 + \frac{1}{1} = 2$$

$$[1,1,21] = 1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{21}} = 1+\cfrac{1}{\cfrac{22}{21}} = 1+\frac{21}{22} = \frac{43}{22}$$

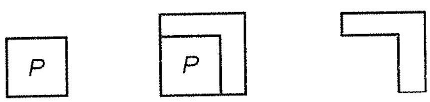
$$[1,1,21,1] = 1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{21+\cfrac{1}{1}}} = 1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{22}} = 1+\frac{22}{23} = \frac{45}{23}$$

Les réduites d'une fraction continue (ou d'un nombre quelconque développé en fraction continue) convergent vers la valeur exacte de cette fraction alternativement par défaut et par excès. On a ici:

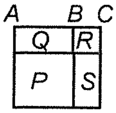
$$1 < \frac{43}{22} < \ldots\ldots < \frac{7921}{4050} < \ldots\ldots < \frac{45}{23} < 2$$

On peut aussi s'attaquer à $\sqrt{2}$ par exemple. On arrive à 1+ $\sqrt{2}$ = [2,2,2,...] ou $\sqrt{2}$ =[1,2,2,...] notamment grâce à la technique du **gnomon** illustrée ci-dessous:

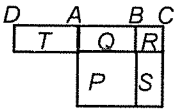
P représente l'aire du carré unité et le «grand» carré est celui de côté $\sqrt{2}$



= gnomon



$AB = 1 \quad AC = \sqrt{2} \quad BC < AB$
car si $BC = AB$, le gnomon vaut $3P$, ce qui est trop.



$AD = AB$ donc $DC = 1 + \sqrt{2}$ $\quad DC/AB = (1 + \sqrt{2}) : 1 = 1 + \sqrt{2}$
Or $DC - 2.AB = BC$ avec $BC < AB$
Ainsi, $DC/AB = 2 + BC/AB = [2, AB/BC]$
Mais $AB/BC = DC/AB$ (c'est-à-dire $AB^2 = DC.BC$),

et finalement:

$$AB^2 = P = DC.BC = T + Q + R = S + Q + R \quad (car\ T{=}S)$$

Le «grand» carré a une aire dont la mesure est le double de celle de P; ceci achève la démonstration.

En classe, les fractions continues constituent un excellent moyen d'amener les élèves à manipuler les approximations, les suites de nombres ou encore les équations du second degré.

La machine à calculer permet très facilement, à l'aide de deux opérations seulement - ôter la partie entière et inverser ensuite- de trouver le développement en fraction continue d'un nombre rationnel ou de prédire celui d'un irrationnel solution d'une équation du second degré (*dynamis* de Théétète).

Ainsi, on calcule aisément à la machine le développement en fraction continue de √2, obtenu plus haut par le *gnomon*. Pour √3, il vient :

$$\sqrt{3} = 1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{1 + \dots}}}}} = [1,1,2,1,2,1,\dots]$$

Remarquons que $\sqrt[3]{2}$ = [1,3,1,5,1,1,4,1,1,8,1,14,1,7,1,...] pas de période!

Les réduites de ces fractions continues permettent de construire des suites convergentes de nombres rationnels, que l'on pourra utiliser par la suite pour étudier les notions de limite ou de convergence de suites. Ainsi, on calcule aisément que la fraction continue (du développement de√2), supposée périodique, a pour suite de réduites $1, \frac{3}{2}, \frac{7}{5}, \frac{17}{12}, \frac{41}{29}, \dots$ mais très vite, il s'avère nécessaire (par exemple pour prouver la convergence vers √2 de la suite) de trouver une «formule» permettant de calculer directement une réduite à partir de la précédente. Ce défi, que les élèves d'aujourd'hui ne manquent jamais de relever, a bien entendu aussi été envisagé par les Grecs, comme le montre le texte suivant:

Texte ε: Proclus, *Commentaire à la République de Platon*, éd. Kroll, ii.27.11-22.

Προετίθεσαν δὲ οἱ Πυθαγόρειοι τούτου τοιόνδε θεώρημα γλαφυρὸν περὶ τῶν διαμέτρων καὶ πλευρῶν, ὅτι ἡ μὲν διάμετρος προσλαβοῦσα τὴν πλευράν, ἧς ἐστιν διάμετρος, γίνεται πλευρά, ἡ δὲ

Traduction

Les Pythagoriciens proposaient (de cela), à propos des diagonales et des côtés, le théorème élégant que voici~: la diagonale, lorsqu'elle s'est adjointe le côté dont elle est la diagonale, devient côté, tandis que le côté, lorsqu'il a été πλευρὰ ἑαυτῇ συντεθεῖσα καὶ προσλαβοῦσα τὴν διάμετρον τὴν ἑαυτῆς γίνεται διάμετρος. καὶ τοῦτο δείκνυται διὰ τῶν ἐν τῷ δευτέρῳ Στοιχείων γραμμικῶς ἀπ'ἐκείνου. ἐὰν εὐθεῖα τμηθῇ δίχα, προσλάβῃ δὲ εὐθεῖαν, τὸ ἀπὸ τῆς ὅλης σὺν τῇ προσκειμένῃ καὶ τὸ ἀπὸ ταύτης μόνης τετράγωνα διπλάασια τοῦ τε ἀπὸ τῆς ἡμισείας καὶ τοῦ ἀπὸ τῆς συγκειμένης ἐκ τῆς ἡμισείας καὶ τῆς προσληφθείσης.

ajouté à lui-même et s'est adjoint sa diagonale, devient diagonale.
Et cela est démontré à l'aide des \'Eléments, dans le deuxième /livre/, par lui (Euclide).
Si une droite est coupée en deux et /si/ on ajoute une droite, les carrés /construits, l'un/ à partir de la /droite/ entière avec la /droite/ ajoutée et /l'autre/ à partir de cette dernière seule /sont/ doubles des /carrés construits, l'un/ à partir de la moitié /de la droite de départ/ et /l'autre/ à partir de /la droite/ composée de la moitié et de la /droite/ ajoutée.

La première partie du texte concerne ce que les Grecs nommaient les valeurs rationnelles de la diagonale du carré et permet de construire une suite de «carrés» dont le rapport de la diagonale au côté approche $\sqrt{2}$. Ainsi, si un «carré» initial a $c_0 = 1$ pour côté et $d_0 = 1$ pour diagonale, le «carré» suivant aura $c_1 = 1+1=2$ pour côté et $d_1=1+2=3$ pour diagonale, le suivant $c_2=2+3=5$ pour côté et $d_2=2+5=7$ pour diagonale. On reconnaît les réduites de $\sqrt{2}$ avec en prime les relations $c_{n+1} = c_n + d_n$ et $d_{n+1} = 2.c_n + d_n$. Les «carrés» en question ne sont pas des vrais carrés bien entendu (leur diagonale d et leur côté c ne respectent pas la relation $d^2 = 2.c^2$) mais ils s'en approchent aussi près que possible[11] (avec des nombres entiers) puisqu'ils réalisent l'égalité $d^2 - 2.c^2 = \pm 1$. Une telle équation est aujourd'hui appelée équation de Pell-Fermat (forme générale $x^2 - D.y^2 = \pm 1$) du nom du premier mathématicien qui les a résolues, Fermat, et de celui qui les a diffusées, Pell.

On montre que l'équation de Pell-Fermat n'a pas de solutions entières x,y si D est un carré parfait et en a une infinité si D n'est pas un carré parfait (ce qui démontre définitivement que Théétète avait raison dans son classement des nombres). Plus précisément, on démontre que l'équation $x^2 - D.y^2 = \pm 1$ a une infinité de solutions entières si le développement en fraction continue de $\sqrt{D}$ a une période impaire (c'est le cas de $\sqrt{2}$ puisque seuls des 1 apparaissent sous les barres de fraction). Par contre, si la période de $\sqrt{D}$ est paire, alors seule l'équation $x^2 - D.y^2 = 1$ a des solutions entières; c'est le cas de $\sqrt{3}$.

La seconde partie du texte fait référence à un théorème (II.10) des *Eléments* d' Euclide qui permet de démontrer que des nombres construits selon les relations $c_{n+1} = c_n + d_n$ et $d_{n+1} = 2.c_n + d_n$ satisfont toujours la relation $c^2_{n+1} - 2.d^2_{n+1} = \pm 1$ si c_0 et d_0 la satisfont.En effet, si l'on nomme $2x$ la longueur de la première droite et y la longueur de la seconde, le théorème est équivalent à:

$$(2x + y)^2 + y^2 = 2[x^2 + (x + y)^2], \text{ c'est-à-dire } \quad y^2 - 2x^2 = 2(x + y)^2 - (2x + y)^2$$

Si $c_0 = 1$ joue le rôle de x et $d_0 = 1$ celui de y, alors on a $y^2 - 2x^2 = -1$ et donc:

$$(2\,c_0 + d_0)^2 - 2(c_0 + d_0)^2 = d_1^2 - 2\,c_1^2 = 1$$

On remplacera alors x et y par $c_1 = 2$ et $d_1 = 3$, ce qui permettra de démontrer que c_2 et d_2 satisfont l'équation de Pell-Fermat, et ensuite, par récurrence, que c_{n+1} et d_{n+1} la satisfont pour toute valeur de n.

[11] En fait, on démontre que les réduites d'un nombre irrationnel sont, d'une certaine manière, les meilleures approximations rationnelles de ce nombre. pour plus de détails, on peut consulter C.D. Olds, **Continued Fractions**, Random House, Yale University, 1963.

On peut aussi, à un niveau plus élémentaire, envisager de «démontrer» (mais sans entrer dans le problème de la convergence) que la fraction continue [1,2,2,...], supposée périodique, est bien égale à $\sqrt{2}$. Cela se fait à l'aide d'une équation du second degré.

En effet, si $x = 1 + \cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\dots}}$ (x est > 0 mais est-il égal à $\sqrt{2}$?), alors $x = 1 + \dfrac{1}{x+1}$

ou encore $x^2 - 1 = 1$, équation dont la seule solution positive est $x = \sqrt{2}$.

De même, pour $x = 1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{1+\dots}}}}}$, on a $x = 1 + \cfrac{1}{1+\cfrac{1}{x+1}}$, d'où l'on déduira bien entendu $x^2 = 3$.

D'autres fractions continues plus simples comme $1 + \cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\dots}}$ donneront des équations du second degré plus faciles à établir mais nécessitant des élèves l'application de la résolution complète ($b^2 - 4ac$, etc.). En l'occurrence, il s'agit de l'équation $x^2 = x + 1$, dont le nombre d'or et son inverse sont les solutions. Les réduites successives de cette fraction continue sont les rapports de deux nombres consécutifs de la suite de Fibonacci 1,1,2,3,5,8,13,21,...

Enfin, il n'est pas inutile d'aborder aussi en classe la «bonne vieille» méthode d'extraction de racine carrée «à la main», ne serait-ce que pour déstabiliser quelque peu la trop grande confiance que les élèves ont parfois en leur machine à calculer, faire une comparaison entre la manière imprévisible dont les décimales apparaissent et la belle régularité que présentent les fractions continues et montrer finalement que les systèmes de numération que nous employons, aussi parfaits qu'ils soient, ont aussi leurs limites.

Cette méthode d'extraction est liée aux systèmes positionnels, puisque les Indiens l'ont utilisée (elle est décrite dans un texte d'Aryabhatta daté du 5ème siècle d.n.è., dans des termes (le mot sanskrit sthâna 'position' y apparaît) qui font supposer aux historiens des mathématiques (modèle indianiste fin de vingtième siècle) que c'est à cette époque au plus tard qu'il faut faire remonter l'invention du système positionnel décimal par les Indiens) ainsi que les Grecs de l'époque alexandrine, lorsqu'ils commencèrent à utiliser le système de numération sexagésimal babylonien. Théon, dans le texte suivant, exprime en mots le fonctionnement de cette méthode pour la base 60.

Texte ς: Théon d'Alexandrie, *Commentaire à la Syntaxe (Almageste) de Ptolémée*, i.10, éd.Rome, **Studi e Testi**, lxxii (1936), 469.16-473.8.

Ὥστε καὶ καθόλου ἐὰν ζητῶμεν ἀριθμοῦ τινος τὴν τετραγωνικὴν πλευρὰν ἐπιλογίσασθαι, λαμβάνομεν πρῶτον τοῦ σύνεγγυς τετραγώνου ἀριθμοῦ τὴν πλευράν. εἶτα ταύτην διπλασιάσαντες καὶ παρὰ τὸν γινόμενον ἀριθμὸν μερίσαντες τὸν λοιπὸν ἀριθμὸν ἀναλυθέντα εἰς πρῶτα ἑξηκοστά, καὶ ἀπὸ τοῦ ἐκ τῆς παραβολῆς γενομένου ἀφελοῦμεν τετράγωνον, καὶ ἀναλύοντες πάλιν τὰ ὑπολειπόμενα εἰς δεύτερα

Traduction

De sorte que, en général, chaque fois que nous cherchons (à considérer) le côté «carré» d'un certain nombre, nous prenons d'abord le côté du nombre carré tout proche. Ensuite, après avoir doublé ce dernier et avoir divisé par le nombre obtenu le nombre restant résolu en premiers soixantièmes, nous enlevons le carré du rapport obtenu. En exprimant encore le reste en deuxièmes soixantièmes et divisant par le double des parties et soixantièmes, nous aurons au

ἑξηκοστά, καὶ μερίζοντες παρὰ τὸν διπλασίονα τῶν μοιρῶν καὶ ἑξηκοστῶν, ἕξομεν ἔγγιστα τὸν ἐπιζητούμενον τῆς πλευρᾶς τοῦ τετραγώνου χωρίου ἀριθμόν.	plus près le nombre recherché du côté de l'aire carrée.

Voici, traduit en base décimale, le procédé décrit par Théon, appliqué à l'extraction de √200:

calculs	**extraits du texte (« dixièmes » remplace « soixantièmes »)**
200	« côté du nombre carré tout proche » = 14
-196	soustraction du carré (non décrite par Théon, mais sous-entendue par « nombre restant »)
40	« nombre restant résolu en premiers dixièmes »
-1x28	« après avoir doublé ce dernier (2x14 = 28) et avoir divisé par le nombre obtenu le nombre restant résolu en premiers dixièmes (40/28 = 1,...) », étape[12] qui permet d'obtenir 1, mais la soustraction n'est pas décrite par Théon, comme ci-dessus. L'approximation devient 14,1.
120	
-1	« nous enlevons le carré du rapport obtenu »
1190	« nombre restant résolu en premiers dixièmes »
-4x282	« après avoir doublé ce dernier (2x141 = 282) et avoir divisé par le nombre obtenu le nombre restant résolu en premiers dixièmes (1190/282 = 4,...) ». L'approximation devient 14,14.
620	
-16...	« nous enlevons le carré du rapport obtenu »...

[12] Cette étape se présente généralement sous la forme d'un « essai-erreur » dans notre procédé, mais Théon cherche à exposer sa méthode de manière systématique, comme en témoigne aussi la répartition de chacune des étapes de notre procédé (« on ajoute deux zéros , etc. ») en deux étapes de « résolution en premiers dixièmes », l'une pour évaluer le chiffre additionnel de l'approximation suivante et soustraire le double produit, l'autre pour soustraire le carré du chiffre additionnel.