

L' HISTOIRE DE LA VALEUR ABSOLUE ET SA TRANSPOSITION DIDACTIQUE.

Athanassios Gagatsis - Ioannis Thomaïdis
Département des Mathématiques
Université Aristote de Thessaloniki
54006 Thessaloniki - GRECE

Introduction

Pourquoi la valeur absolue? En effet la valeur absolue est une "petite notion" puisque sa définition prend deux lignes avec un vocabulaire élémentaire; en plus elle occupe une place tout à fait à part dans l'enseignement.

Pourtant cette petite notion crée de grands problèmes aux élèves de tous âges et même aux étudiants en mathématiques. Les recherches publiées à propos d'erreurs commises par les élèves sur les exercices portant sur la valeur absolue insistent sur les obstacles épistémologiques et en particulier sur les obstacles cognitifs au niveau de la compréhension de ce concept. Elles examinent non seulement la compréhension de la définition formelle de la valeur absolue, mais aussi son mode d'utilisation dans les situations telles que la résolution d'équations avec valeur absolue.

Par exemple, Duroux propose d'interpréter ces erreurs sur la base de l'hypothèse qu'elles sont dues aux conceptions - obstacles par rapport à un nombre relatif (Duroux, 1983). Chiarugi et al. (Chiarugi, 1990) affirment que les fautes proviennent d'obstacles provoqués par des représentations erronées et les malentendus quant aux concepts algébriques fondamentaux, comme la variable et la fonction.

Notre propre recherche a mis en évidence des erreurs comparables, et ce dans les trois niveaux de l'éducation scolaire grecque: dans l'enseignement secondaire, dans l'enseignement supérieur non mathématique et dans l'enseignement supérieur en Mathématiques.

Ainsi des études expérimentales auprès des élèves Français, Grecs et Italiens mettent en évidence un large éventail d'erreurs commises par ces élèves; ce qui interroge: "**jusqu' à quel point ces erreurs sont - elles dues aux obstacles qui sont les éléments constitutifs du savoir mathématique et, par voie de conséquence, jusqu' à quel point proviennent - elles des interventions didactiques?**"

Nous essaierons de répondre à cette question par l'intermédiaire d'une étude historique (l'étude de la transposition didactique n'est pas présentée ici).

Etude historique

Pour saisir la nature des problèmes à partir desquels se forma le concept de valeur absolue et précisèrent ses fonctionnements, nous avons eu recours à un grand nombre de textes historiques dont l'étude nous permit de jalonner quatre principales phases d'évolution (Gagatsis et Thomaïdis, à paraître).

Dans la **première phase**, la valeur absolue apparaît comme une notion implicite strictement liée à une conception du nombre relatif en tant que nombre commun muni d'un signe. Cette conception, pour un nombre positif ou négatif, a fonctionné de manière efficace et pendant longtemps comme outil de résolution de problèmes arithmétiques, et algébriques; par exemple pour construire des tables logarithmiques (Napier) ou pour élaborer une théorie générale des équations polynômiales (Descartes, Newton); p.e. Descartes introduit dans son travail les nombres positifs et négatifs comme solutions des équations $x - 2 = 0$ ou $x + 5 = 0$ et utilisant les termes "vraie solution 2" et "fausse solution 5". Parallèlement cette même conception a ouvert un champ théorique dans l'étude des nombres relatifs autorisant la libre transposition de modèles exo - mathématiques, comme le "gagner" ou le "perdre" (Euler). Dans

les textes de cette période, nous avons pu reconnaître le concept de la valeur absolue en tant que concept du "nombre sans son signe", ou de la distance à partir de zéro sur la droite arithmétique".

Mais rien ne semblait alors imposer, pour ce concept, une étude spécifique et son utilisation particulière.

Dans la **seconde phase d' évolution**, la valeur absolue assure une fonction explicative dans le contexte du calcul algébrique, et notamment au niveau de l' algèbre des inéquations. Plurielles sont ses applications dans la résolution des équations du calcul approché (calcul d' erreurs) et dans la théorie des nombres (Lagrange, Gauss). Par exemple une des premières références de ce type peut être trouvée dans un article de J. L. Lagrange à propos de la résolution de l' équation diophantienne $A = u^2 - Bt^2$ (A, B entiers et u, t rationnels) qui a été présentée en 1768 à l' Académie de Berlin.

Lagrange note:

"Au reste il faut remarquer, pour éviter toute équivoque, que quand nous disons que a doit être $< \frac{A}{2}$, nous entendons que a et A soient **pris positivement**, quoiqu' ils puissent être d' ailleurs positifs ou négatifs; de sorte qu' on ne doit avoir égard, dans cette comparaison, des nombres a et A , qu' à leur valeur absolue".

(Lagrange, 1768 p. 390).

Cette condition nécessaire est utilisée systématiquement par Lagrange par la suite, au cours de l' étude théorique de cette équation.

La **troisième phase d' évolution** du concept de la valeur absolue est étroitement liée au changement conceptuel fondamental relatif au concept du nombre; c' est - à - dire au passage progressif qui va de la compréhension empirique du nombre en tant que moyen pour mesurer des quantités, jusqu' au concept abstrait du nombre en tant qu' élément d' un système mathématique caractérisé par les propriétés fondamentales de ses éléments et par l' absence de contradiction. Les nombres négatifs et positifs acquièrent un sens autonome et se distinguent, en arithmétique, du nombre commun muni d' un signe. La valeur absolue commence ainsi à se donner comme un concept spécifique, défini pour chaque nombre positif et négatif tandis que, parallèlement, est affirmée sa relation avec le concept de la mesure d' un nombre complexe, introduit durant la même période (Argan, Cauchy). Un travail caractéristique, dans lequel ces nouvelles conceptions sont exprimées explicitement, est le petit essai de R. Argand: "Essai sur une manière de représenter les quantités imaginaires dans les constructions géométriques". Ce concept est utilisé de façon systématique dans les différentes applications de l' algèbre des inéquations, et notamment dans les techniques d' "epsilon" proposées par Cauchy en 1821 au niveau de l' analyse.

Dans les préliminaires de "Cours d' Analyse" Cauchy essaie de distinguer les concepts du nombre et de la quantité:

"Nous appellerons **valeur numérique** d' une quantité le nombre qui en fait la base, quantités **égales** celles qui ont le même signe avec la même valeur numérique, et quantités **opposées** deux quantités égales quant à leurs valeurs numériques, mais affectées de signes contraires...

... Enfin on dit qu' une quantité est **plus grande** ou **plus petite** qu' une autre, suivant que la différence de la première à la seconde est positive ou négative. D' après cette définition, les quantités positives surpassent toujours les quantités négatives, et celles - ci doivent être considérées comme d' autant plus petites que leurs valeurs numériques sont plus grandes.

(Cauchy, 1821, p. 28).

Ce concept de valeur absolue est relié plus tard par Cauchy au "module" des nombres complexes (op. cit., p. 161).

Dans le "Note II" de son travail intitulé "Sur les formules qui résultent de l' emploi du

signe $>$ ou $<$, et sur les moyennes entre plusieurs quantités" Cauchy définit la moyenne:

"... on appelle **moyenne** entre plusieurs quantités données une nouvelle quantité comprise entre la plus petite et la plus grande de celles que l'on considère"

(o.p. cit., p. 365)

Après quelques autres passages sur les moyennes (p. 370), "sur la résolution numérique des équations" et sur la convergence des séries, Cauchy présente la relation entre valeur numérique et module:

"... Mais ce qui a été dit à l'égard de ces séries peut également s'appliquer au cas où leurs termes deviennent imaginaires pourvu qu' alors on écrive partout **expression imaginaire** au lieu de **quantité**, et **module** au lieu de **valeur numérique**".

(op. cit., p. 448)

Cauchy se sert du concept de valeur absolue comme d'un objet mathématique ordinaire, pouvant être soumis aux transformations analytiques; mais dans les démonstrations des théorèmes sur la convergence de séries, il utilise d'une manière indirecte tous les concepts fondamentaux qui constitueront la théorie contemporaine de la valeur absolue. A ce stade, ne manquent encore qu'un symbolisme simple et la formalisation des propriétés du concept au moyen de ce symbolisme.

La **quatrième et dernière phase** d'évolution correspond très précisément à ce processus vers la formalisation, vivement nécessitée par l'évolution de l'analyse complexe. Ce besoin on le sent déjà par les "Cours d'Analyse" de Cauchy, p.e. dans la définition de la continuité d'une fonction

"... la fonction $f(x)$ sera, entre les deux limites assignées à la variable x , fonction **continue** de cette variable, si pour chaque valeur de x intermédiaire entre ces limites, la valeur numérique de la différence $f(x+a) - f(x)$ décroît indéfiniment avec celle de a "

(Cauchy, 1821, p. 43)

Cependant le symbole actuel, qu'a introduit Weierstrass en 1841 pour exprimer les mesures d'une variable complexe et certains concepts topologiques, ne sera communément accepté qu'à partir du dernier quart du XIX^e siècle. Après 1850, il y eut au moins six différents symbolismes pour exprimer la valeur absolue, ce qui n'a pas été sans provoquer certaines difficultés de communication:

$|x|$ (Cantor, 1874; Kronecker, 1887; Hilbert, 1893)

mod. x (Tchebychef, 1844, Liouville, 1851, Hermite, 1980);

Gordan, 1893).

x . num (Grassmann, 1862)

$M(x)$ (Dedekind, 1878)

abs (x) (Lindemann, 1882)

val. abs (x) (Laurent, 1894)

La formalisation des propriétés de la valeur absolue et sa compréhension comme fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}^+$ ont joué un rôle conséquent pour certaines des grandes généralisations du début du XX^e siècle, comme le concept de la distance dans la théorie des espaces métriques et le concept de l'estimation, dans la théorie des corps.

Conclusions

Sur la base de l'étude historique présentée dans le paragraphe précédent, nous proposons d'interpréter les fautes des élèves en terme d'obstacles.

Le **premier obstacle**, qui est lié à l'existence même de la valeur absolue, concerne la conception du nombre comme moyen pour mesurer des quantités. Cette conception constitue un obstacle pour la notion du nombre relatif en général, et plus particulièrement pour l'ordre

des nombres sur la droite réelle. L'étude historique nous a clairement montré que cette conception rend caduque une notion particulière de la valeur absolue puisque la fonction de cette dernière s'exerce de manière implicite mais effective par le nombre arithmétique qui produit un nombre positif ou négatif (Napier, Descartes, Newton). Comme dans l'histoire, cet obstacle se manifeste avec les erreurs qui concernent la manipulation de variables algébriques dans les inéquations; par exemple dans l'inéquation $x^2 > 9$ les élèves donnent comme réponses: $x > 3$ ou $x > \pm 3$.

Le dépassement de la conception quantitative du nombre est lié à l'apparition d'une notion primitive de la valeur absolue qui, historiquement, a été exprimée par "abstraction faite du signe". Mais en même temps cette attention portée au signe constitue un **deuxième obstacle**, lié d'une part à la reconnaissance de la valeur absolue comme notion indépendante et d'autre part au besoin de sa représentation. Comme l'étude de la transposition didactique l'a mis en évidence, la définition et le symbolisme dans ce stade primitif servent à une nécessité interne de l'enseignement, en particulier l'architecture en spirale du programme, et non aux situations dans lesquelles l'utilisation de la valeur absolue est nécessaire. La conception selon laquelle la valeur absolue est "le nombre sans son signe" apparaît souvent plus tard dans les textes des étudiants et se manifeste par des erreurs du type $-|x| = x$ ou avec la suppression du symbole de la valeur absolue.

Le dépassement de la conception de "abstraction faite de signes" correspond aux premières tentatives pour l'expression analytique de ce concept et l'intervention d'un symbolisme particulier. Ici apparaît un **troisième obstacle** qui concerne la notion de fonction et plus particulièrement l'identification de cette dernière à un type algébrique. Cet obstacle de "type algébrique", ou plus généralement "procedural rule", semble être à l'origine de certains malentendus concernant le concept de fonction, comme plusieurs recherches récentes l'ont montré. "Les étudiants initialement voient les fonctions comme des procédures, comme si elles disaient ce qu'on devait faire avec x " (Dreyfus et al., 1990, in Gagatsis A., Thomaidis I., 1991). Dans le cas de la définition formelle de la valeur absolue comme fonction, cet obstacle se manifeste par des erreurs du type $|x| = \pm x$. Dépasser cet obstacle devient donc nécessaire pour acquérir la définition formelle de valeur absolue.

Le **quatrième obstacle** est lié à cette conception que la valeur absolue est un symbole "qui doit être supprimé". En effet, comme l'étude de transposition didactique l'a montré, il n'y a pas de liaison entre le traitement de ce concept et les conceptions qui, historiquement, ont justifié sa construction et son utilisation. A leur place apparaissent des exercices et des problèmes créés sur des critères didactiques, comme les équations et inéquations avec valeur absolue. Une caractéristique fondamentale de ces exercices est que leur résolution est a priori liée à la suppression du symbole de valeur absolue. L'enseignement est ainsi conduit à une contradiction évidente: en essayant d'enseigner un concept mathématique à un niveau d'abstraction élevé, il introduit des situations-problèmes où ce concept non seulement va ne pas être utilisé, mais constitue un obstacle à supprimer pour parvenir à une solution. Cette contradiction devient l'un des traits permanents de l'enseignement quand les enseignants - et c'est la situation en Grèce - accordent une grande importance à la valeur absolue et au traitement algorithmique des exercices. Ce traitement algorithmique caractérise les étudiants en mathématiques qui, appliquant impeccablement la procédure de suppression du symbole de la valeur absolue par une équation, parviennent à des solutions arithmétiques calculées mais ne satisfaisant pas toujours aux conditions initiales posées par la suppression du symbole de la valeur absolue. Leur tendance à aborder de manière algorithmique ces exercices a pour conséquence que 29 % d'entre eux seulement déclarent que l'équation $| |x-2| - 7| = -3$ est impossible.

Le comportement donc des étudiants (et des élèves) grecs face aux exercices avec valeur absolue possède tous les traits d'une obéissance mécanique aux règles d'un contrat didactique (Brousseau, 1984) (qui, ici, reflète cette injonction: "dehors le symbole de valeur absolue !"). La seule issue, à terme, paraît être la rupture de ce contrat, c'est-à-dire la création de nouvelles situations didactiques où la valeur absolue va acquérir son sens réel et sa fonction propre.

Références

BROUSSEAU G. (1984), "Le Rôle central du contrat didactique dans l'analyse et la construction des situations d'enseignement et d'apprentissage des mathématiques", 3ème Ecole d'Eté de Didactique des Mathématiques, Orléans.

CHIARUGI I., FRACASSINA, G., FURINGHETTI F. (1990), "Learning difficulties behind the notion of absolute value", in G. Booker, P. Cobb and T.N. De Mendicutti (eds), *Proceedings of the P.M.E.*, 14, 3, Oaxtepec, Mexico.

DUROUX A. (1983), "La valeur absolue". Difficultés majeures pour une notion mineure". *Petit x*, n° 3, pp. 43-67.

GAGATSI A., THOMAIDIS I. (1991), Erreurs faites par de futurs enseignants en Mathématiques sur des exercices scolaires sur la valeur absolue, *Educational Revue*, 14/15, pp. 87-106 (en grec).

GAGATSI A., THOMAIDIS I. (1993), A study on the historical evolution and didactical transposition of the concept of absolute value, preprint, Thessaloniki.

GAGATSI A., THOMAIDIS I. (1994), Une étude multidimensionnelle du concept de valeur absolue, 20 ans de Didactique des Mathématiques en France (à paraître).

GAGATSI A., THOMAIDIS I., Eine Studie zur historischen Entwicklung und didaktischen Transposition des Begriffs "absoluter Betrag" (soumis à publication).