REFLEXIONS EPISTEMOLOGIQUES A PROPOS DU CONCEPT DE TANGENTE A UNE COURBE

M. Grand'Henry-Krysinska et C. Hauchart

1. Présentation du groupe et du projet AHA.

AHA signifie Approche Heuristique de l'Analyse. Ce sigle est la copie quasi conforme de HAHA par lequel M. Gardner (1979) désigne l'éclair de compréhension mathématique. L'adjectif *heuristique* est emprunté à I. Lakatos (1976), qu'il utilise pour qualifer un enseignement dans lequel on ne construit techniquement les concepts que quand cela devient nécessaire ou très utile dans les démonstrations.

Le groupe AHA est composé de P. Bolly, A. Chevalier, M. Krysinska, C. Hauchart, D. Legrand, N. Rouche et M. Schneider. Le travail du groupe s'inscrit dans le cadre d'une collaboration entre les Facultés Notre Dame de la Paix à Namur et le Groupe d'Enseignement Mathématique de Louvain-La-Neuve.

1.1. Idées directrices.

En rédigeant ce projet d'enseignement de l'analyse, ce groupe est parti de l'observation suivante : *concentrer* l'enseignement de l'analyse sur des *calculs routiniers masque la substance des concepts et de la théorie.* Nous avons voulu produire un ensemble de situations-problèmes qui *montrent le sens des concepts et de la théorie.* On y trouvera donc peu d'exercices de "drill" (que l'on trouve par ailleurs sans peine dans beaucoup d'ouvrages).

Notre idée est de partir des *notions et des intuitions premières*, même si ces dernières peuvent apparaître incomplètes ou imparfaites à l'égard de la théorie achevée. Au contraire, nous voulons les laisser émerger, et bâtir sur elles pour ne les mettre en question que plus tard, sur des exemples significatifs. C'est ainsi que les *objets mentaux et les notions* se transforment progressivement en *concepts.* En ce sens, nous luttons contre un formalisme prématuré.

On peut dire que le groupe AHA cherche à comprendre pourquoi un concept de l'analyse s'est construit (soit dans l'histoire, soit chez l'individu) et cherche ensuite des situations-problèmes à proposer aux élèves qui, d'une part s'énoncent simplement, si possible dans un contexte, et d'autre part forcent à théoriser (exhibant ainsi le sens de la théorie).

Parmi les personnes qui nous ont inspiré d'une façon ou d'une autre, on peut citer

- **P. Hilton** qui fait la distinction éclairante entre *illustration* et *application.* Il dit en substance : une *illustration* est quelque chose qui aide à comprendre la théorie; une *application* est quelque chose que la théorie aide à comprendre.

- **M. Kline**, au sens où il lutte contre une formalisation prématurée. "*Avant qu'on puisse apprécier la formulation précise d'un concept ou d'un théorème, on doit savoir quelle idée y est formulée et quels pièges sa formulation même essaie d'éviter. Donc, on doit être capable de s'appuyer sur une grande richesse d'expérience acquise avant de s'attaquer à la formulation rigoureuse. Comment la découverte peut-elle se produire quand on demande aux étudiants de travailler avec des idées déjà surchargées de sophistication et de raffinement ?*"

- **H. Freudenthal** qui montre l'intérêt et la nécessité de travailler d'abord avec des objets mentaux, des notions, avant de passer aux concepts plus formalisés.

- **I. Lakatos** qui montre que les différents concepts se construisent *l'un par l'autre* et *l'un pour l'autre pour les besoins de la démonstration.* Par exemple, il n'y a pas d'abord le concept de nombre réel qui s'installe puis celui de limite, puis celui de dérivée, ... La théorie toute faite et linéairement présentée telle qu'on la trouve dans les traités ne correspond pas à la façon dont une théorie s'est construite : c'est notamment avec la formulation du concept de limite que l'on voit apparaître dans l'histoire la théorie des nombres réels.

1.2. Un enseignement en spirale.

L'enseignement rédigé par AHA est conçu en deux boucles d'apprentissage. Les problèmes de la première phase sont posés dans un contexte familier; on y travaille davantage les objets mentaux que les concepts. A la fin de la première phase, on se pose de nouvelles questions, le stock de fonctions envisagées est plus grand, l'intérêt s'est déplacé de questions plus restreintes à des questions plus générales et plus abstraites.

1.3. Un parallèle avec l'histoire.

Notre projet d'enseignement s'éclaire d'un jour intéressant si on le situe par rapport au développement historique de l'analyse. On peut y voir en gros trois étapes.

Depuis Eudoxe jusque vers le milieu du XVIIème siècle, les problèmes de quadratures (et cubatures) n'avaient pas de rapport avec la recherche des tangentes, ni avec celle des maxima et des minima ou l'étude des vitesses. Il s'agissait là de secteurs distincts des mathématiques. Qui plus est, à l'intérieur de chaque secteur, chaque problème recevait une solution particulière même si certains principes de raisonnement tels que l'exhaustion ou la méthode de Cavalieri revenaient éventuellement d'un problème à l'autre. Il s'est ainsi constitué au fil des siècles un stock de résultats situés dans des contextes divers.

Avec la découverte du théorème fondamental par Newton et Leibniz dans la deuxième moitié du XVIIème siècle, on réalise la parenté profonde quoiqu'insoupçonnée jusque-là des résultats antérieurs. Ils sont dorénavant justiciables d'une méthode unique et routinière qui éclipse l'exhaustion et la méthode de Cavalieri. Mais cette méthode nouvelle mobilise, en un certain sens, plutôt des objets mentaux que des concepts : le rapport ultime, l'approximation linéaire, les aires qu'on ne définit pas mais qu'on calcule à l'aide de primitives, etc. Pendant un siècle et demi, les résultats s'accumulent tandis que s'approfondit le malaise sur les fondements du nouveau calcul.

Au début du XIXème siècle, le stock de fonctions prises en compte par l'analyse s'est considérablement augmenté (les études sur la corde vibrante et la propagation de la chaleur y ont beaucoup contribué) et les difficultés théoriques s'accumulent. Une troisième phase du dévelop-pement de l'analyse débute avec Bolzano et Cauchy. Les *concepts* de fondement apparaissent : la limite au sens de Cauchy qui sera formalisée par Weierstrass, la continuité techniquement définie et qui va être discernée de la continuité uniforme, l'intégrale qui se constitue de Cauchy à Riemann et fournit la définition de l'aire.

1.4. Introduction à l'exposé proprement dit.

Dans ce qui suit, nous regarderons plus en détail le chapitre de notre projet qui donne une première préfiguration de la dérivée : on y aborde la notion de *tangente* et d'*approximation affine d'une fonction*. Comme on l'observera, *il n'y est nullement question de quotient différentiel.* Ce dernier apparaîtra dans un chapitre ultérieur dans un contexte de mouvement : il s'agira alors de vitesse instantanée ou de débit instantané, cet instantané qui sera à la fois source de difficulté ontologique (quel espace peut-on bien parcourir *en un instant* ou quel volume peut bien s'écouler en *un instant?* On se retrouve là avec la difficulté du "zéro sur zéro") et qui nous amènera très proche de la dérivée comme quotient différentiel.

Le plan de l'exposé est le suivant : dans un premier temps, nous observerons le concept de tangente à différents moments de l'histoire; dans un second temps, nous exposerons l'approche de la tangente telle qu'elle se trouve dans notre projet d'enseignement.

2. La tangente à quatre moments de son histoire.

2.1. Le cas du cercle. Chez Euclide : la tangente en un point P du cercle est la droite par P qui est perpendiculaire au rayon (Fig.1).

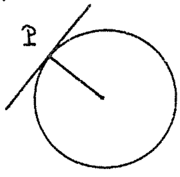


Fig.1.

Cette droite est à la fois la droite qui rencontre le cercle en un seul point, celle qui "frôle" le mieux le cercle en ce point, celle sur laquelle le cercle "atterrit en douceur", ...

2.2. La méthode de Fermat. On trouve dans la *Méthode pour la recherche du maximum et du minimum* de Fermat une approche de la dérivée dont nous nous sommes inspirés.

Voici un exemple :

"Soit à partager la droite AC en E, en sorte que $AE \times EC$ soit maximum (Fig.2).

Fig.2

Posons $AC = b$; soit a un des segments, l'autre sera $b\text{-}a$, et le produit dont on doit trouver le maximum : $b.a - a^2$. Soit maintenant $a + e$ le premier segment de b, le second sera $b - a - e$, et le produit des segments : $b.\, a - a^2 + b.\, e - 2.\, a.e - e^2$;

Il doit être adégalé au précédent : $b\, a - a^2$;

Supprimant les termes communs : $b\, e \approx 2\, a\, e + e^2$;

Divisant tous les termes : $b \approx 2\, a + e$;

Supprimez e : $b \approx 2\, a$.

Pour résoudre le problème il faut donc prendre la moitié de b. Il est impossible de donner une méthode plus générale".

Fermat décrit sa méthode de la façon suivante :

"Toute la théorie de la recherche du maximum et du minimum suppose la position de deux inconnues et la seule règle que voici :

Soit a une inconnue quelconque de la question (qu'elle ait une, deux ou trois dimensions, suivant qu'il convient d'après l'énoncé). On exprimera la quantité maxima ou minima en a, au moyen de termes qui pourront être de degrés quelconques. On substituera ensuite $a + e$ à l'inconnue primitive a , et on exprimera ainsi la quantité maxima ou minima en termes où entreront a et e à des degrés quelconques. On adégalera, pour parler comme Diophante, les deux expressions de la quantité maxima ou minima de part et d'autre. Cela fait, il se trouvera que de part et d'autre tous les termes seront affectés de e ou d'une autre de ses puissances. On divisera tous les termes par e, ou par une puissance de e d'un degré plus élevé, de façon que dans l'un au moins des termes de l'un quelconque des membres e disparaisse entièrement. On supprimera ensuite tous les termes où entrera encore e ou l'une de ses puissances et l'on égalera les autres, ou bien, si dans l'un des membres il ne reste rien, on égalera, ce qui revient au même, les termes en plus aux termes en moins. La résolution de cette dernière équation donnera la valeur de a, qui conduira au maximum ou au minimum, en reprenant sa première expression".

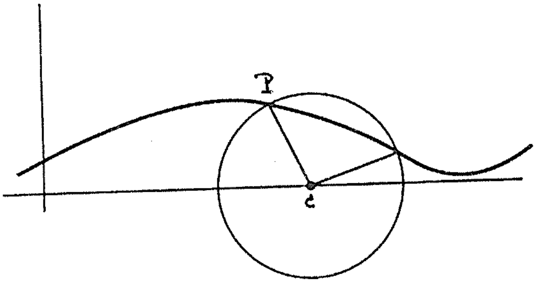
En quoi cette méthode de recherche des maximas et minimas d'une fonction rejoint-elle la tangente à une courbe? On trouve dans Montucla (Histoire des mathématiques-Tome II), le commentaire suivant :

> [...] La méthode de *maximis et minimis* de Fermat, est fondée sur ce principe déjà aperçu par Kepler dans sa *Stereometria dolorium*, savoir que lorsqu'une grandeur, par exemple l'ordonnée d'une courbe, est parvenue à son *maximum* ou son *minimum*, dans une situation infiniment voisine, son accroissement ou sa diminution est nulle. En faisant usage de ce principe, dont il est facile d'apercevoir la vérité, nous allons voir naître la règle de Fermat. Car supposons qu'une ordonnée y, exprimée par une équation en x, soit parvenue à son *maximum*, il s'ensuivra qu'en supposant dans cette équation l'abscisse x augmentée ou diminuée d'une quantité infiniment petite comme e, ces deux valeurs de y seront égales. Par conséquent si on les égale, qu'on en retranche les termes communs, qu'on divise par e autant qu'il est possible, et qu'enfin on supprime les termes où e se trouve (car ils sont nuls à l'égard des autres à cause de la petitesse infinie de e) , on aura enfin la valeur de x, à laquelle répond la plus grande ordonnée.
>
> [...] De même que la règle de Descartes pour les questions de *maximis* et *minimis*, est sujette à quelques limitations particulières, celle de Fermat a aussi les siennes. Sa nature étant de donner les points d'une courbe où deux ordonnées infiniment proches sont égales, elle donne tous ceux où la tangente est parallèle à l'axe. [...] Il faudra donc, après avoir déterminé ces points, les examiner chacun en particulier, et voir si au-delà l'ordonnée continue à croître ou à diminuer; [...]

Relevons, pour terminer cette section, la remarque de Fermat concernant la généralité de sa méthode : selon lui, "on ne peut trouver de méthode plus générale", alors qu'elle ne convient en fait que pour des fonctions telles que le passage à la limite dans le quotient différentiel, $\dfrac{f(a+e)-f(a)}{e}$, se résolve par une simple simplification, (ce qui est le cas pour les polynômes).

2.3. La tangente chez Descartes. Pour calculer la tangente en un point P d'une courbe, (Fig.3), Descartes suggère de considérer le cercle passant par P et centré en un point (c,o) quelconque de l'axe des x. On calcule les intersections, (en général deux), du cercle et de la courbe, puis on détermine la valeur c_0 de c pour laquelle les points d'intersection sont confondus. Le cercle centré en c_0 est alors tangent à la courbe en P et le calcul de la tangente à la courbe est ramené à celui de la tangente à un cercle. Cette méthode est algébrique au sens où elle se ramène à la recherche de la condition sur c_0 pour que les deux points d'intersection soient confondus. Les limitations de cette méthode sont évidentes : si l'équation de la courbe est compliquée ou de degré élevé, il sera généralement impossible de résoudre les équations ultérieures auxquelles elle aboutit.

Fig.3.



2.2.4. La tangente au sens de Chilov. Faisons maintenant un saut dans le temps et considérons un point de vue beaucoup plus sophistiqué de la tangente, comme on trouve par exemple chez Chilov. Selon ce point de vue, une droite d (sopposons qu'elle soit de pente p) sera tangente en un point d'abscisse a à une courbe d'équation $y = f(x)$ si

au voisinage de a, la courbe $y = f(x)$ est "bien approximée" par la droite d

c'est-à-dire si

quelle que soit l'ouverture de "l'étau" que l'on se donne, il existe un voisinage de a sur lequel le graphe de f est entièrement dans l'étau.

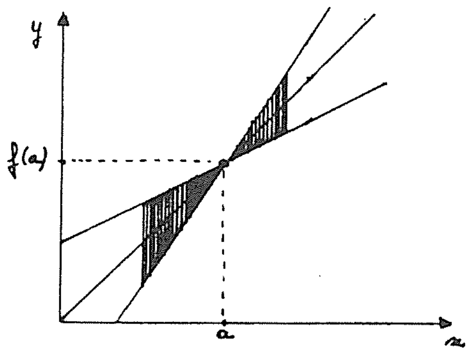


Fig.4.

En d'autres termes si,

pour tout ε positif, il existe un voisinage de a sur lequel les inégalités suivantes sont vérifiées

$$f(a) + p.(x - a) - \varepsilon.(x - a) \leq f(x) \leq f(a) + p.(x - a) + \varepsilon.(x - a)$$

ou encore, en posant $(x - a)$ égal à h,

pour tout ε positif, il existe un voisinage de a sur lequel les inégalités suivantes sont vérifiées

$$f(a) + p.h - \varepsilon.h \leq f(a + h) \leq f(a) + p.h + \varepsilon.h$$

ce qui s'écrit encore

pour tout ε positif, il existe un voisinage de a sur lequel les inégalités suivantes sont vérifiées

$$-\varepsilon \leq \frac{f(a + h) - f(a)}{h} - p \leq \varepsilon$$

soit

$$\lim_{h \to 0} \left(\frac{f(a + h) - f(a)}{h} - p.h\right) = 0$$

c'est-à-dire

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(a + h) - f(a)}{h} = p.$$

Ce dernier point de vue est celui de l'approximation affine d'une courbe. Pour en arriver là, les premières intuitions de tangente comme droite qui rencontre la courbe en un seul point ou de droite qui frôle la courbe ont dû évoluer au sens où il a fallu affiner ce que l'on entendait précisément par *frôler*, *atterrir en douceur* ou encore *bien approximer*.

3. L'introduction de la tangente dans notre projet :

Dans cette section, on lira le fil conducteur de la démarche proposée aux élèves. Les parties du texte qui se trouvent dans un cadre sont extraites, en substance, du document pour les élèves.

Juste frôler une courbe.
(Tangentes et approximations affines.)

3.1 Vers les tangentes.
Partie invisible d'un mât.

On considère une montagne stylisée surmontée d'un mât vertical (Fig. 5). Le mât est suffisamment haut pour qu'on puisse en voir la partie supérieure depuis l'origine des coordonnées. Mais quel en est depuis cet endroit la partie invisible?

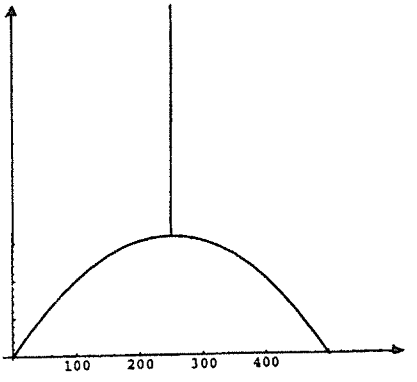


Fig.5.

Cette question qui est davantage une illustration qu'un problème, amène l'idée de tangente en un point comme celle de la "première" droite passant par ce point et ne rencontrant la courbe qu'en ce point (Fig.6).

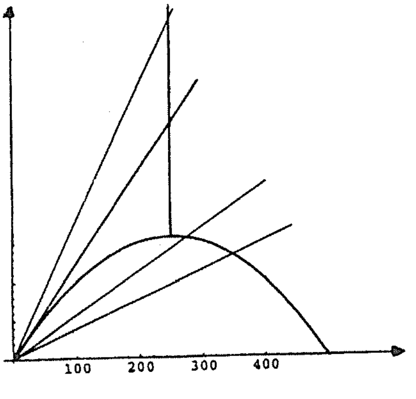
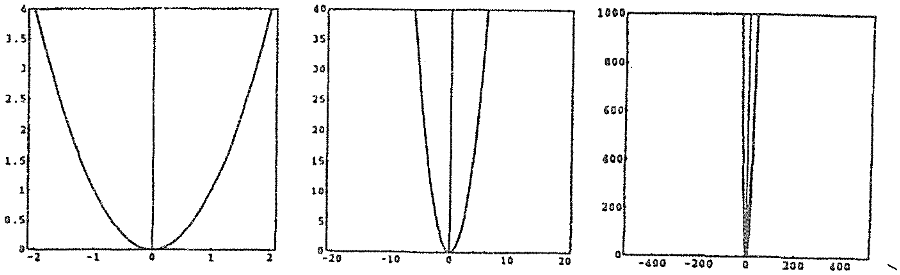


Fig.6.

3.2. Tangente en $x = 0$.

3.2.1. La tangente à l'origine à $y = x^2$.

Les trois courbes a), b) et c) apparaissant à la fig.7. semblent représenter des fonctions différentes. En fait, il n'en est rien : il s'agit chaque fois du graphe de la même fonction $y = x^2$ mais dans des échelles différentes. Les figures a), b) et c) peuvent être obtenues l'une à partir de l'autre par agrandissement ou réduction. On peut les voir aussi comme les graphes de la même fonction vue de plus ou moins loin.

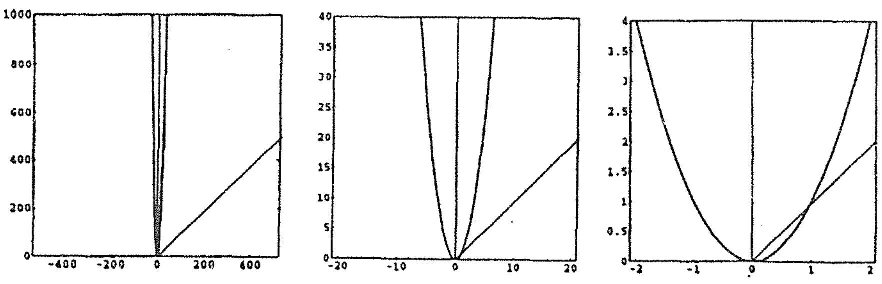


a) b) c)

Fig.7.

Même si la notion de droite qui "frôle une courbe" n'est pas encore nette, nous posons tout de même la question suivante : que peut-on accepter comme droite qui "frôle la courbe" $y = x^2$ à l'origine?

L'axe des x est évidemment un candidat. Quant à savoir si d'autres droites ($y = a\,x$ avec $a > 0$) pourraient faire l'affaire, la perception varie selon la façon (a), b) ou c)) dont on regarde le graphe de la fonction : certaines droites qui sembleraient convenir à première vue (Fig.8.c)), s'avèrent inadéquates quand on les regarde selon le point de vue b) ou a).



c) b) a)

Fig.8.

Cette observation graphique amène à conserver l'axe des x comme seule candidate tangente, observation confortée par le calcul. Aussi petite que soit la pente a (positive pour fixer les idées) de la candidate tangente, cette candidate traverse la parabole en deux points,

$$x = 0 \text{ ou } x = a$$

points entre lesquels la droite est franchement au-dessus de la parabole.

3.2.2. La tangente à l'origine à $y = kx^2$.

Que deviennent ces considérations dans le cas des paraboles $y = kx^2$? Par exemple, $y = 1000\,x^2$? Remarquez que les graphes qui ont ci-dessus (Fig.7.) représenté $y = x^2$ peuvent tout aussi bien représenter $y = 1000\,x^2$.

Les deux axes de chacun des graphes de la Fig.9. portent la même unité, mais la longueur de cette unité diffère selon les graphes. Indiquez sur chacun d'eux la longueur à donner à l'unité pour qu'ils représentent la fonction $y = 10\,x^2$.

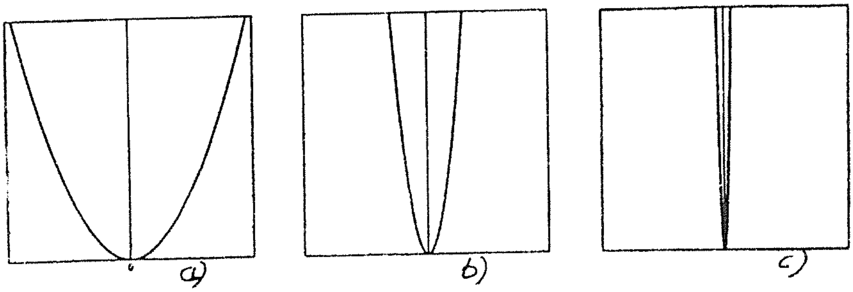


Fig.9.

Des réflexions sur 3.2.1. et 3.2.2., il résulte que pour $y = kx^2$ aussi, seul l'axe des x reste comme candidate tangente à l'origine.

3.2.3. La tangente à la courbe "somme" d'une parabole et d'une droite.

La Fig.10. montre la droite $y = 1 + x$ et la courbe $y = x^2$. Tracez la courbe d'équation $y = 1 + x + x^2$. En déduire la tangente en $x = 0$ à cette courbe.

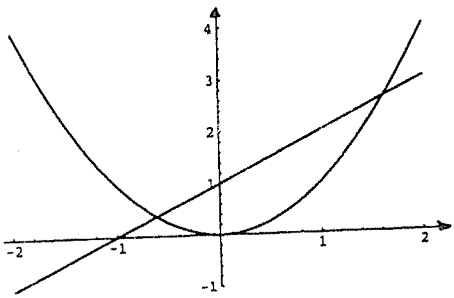


Fig.10.

Le point 3.2.3. rappelle la construction graphique d'une somme de deux fonctions : cela revient ici à aligner les "indivisibles" qui constituaient le graphe de x^2 non plus sur l'axe des x, mais sur la droite $y = 1 + x$ (voir Fig.11.). Puisque la courbe $y = x^2$ "atterrissait en douceur" sur l'axe des x en $x = 0$, on en déduit que la courbe $y = 1 + x + x^2$ "atterrit " de même en douceur sur la droite $y = 1 + x$. On a donc établi moralement la conservation de l'"atterrissage en douceur" d'une fonction "atterrissant en douceur" sur l'axe des x par sommation avec une fonction du premier degré.

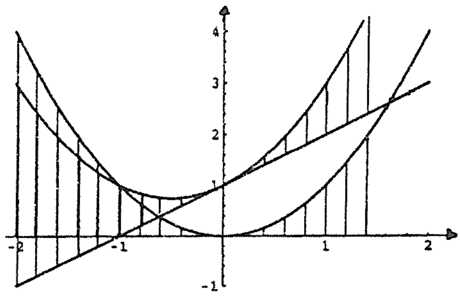


Fig.11.

3.2.4. La tangente à la courbe $y = x^3$.

Où se trouve la courbe $y = x^3$ par rapport aux deux courbes $y = x^2$ et $y = -x^2$? Déduisez-en la tangente à $y = x^3$ au point (0,0).

Avec cette question on traite moralement le résultat suivant : si on intercale le graphe d'une fonction entre une courbe et sa tangente à l'origine, alors ce graphe aura la même tangente à l'origine. On pourrait paraphraser ce résultat de la façon suivante : si entre deux objets déjà proches, on en intercale un troisième, il sera forcément proche des deux premiers.

Dans le cas de la question posée, on déduit que l'axe des x est la tangente à la fonction $y = x^3$ puisqu'elle est dans la zone hachurée de la Fig.12.

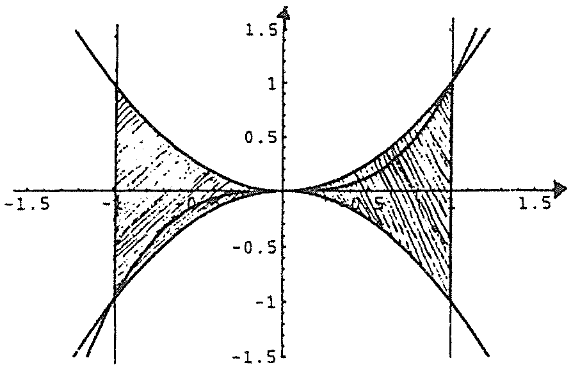


Fig.12.

3.2.5. La tangente à la courbe "somme" $y = x^3 + x^2$.

Construisez la courbe $y = x^3 + x^2$ par sommation des graphes de $y = x^2$ et $y = x^3$. Déduisez-en la tangente à l'origine de la fonction somme.

Après avoir effectué la sommation des graphes, nous réalisons que la courbe se trouve dans la zone hachurée à la Fig.13. : elle est ainsi coincée entre x^2 et sa tangente à l'origine et possède donc la même tangente (l'axe des x) à l'origine.

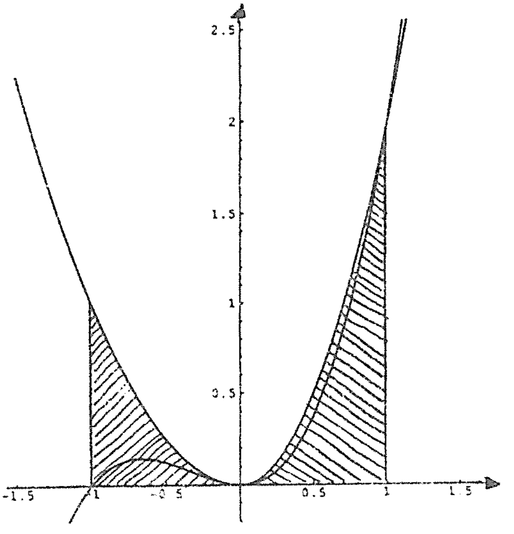


Fig.13.

3.2.6. Encore la tangente à une courbe "somme".

Soient les courbes d'équations $y = 1 - x$ et $y = x^3 + x^2$. Quelle est la tangente à l'origine de la courbe somme $y = 1 - x + (x^3 + x^2)$?

Cet énoncé met à nouveau (voir 3.2.3.) en oeuvre la conservation de "l'atterrissage en douceur" par addition d'une fonction du premier degré : si une courbe "atterrit en douceur" sur l'axe des x alors en "ajoutant" cette courbe à une droite, on a encore l'atterrissage en douceur de la courbe-somme sur cette droite (Fig.14.).

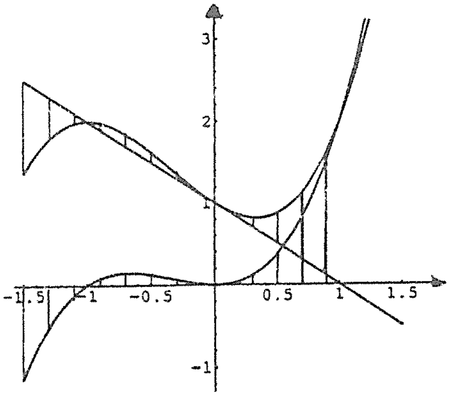


Fig.14.

3.2.7. Vers une définition de la tangente à l'origine à une courbe polynomiale.

Toutes les courbes que nous avons traitées jusqu'ici ont une équation de la forme

$$y = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3$$

où les a_i sont des coefficients réels parfois nuls. Dans chaque cas, nous avons observé que la tangente en $x = 0$ avait pour équation

$$y = a_0 + a_1 x .$$

Ce n'est pas là le fait du hasard, puisque $a_2x^2 + a_3x^3$ atterrit en douceur sur l'axe des x. Jusqu'ici nous ne cernions la tangente (mise à part celle du cercle) qu'au travers de constatations intuitives : la droite qui "frôle le mieux" la courbe, la droite sur laquelle la courbe "atterrit en douceur", ... Adoptons maintenant en plus une définition : nous dirons que la tangente à la courbe

$$y = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3$$

au point $(0,a_0)$ est la droite

$$y = a_0 + a_1 x .$$

a) Considérons maintenant la courbe

$$y = a_2 x^2 + a_3 x^3 + \ ... +a_nx^n$$

où n est un naturel et les a_i, des coefficients réels. Le problème serait résolu si on pouvait coincer cette courbe entre une parabole $y = kx^2$ et sa tangente ou entre deux paraboles de même tangente à l'origine (voir Fig.15).

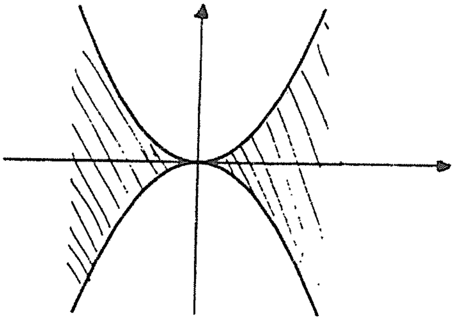


Fig.15.

Cherchez donc un nombre k > 0 tel que

$$-k x^2 \leq a_2 x^2 + a_3 x^3 + \ ... +a_nx^n \leq k x^2.$$

b) Déduisez-en la tangente en $x = 0$ de la courbe $a_2 x^2 + a_3 x^3 + \ ... +a_nx^n$ et celle en $x = 0$ de la courbe $a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \ ... +a_nx^n$.

Nous terminons ici la relation détaillée du document. Après avoir ainsi établi que l'équation de la tangente à l'origine d'un polynôme se réduisait à la somme de ses termes de degré 0 et de degré 1, on passe dans le document à la tangente en un point quelconque. L'idée principale y est de se ramener au cas précédent par une translation (Fig.16.).

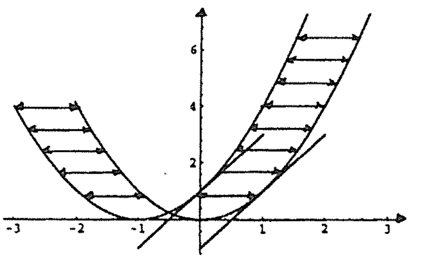


Fig.16.

La suite du chapitre passe aussi par une section intitulée "*Mais qu'est-ce donc qu'une tangente?*" où l'on discute de l'acceptabilité d'énoncés comme par exemple "la tangente à une courbe est une droite qui ne rencontre la courbe qu'en un point", ou encore "la tangente à une courbe en un point est une droite qui frôle la courbe en ce point et qui ne la traverse pas", ...

Bibliographie

AHA, Une approche heuristique de l'analyse in *L'enseignement de l'analyse aux débutants*, coord. Hauchart - Rouche, Académia, Editions Erasme, 1992.

Borceux, *Invitation à la géométrie*, CIACO Ed., 1985.

C. Boyer, *The history of the Calculus and its Conceptual Development*, Dover Publ., N.Y., 1949.

Chilov, *Analyse Mathématique Fonction d'une variable*, Ed. Moscou, 1973.

Perspectives sur l'enseignement des mathématiques dans la Communauté Française de Belgique, rapport de la **commission scientifique d'étude de l'enseignement des mathématiques et des sciences**, Ministère de l'Education, Bruxelles, 1990.

A. Deledicq, *Cours d'Analyse Infinitésimale élémentaire (non standard)* - Preprint, juin 92, IREM de Paris 7.

H. Freudenthal, *Mathematics as an educational task*, Reidel, Dordrecht, 1973.

H. Freudenthal, *Didactical epistemology of mathematical structures*, Reidel, Dordrecht, 1983.

M. Gardner, **HAHA**, Belni, Paris, 1979.

C. Hauchart, *Sur l'approximation des concepts de suite et de limite de suite*, thèse de doctorat, Louvain-la-Neuve, 1985.

IREM de Toulouse, *Des problèmes d'extrema chez Fermat à la notion de dérivée*, MATPEN Toulouse, 1989.

M. Kline, *Mathematical thought from ancient to modern times*, Oxford Univ. Press, 1972.

I. Lakatos, *Proofs and refutations : the logic of mathematical discovery*, Oxford Univ. Press, 1975.

M. Schneider-Gilot, *Des objets mentaux "aire" et "volume" au calcul des primitives*, thèse de doctorat, L'UCL, 1988.

M. Schneider-Gilot, *Quelques difficultés d'apprentissage du concept de tangente*, in Repères - IREM, n° 5, octobre 1991.

Spivak M., *Calculus*, Benjamin, Inc., New York, 1967.