

----- LES ENJEUX ÉPISTÉMOLOGIQUES DES NOMBRES NÉGATIFS -----

GERT SCHUBRING

Dans l'historiographie des mathématiques on était longtemps convaincu que les nombres négatifs étaient bien acceptés comme concepts mathématiques - dès les débuts des Temps Modernes, et plus précisément dès les publications de François Viète. Cependant, plusieurs recherches des dernières années ont montré que ce n'était pas le cas et qu'il fallait jusqu'au 19^{ème} siècle pour arriver à une acceptation générale. Mais, dans ces études, on constate la diversité et la longévité des problèmes avec un étonnement déconcerté: on hésite de croire que des mathématiciens importants étaient incapables de comprendre un concept aussi simple et fondamental. Ce déconcertement est dû à la conception continuiste adoptée, en général, pour concevoir l'évolution des mathématiques dans le temps.

Plus précisément, cette évolution est conçue selon le modèle des trois stades développé par Bachelard et Piaget, et on s'explique les problèmes d'acceptation des nombres négatifs par une "incapacité" de franchir le seuil entre le deuxième et le troisième stade, c'est-à-dire, d'accomplir le passage du stade des opérations concrètes au stade des opérations formelles. On retrouve maintenant presque partout l'expression "stagnation au stade des opérations concrètes" pour expliquer le fait que le concept des nombres négatifs ne fut pas compris (voir Glaeser 1981). Ici, on utilise aussi la notion de 'obstacle' pour qualifier cette incompréhension.

Or, des recherches plus précises montrent que l'histoire du développement conceptuel des nombres négatifs n'était pas un processus continu, un progrès toujours accumulant les acquis des stades antérieurs pour arriver à la notion moderne. Plutôt, on peut constater des ruptures - ruptures qui sont spécifiques pour les cultures particulières. En même temps, on constate des différences bien nettes entre les diverses cultures, même en Europe. Ces résultats amènent donc à ne pas attribuer les problèmes surgis dans l'évolution du concept aux "incapabilités" de quelques personnages, à l'incapacité de penser strictement, etc. Plutôt, ces ruptures constituent des indicateurs marquant des décisions épistémologiques sur la nature des mathématiques, sur son architecture, sur la vue des relations entre l'algèbre et la géométrie, etc. (cf. Schubring 1986).

Une des dimensions mathématiques sous-jacentes à l'émergence du concept du nombre négatif est la transition de la notion de quantité (et de grandeur) comme concept fondamental de toutes les mathématiques à la notion de nombre, qui est aussi fondamentale, mais restreinte à l'algèbre. Cependant, cette différenciation et spécialisation impliquent aussi une applicabilité restreinte des concepts - une perte qui n'a pas été acceptée par tous, en particulier en ce qui concerne l'enseignement. Une telle acceptation dépend donc des conjonctures des valeurs sociales, culturelles et philosophiques.

Suite à ces considérations générales, je veux faire un survol très rapide sur la "pré"-histoire des nombres négatifs:

Le problème en est, tant qu'on s'occupe exclusivement des grandeurs: si on peut admettre des solutions négatives ou non. D'abord, elles sont rejetées comme absurdes, mais aussitôt qu'on s'occupe de problèmes plus abstraits, on desire une "réinterprétation" de la solution. Pour donner un exemple des Indiens: Bhaskara II (autour 1200) n'accepte pas une solution où on utilise -2 comme valeur intermédiaire: dans ce problème, il s'agissait des singes. Mais dans le cas d'un problème géométrique il réinterprète une solution négative comme ayant une autre direction.

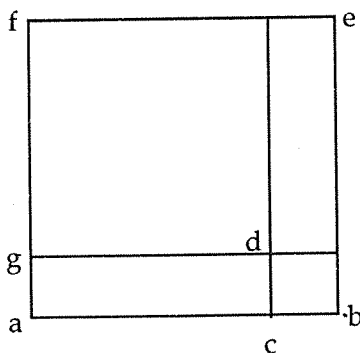
En fait, on trouve des différences entre diverses cultures aussi sur l'acceptabilité des valeurs négatives comme intermédiaires dans le calcul: elles sont acceptées, contrairement aux

Indiens, déjà chez les Chinois, dans le fameux manuel "Chiu-chang suan-shu" (Les Mathématiques présentées en Neuf Chapitres", ca. -250). Aussi, l'Italien Leonardo Pisano (ca. 1170-1250) accepte le calcul pour des stages intermédiaires, mais pas comme une solution définitive (il s'agit toujours de problèmes concrets rencontrés avec des grandeurs). La première acceptation d'une solution négative se trouve dans un manuscrit provençal d'environ 1430, découvert par Sésiano il y a quelques années: il s'agissait de résoudre un système d'équations linéaires avec des nombres purs (cf. Sesiano 1984)

L'étape très importante qui suit est représentée par le manuel de Nicolas Chuquet "Triparty en la science des nombres" (1484). Chuquet admet des solutions négatives à des problèmes abstraits (donc comprenant des nombres purs et non pas des grandeurs) où une valeur est considérée comme solution à fur et à mesure qu'elle satisfait l'équation. Plus encore, il élabore même des procédures pour additionner et pour soustraire de tels nombres. Il explique aussi le sens changé des opérations arithmétiques:

"Et qui adjouste ung moins avec ung aultre nombre, ou qui d'icellui le soustrayt, l'addicion se diminue et la soustraction croist" (cité selon Sesiano 1985, 136).

Comparée à cet état du développement, l'œuvre publiée par Cardano 60 ans plus tard marque une première rupture. Cardano polémique contre l'opinion commune (et adoptée d'abord par lui-même) selon laquelle *moins* multiplié par *moins* donne *plus*. Il donne une démonstration que *moins* par *moins* donne *moins* et non pas *plus*. Je peux recommander de présenter cette démonstration aux élèves.



Il raisonne comme suit: Si on a un carré avec $ab = 10$, et si on veut savoir l'aire du carré df , avec $cb = 2$, il faut soustraire de 100 l'aire de deux rectangles gc et de , donc 16 et 16. Parceque $100 - 16 - 16 = 68$, il faut encore soustraire 4; donc on a -4 et non $+4$! Le raisonnement est convaincant seulement à première vue parceque $64 = 100 - 2 \times 16 - 4$ n'a rien à faire avec l'équation réellement en question: $(10 - 2)(10 - 2) = 100 - 2 \times 10 \times 2 + 4$ (Cardano 1662, 399; traduction française: Marie 1883, p. 263)

La raison principale pour la refutation de "l'opinion commune" est épistémologique: Pour Cardano, le positif et le négatif constituent deux domaines, deux mondes séparés: on ne peut pas les mêler ou changer de l'une à l'autre: "quia nihil potest ultra vires suas" (parceque rien ne peut dépasser ses forces): une opération entre *plus* et *plus* doit rester dans le domaine de *plus*, et une opération entre *moins* et *moins* doit rester dans le domaine de *moins* par *moins* semble donner *plus*, selon l'opinion commune et comment en doit entendre cela et comprendre qu'essentiellement le résultat est *moins* (ibid., 399-400).

Un des effets les plus remarquables que Cardan a pu obtenir avec cette position se trouve dans le fameux manuel "Nouveaux Elémens de Géométrie" par Antoine Arnauld (dont la première édition date de 1667, la seconde de 1689, et qui a connu plusieurs rééditions après). Le cas de Arnauld est particulièrement intéressant parcequ'il s'agit de la première discussion connue et explicitement controversée entre deux mathématiciens sur le concept des nombres négatifs: une discussion entre Arnauld, représentant de l'École de Port Royal, et Prestet, disciple du philosophe Malebranche. Cette discussion aboutira à un changement significatif de la seconde édition du manuel d'Arnauld en ce qui concerne la règle des signes.

Dans la première édition, exposant les quatre cas de la règle des signes, Arnauld avait dit, apparemment incité par Cardan:

"MOINS en moins donne plus: c'est à dire que la multiplication de deux termes qui ont tous le signe de moins donne un produit qui doit avoir le signe de plus. [...] Cela paroist bien étrange, et en effet il ne faut pas s'imaginer que cela puisse arriver autrement que par accident. Car de soy-même moins multiplié par moins ne peut donner que moins"(Arnauld 1667, 13).

Dans son texte, Arnauld n'explique pas cette contradiction. Plutôt, il donne une démonstration assez traditionnelle pour le résultat *plus*, en multipliant deux nombres "complexes", c'est-à-dire deux termes (a-b) et (c-d): En soustrayant $2bc$, on ôte trop et il faut donc ajouter bd .

Cette proposition contradictoire a évidemment suscité l'étonnement des lecteurs. On connaît les réactions d'un lecteur qui adressa une lettre à Arnauld, lui proposant de changer le texte de ce paragraphe. C'était le père Jean Prestet (1648-1690), de l'Oratoire. En répondant, Arnauld exposa quatre problèmes qu'il voyait s'opposer contre la règle des signes:

- il déclare comme "inconcevable" qu'on puisse retrancher sept toises de cinq toises (il s'agit donc du problème des grandeurs concrètes);
- puis il déclare comme inconcevable que le carré de -5 pourra être égal au carré de +5;
- troisièmement, il introduit un nouvel argument: l'argument des proportions qui persistera pour longtemps:

Comment peut il être que la proportion $+1: -4 = -5: +20$ puisse être correcte? +1 était plus grand que -4, mais -5 est plus petit que -20, et:

- "Dans toutes les autres proportions, si le premier terme est plus grand que le second, le troisième doit être plus grand que le quatrième".
- dernièrement, il s'exprime contre des solutions négatives isolées et déclare une solution négative acceptable seulement si on peut établir une certaine relation avec quelque grandeur positive (voir Schrecker 1935, 85-86).

Prestet, par contre, envisage une conception opératoire: Bienque -2 toises n'existent pas, l'expression indique une opération mathématique. De même, Prestet ne voyait pas de séparation entre le domaine positif et le domaine négatif, et ne trouvait pas de difficulté que $(-5)^2$ soit égal à $(+5)^2$, expliquant cela à Arnauld dans le cadre d'une notion particulière de multiplication que Arnauld adopta par la suite. Et l'argument sur les proportions était rejeté par Prestet en postulant que les proportions ne dépendent que des valeurs absolues. (ibid., 89) Les arguments de Prestet impressionnaient Arnauld et il changea le texte dans la seconde édition de son manuel.

Il ne prétend plus que la règle des signes soit valable seulement par accident. Cependant, il utilise maintenant quatre pages pour "démontrer" que moins par moins donne plus. Son raisonnement est fondé sur l'analyse conceptuelle de la multiplication comme addition itérée. Pour effectuer cela, Arnauld distingue entre multipliant et multiplié dans le produit, le

multipliant étant un nombre pur (un scalaire) et le multiplié étant une grandeur (concrète). Pour cette démonstration, Arnauld discute les quatre cas séparément:

1. $+\times +$
2. $+\times -$
3. $-\times +$
4. $-\times -$

Dans les deux premiers cas, on a un multipliant positif; il s'agit donc du sens ordinaire de la multiplication: comme addition itérée du multiplié. Dans les cas 1. et 2., le signe du multiplié reste donc conservé. Pour les deux derniers cas, par contre, il s'agit d'un nouvel sens de la multiplication, un sens élargi: la signification est celle d'une soustraction du multiplié: il faut le soustraire autant de fois qu'indique le multipliant. Pour ces deux derniers cas il faut donc changer le signe du multiplié. Pour justifier ce raisonnement, Arnauld raisonne come suit:

"dans le 4.^e cas où le multiplié a *moins*, le produit doit avoir *plus*; [...] multiplier -3 par -5, c'est ôter 5 fois -3. Or ôter une fois -3, c'est mettre +3, comme il a été dit sur le sujet de la soustraction; donc l'ôter 5 fois, c'est mettre +15; ce qu'il falloit prouver" (Arnauld 1690, 18).

Bien que l'approche est plus sophistiquée et plus explicite que chez d'autres auteurs, cette "démonstration" est capable de rendre plausible la règle des signes, mais elle n'est pas une preuve véritable, parceque la dernière raison présuppose déjà ce qui doit être prouvé. En outre, elle ne reflète pas les conséquences résultant de la distinction entre les deux facteurs du produit pour la commutativité de la multiplication qu'il avait postulé comme axiome ("supposition générale") au début de son manuel (ibid., p. 2).

Dans une longue note, Arnauld mentionne son raisonnement sur les proportions: il déclare de ne plus adhérer à celui comme réfutation de la règle des signes, mais sa justification pour la validité de la proportion est assez faible et ad-hoc (il s'agirait d'une autre sorte de multiplication) et son raisonnement a donc pu être repris plus tard par d'Alembert de nouveau comme réfutation (ibid., p. 19).

Mais pour l'instant, les auteurs contemporains des manuels se sentent satisfaits et appliquent les notions de Arnauld en présentant la doctrine des quantités négatives et positives. En particulier, son raisonnement sur la différenciation entre le multipliant et le multiplié est accepté.

Comme exemple bien révélateur de l'évolution déjà accomplie je mentionne le manuel "La Science du Calcul" (1714) du Père Reyneau. Il écrit que les grandeurs positives et négatives sont des grandeurs opposés, qu'elles peuvent s'annuler mutuellement et qu'on les appelle positives ou negatives selon la convention choisie (Reyneau 1739, p.14).

Reyneau explique les nombres relatifs non seulement par l'exemple traditionnel des biens et des dettes, mais aussi par des notions géométriques: par des droites qu'il montre aussi bien horizontales que verticales dans ses figures, en évoquant la notion de direction.

Le zéro, pour lui, n'est pas une limite absolue, mais le terme entre les grandeurs positives et négatives; c'est l'origine où commencent les unes et les autres (ibid., p. 15).

Chez Reyneau, on trouve aussi une distinction claire entre signe d'opération et signe d'une quantité, et il discute les relations entre ces deux significations du signe (ibid., p.16-17). Un pas supplémentaire dans ce processus de stabilisation des opérations et d'approfondissement conceptuel en France constitue le manuel "Elemens des mathematiques" par le Père Rivard, de 1732, accepté pour l'Université de Paris et réédité plusieurs fois: il

expose la notion des quantités négatives par le concept des grandeurs opposées et souligne que les unes et les autres sont également réelles:

"Il faut bien remarquer que les quantités négatives sont des grandeurs opposées aux quantités positives. [...] De cette notion des quantités positives et négatives, il s'ensuit que les unes et les autres sont également réelles, et que par conséquent les négatives ne sont pas la négation ou l'absence des positives; mais que ce sont certaines grandeurs opposées à celles que l'on regarde comme positives" (Rivard 1744, 66).

Et Rivard accepte des solutions négatives isolées. En fait, pour lui, la soustraction ne présuppose pas que le minuend soit plus grand que le nombre à soustraire; soustraire est défini chez lui bien généralement comme ôter une quantité d'une autre. Il explique que le cas de soustraction d'une quantité négative est en effet une addition (ibid., 69).

Vu cette stabilisation conceptuelle, les attaques de d'Alembert des années 1750 contre l'existence des quantités négatives constituent une nouvelle rupture. Sa position, exposée dans l'article "Négatif" de l'*Encyclopédie* et donc dans une publication ayant une énorme diffusion, est bien connue: Il reproche aux auteurs des manuels d'avoir regardé les quantités négatives "les uns comme *au-dessous de rien*; notion absurde en elle-même: les autres, comme exprimant des *dettes*; notion trop bornée, et par cela seule peu exacte" (D'Alembert, 1965, p. 301). Par contre, il n'admet les quantités négatives que comme fausses positions qui doivent être traduites par des quantités positives:

"Il n'y a donc point réellement et absolument de quantité négative isolée: -3 pris abstraitement ne présente à l'esprit aucune idée; mais si je dis qu'un homme a donné à un autre -3 écus, cela veut dire en langage intelligible, qu'il lui a ôté 3 écus" (D'Alembert 1765, p. 73).

On ne s'est pas demandé sur les raisons de cette rupture chez d'Alembert. On peut trouver les raisons dans ses conceptions des logarithmes et des nombres imaginaires. Il est bien connu que D'Alembert opposait Euler qui avait dit que les logarithmes des nombres négatifs sont imaginaires. Pour contredire Euler, D'Alembert développa une notion propre à lui des logarithmes et des nombres négatifs (D'Alembert 1756).

Selon sa conception, les quantités négatives ne sont pas moins grand que zéro (exclu chez lui par des raisons métaphysiques), mais elles sont essentiellement identiques aux quantités positives: seulement indiquant une position "opposée", une qualité pas précisée par d'Alembert. En raisonnant ainsi, d'Alembert pouvait maintenir que $L(-x) = L(x)$, et que le logarithme des nombre négatives soit donc réel.

En fait, l'utilisation augmentée des nombres imaginaires a incité des réflexions critiques aussi sur la légitimité des nombres négatifs.

En Angleterre, ce mouvement est devenu particulièrement fort: dès le milieu du 18^e siècle, plusieurs traités ont refusé un statut mathématique aux quantités négatives. Un traité typique de ce genre est celui de Francis Maseres de 1758: "A dissertation on the use of the negative sign in Algebra".

Maseres s'exprime catégoriquement contre des solutions négatives. Par conséquent, il dit que les équations quadratiques ont une seule solution. Pour lui, chaque combinaison des coefficients constitue un autre type d'équation quadratique. Une autre conséquence: il n'y a que trois types des équations du second degré; le type $x^2 + ax + b = 0$ en est exclu afin d'éviter des solutions négatives (Maseres 1758, p. 20). Les équations du troisième degré sont traitées selon les mêmes principes: il n'y a pas plusieurs solutions; toute combinaison des coefficients et de leurs signes est discutée comme un nouvel cas où on évite soigneusement des solutions négatives.

Un autre exemple pour les nouvelles tendances en Angleterre est constitué par le livre de William Frend: "Principles of Algebra" (1796). Pour nous, lire ce traité est assez fatigant: La

méthode de parcellement où la solution des équations se trouve séparée en un nombre immense de cas isolés est encore perfectionnée eu égard au traité de Maseres. Cependant, je voudrais souligner qu'on devrait se garder de qualifier ces mathématiciens comme étant rétrogrades ou incompetents ou stagnant au stade concrète. Il faut voir dans leurs conceptions une vue des mathématiques désirant de rester maître des opérations mathématiques, et de ne pas être porté par l'automatisme des opérations algébriques à des résultats dont on pourrait douter la nature mathématique. Pour mieux apprécier cette position, je vous rappelle la dissatisfaction de beaucoup de mathématiciens sur la démonstration du théorème de quatre couleurs par Haken: la démonstration utilise des procédures de machines électroniques qui ne peuvent plus être saisi directement.

Pour retourner à la rupture effectuée par d'Alembert, on peut dire que son effet sur la France resta d'abord restreint. Ceci est déjà visible dans l'*Encyclopédie* qui contient deux articles parallèles et contraires sur les négatifs: l'un par d'Alembert et l'autre par l'Abbé de la Chapelle qui proposa la doctrine traditionnelle. En fait, les manuels pour le public universitaire ne furent pas affectés par le raisonnement de d'Alembert, tandis que les manuels pour le nouvel secteur des écoles militaires transmettaient la conception selon laquelle le problème doit être réformulé si l'on arrive à une solution négative. Les manuels les plus importants de cette direction étaient ceux de Bezout.

Une nouvelle rupture encore plus radicale fut effectuée par Lazare Carnot dès 1801: il rejéta entièrement les quantités négatives et les remplaça par une nouvelle doctrine géométrique: la *Géométrie de Position* (1803), basée sur les termes de quantités directes et inverses comme des nouvelles concepts. L'épistémologie de Carnot réside dans le rejet d'une fonction indépendante de l'algèbre vis-à-vis la géométrie. Sa conception est en partie motivée par l'opposition au manuel d'algèbre d'Euler.

Je discuterai l'épistémologie de Carnot et l'évolution de ces conceptions dans une autre publication. Caractéristique pour l'effet immédiat dans l'enseignement scolaire est la modification brusque dans la 7^e édition 1808 des "Elemens d'Algèbre" de Lacroix - le manuel principal de l'époque (voir Schubring 1986).

Est-ce-que les ruptures en France et en Angleterre ont été suivies en Allemagne par un mouvement analogue?

Comme tendance générale, on peut constater une continuité dans l'acceptation antérieure des quantités négatives. Très révélatrice en est la refutation de la rupture en France par Metternich, le traducteur du manuel d'algèbre de Lacroix dans sa nouvelle forme. Bien que n'étant que son traducteur, Metternich utilise ce "forum" pour exposer la conception généralement répandue en Allemagne. Caractéristique est son rejet de l'approche de réformuler le problème lorsqu'on arrive à une solution négative: il ne serait pas dans le pouvoir des mathématiciens de changer le problème - ils devraient le resoudre tel comme il est donné (Lacroix/Metternich 1820, p. 129).

Pour résumer, on peut dire que des ruptures sont largement causées par des choix épistémologiques, et non pas par un manque des compétence nécessaire pour franchir des obstacles mathématiques.

En concluant, je voudrais mentionner l'article *Négatif* dans le *Dictionnaire des mathématiques élémentaires* édité par Stella Baruk. On y trouve l'assertion que - si l'y en a toujours des problèmes à comprendre la notion des nombres négatifs - ce n'est pas la faute de la mathématique mais de la pédagogie (voir la didactique), parce que la mathématique ait déjà longtemps résolue ces problèmes. Cette assertion constitue une nouvelle mystification - en fait, les mathématiciens ont toujours évités, jusqu'à la fin du 19^e siècle, d'avouer ou d'expliquer qu'il faut des conventions quand on étend la domaine des nombres et ne pouvant pas prouver des conventions.

BIBLIOGRAPHIE

- D'Alembert, J.: *Opuscles Mathématiques*, Tome Premier, Sixième Mémoire: sur les Logarithmes des quantités négatives, Paris 1756, 180-230.
- D'Alembert, J.: Article "Négatif", *Encyclopédie, ou Dictionnaire Raisonné des Sciences, Arts et des Métiers*, Tome 11, 1765, 72-74.
- D'Alembert, J.: *Essai sur les élémens de philosophie*, XI.: Eclaircissement sur les élémens d'algèbre, édition Olms, Hildesheim 1965
- Arnauld, Antoine: *Nouveaux Elémens de Géométrie*, Paris 1667. Seconde Edition Paris 1690.
- Baruk, Stella: *Dictionnaire de Mathématiques Élémentaires*. Paris 1992.
- Cardano, Girolamo: *Opera Omnia*. The 1662 Lugduni edition. With an introduction by August Buck. New York, London 1967.
- Carnot, L.: *De la Corrélation des Figures*, Paris an IX (1801).
- Carnot, L.: *Géométrie de Position*, Paris an XI (1803).
- Försteman, W. a.: *Über den Gegensatz positiver und negativer Größen*, Nordhausen 1817.
- Frend, W.: *Principles of Algebra*, London 1796.
- Glaeser, G.: "Epistémologie des nombres relatifs", *Recherches en didactiques des mathématiques*, 2(1981), 303-346.
- Lacroix, S. F.: *Elémens d'algèbre*. Septième édition, revue et corrigée, Paris 1808. Traduction allemande: M. Metternich: *Anfangsgründe der Algebra*. Nach der siebten Auflage übersetzt und mit erläuternden Anmerkungen und Zusätzen vermehrt. Mainz 1811.
- Marie, Maxim.: *Histoire des Sciences Mathématiques et Physiques*. Tome II. Paris 1883.
- Maseres, Fr.: *A dissertation on the use of the negative sign in algebra*, London 1758.
- Prestet, J.: *Nouveaux Elémens des Mathématiques*. Seconde édition, Paris 1689.
- Reyneau, Ch.: *La Science du Calcul des Grandeurs en général*. Seconde édition, Paris 1739.
- Rivard: *Elémens de Mathématiques*. Quatrième édition, Paris 1744.
- Schrecker, P.: "Arnauld, Malebranche, Prestet et la théorie des nombres relatifs", *Thales* (Paris), 2(1935), 82-90.
- Schubring, G.: "Ruptures dans le statut des nombres négatifs", *petit x* (Grenoble), no. 12, 1986, 5-32.
- Schubring, G.: "Discussions épistémologiques sur le statut des nombres négatifs et leur représentation dans les manuels allemands et français de mathématiques entre 1795 et 1845", *Actes du Premier Colloque Franco-Allemande de Didactique des Mathématiques et de l'Informatique*. Ed. C. Laborde (Grenoble, éditions sauvage 1988), 137-145.
- Sesiano, J.: "Une Arithmétique médiévale en langue provençale", *Centaurus*, 27(1984), 26-75.
- Sesiano, J.: "The Appearance of Negative Solutions in Mediaeval Mathematics", *Archive for History of Exact Sciences*, 32.2 (1985), 105-150.