Equations du troisième degré et nombres complexes

Giuliano TESTA
Liceo Scientifico "P. Lioy" - Vicenza (Italie)

INTRODUCTION

L'efficacité d'une étude dans une perspective historique consiste, selon moi, en ceci: faire revivre aux étudiants quelques moments importants des maths comme ils ont été vécus par les vrais protagonistes, et ainsi les rendre, eux mêmes, protagonistes et, dans un certain sens en faire des "créateurs".

Un exemple extraordinaire (les maths en sont "peuplées") est la découverte des nombres que, d'après Gauss, nous appelons complexes. Au début innommables, presque des "non nombres", appelés "Quantità Silvestri" par Cardano, et "più di meno e men di meno" par Bombelli, les nombres imaginaires sont sortis comme par magie, mais avec force et arrogance, d'un royaume méconnu et ils se sont imposés par le fait même de leur présence. Cette apparition inattendue mais inévitable a été la source d'une grande surprise.

L'expérience que je veux présenter s'est passée cette année dans une Quatrième classe du Lycée Scientifique "P. Lioy" (une classe "Première" du Lycée français) de Vicenza. La classe etait composée de 20 élèves agés de 17 ans environ: 8 filles et 12 garçons.
Tout le monde a suivi assez bien, en particulier les filles qui ont préparé soigneusement les notes que j'ai utilisées pour expliquer le travail fait.

En synthèse l'idée centrale que j'ai posée à la base du travail est la suivante:

Les idées, obscures au début, ressortent de l'intuition.

Souvent elles naissent à cause de la découverte de certaines contradictions (par exemple les irrationnels), ou elles viennent de la recherche d'instruments nouveaux nécessaires pour résoudre des problèmes quand les instruments que l'on a à disposition ne sont pas suffisants. La compréhension n'est pas immédiate, mais parfois elle demande un processus long et fatiguant; de plus, pour comprendre il faut agir et il ne suffit pas d'écouter et de répéter.

Le problème est donc le suivant: **comment savoir ce qu'il faut faire?**

Un exemple suffira à éclairer ce que je veux dire. Je me trouvais en Angleterre avec ma femme, mon fils et ma nièce. Cette dernière avait une capacité extraordinaire pour trouver de l'argent perdu par quelqu'un. Elle a trouvé une pièce même sur un arbre! Mon fils qui avait six ans se fâchait énormément et il était jaloux car, lui, il ne trouvait jamais rien. Un jour j'ai décidé de l'aider et donc, sans qu'il s'en aperçoive, j'ai voulu perdre une pièce juste devant ses pieds. Voilà: je pense que l'enseignant doit semer des occasions sur le chemin des élèves, il doit même les faire trébucher pour leur faire voir ce qu'ils ne verraient pas tout seuls. Encore: il doit faire mûrir chez les élèves le désir et la conviction d'opérer, de devenir peu à peu autonomes et critiques et de ne pas attendre toute réponse par le prof. Je crois que le rôle central de l'enseignant est celui-ci: **enseigner à ne pas avoir besoin de l'enseignant.**

L'expérience a été développée selon quatre moments successifs:

1) Etude des fonctions du type $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$
2) Résolution de l'équation $x^3 + px + q = 0$
3) Cas irréductible
4) Nombres complexes

En ce qui concerne la méthode suivie je désire souligner les points suivants:

1) Exploitation fréquente de l'intuition
2) Reconnaissance des analogies
3) Utilisation des graphiques
4) Utilisation de la calculette pour les calculs les plus durs
5) Discussions nombreuses

Souvent je posais les questions suivantes: "Et à présent qu'est-ce qu'on peut faire?" ; ou encore "Est-ce que tu te souviens d'avoir déjà vu quelque chose de pareil?"

Nous nous limiterons ici à illustrer les points les plus intéressants, c'est à dire le cas irréductible et les nombres complexes. Ceux qui sont intéressés à lire le texte complet de ma relation (contenant aussi une anthologie de l'Algebra de Bombelli) pourront en faire demande à: Testa Giuliano, Borgo Casale 76, 36100 Vicenza, Italie.

EXPERIENCE

Nous avons employé la formule de CARDANO pour résoudre les trois équations suivantes.

I CAS $x^3 + 108x + 5824 = 0$

Cette équation a une racine réelle unique; de plus, elle est la somme de deux nombres entiers: $x = \sqrt[3]{2^3} + \sqrt[3]{-18^3}$. Mais on n'a pas toujours de la chance!

II CAS $x^3 + 18x - 81 = 0$

Cette équation a une racine réelle unique; de plus, elle est la somme de deux radicaux cubiques bien compliqués.

$$x = \sqrt[3]{\frac{81}{2} + \frac{15}{2}\sqrt{33}} + \sqrt[3]{\frac{81}{2} - \frac{15}{2}\sqrt{33}}$$

A l'aide d'une calculette, Michela a énoncé l'hypothèse que la valeur de la racine soit 3, en écrivant que x = 4.4 - 1.4 = 3. Nous avons alors cherché à vérifier cette hypothèse, en employant la méthode exposée par Bombelli dans le premier livre de son Algebra. Ensuite nous avons analysé la démonstration géométrique de Bombelli relativement à l'équation $x^3 + px = q$, expliquée dans le deuxième livre.

III CAS $x^3 - 195x - 14 = 0$

Cette équation a trois racines réelles, mais il faut calculer la racine carrée d'un nombre négatif: $x = \sqrt[3]{7 + \sqrt{-524^2}} + \sqrt[3]{7 - \sqrt{-524^2}}$, et les élèves se sont énormément étonnés.

La question est donc la suivante: est-il encore possible d'employer la formule de CARDANO ? Naturellement, cette question débouche dans une autre: qu'est-ce que les nombres?

Nous avons longuement examiné ce sujet. Voyons en résumé les observations qui en sont sorties.

1) Avec les nombres, on fait des opérations.
2) Les opérations sont définies au moyen de règles.
3) Mais, a-t-on observé, d'où viennent ces règles?
4) Quant à nous, les possibilités sont deux:
   - nous les controuvons
   - ou bien il faut les chercher dans quelque livre.
5) En tout cas, elles sont le fruit d'une invention, parce qu'elles ne sont pas tombées du ciel.
6) Donc nous avons décidé d'inventer des règles nouvelles pour traiter les racines carrées des nombres négatifs.
7) J'ai alors demandé: "L'invention est-elle soumise à des limitations, ou bien peut on faire ce qu'on veut?"
8) La réponse a été la suivante: "Oui, on peut faire ce qu'on veut, mais dans certaines limites".
9) Lesquelles?
10) A propos de l'expression $x = \sqrt[3]{7 + \sqrt{-524^2}} + \sqrt[3]{7 - \sqrt{-524^2}}$,

Michela a observé que ces nombres "sono e non sono" ("ils sont et ils ne sont pas"). Je lui ai fait remarquer, alors, que Bombelli, lui même, avait dit quelque chose de pareil: "Parendomi più tosto sofistiche che vere" ("Elles me semblent plutôt sophistiquées que réelles").
Et, encore,Leibniz a écrit: "Quaedam tertia natura abscondita - remota a natura numeri - sophistica- sylvestris - analyseos miraculum - idealis mundi monstrum - paene inter Ens et non-Ens amphibium" (une troisième nature secrète - éloignée de la nature du nombre - sophistiquée - sylvestre - prodige du monde idéal - un amphibie entre l'être et le non-être.)

Il est intéressant de remarquer comment Michela a employé le mot "numeri" : évidemment, meme si inconsciemment, son attention s'adressait aux opérations à faire, plutôt qu'à ces drôles d'acteurs apparus d'un coup sur scène.

11) Quelqu'un a observé qu'on devait inventer des règles pour la racine de -1. Celui-ci a été un pas important en avant car, encore une fois inconsciemment, on avait employé les propriétés formelles des opérations: $\sqrt{-4 * 524^2} = \sqrt{4 * 524^2}\ \sqrt{-1}$.
12) A la question:" Y-a-t-il un sens dans l'opérer avec la racine de -1?", j'ai obtenu la réponse suivante: "Oui, car on a à faire avec la racine de -1 , et nous ne l'avons pas inventée". Réponse chouette, n'est-ce pas?

Voici le point central: la racine de -1 est une évidence des faits, une conséquence des calculs et non pas une invention à nous. C'est pourquoi, si nous voulons procéder, il faut inventer quelque chose de tout à fait nouveau.

A la surprise fait écho la nécessité.

Ayant centré l'attention sur la racine de -1, j'ai reproposé la question sur la nature des limitations à mettre à l'invention.

13) Katiuscia alors a fait une remarque très belle et intéressante: l'invention est arbitraire, mais dans certaines limites, parce qu'elle doit permettre la généralisation. De plus, elle a précisé qu'il faut opérer d'une façon sensée. Donc Katiuscia avait établi une sorte de critérium qui devait etre précisé.

En effet l'idée de la conservation des propriétés formelles se formait de plus en plus .

En effet, peu après, Katiuscia en développant sa pensée disait, en ce qui concerne les règles, que les nouvelles ne devaient pas changer les vieilles. Mais alors comment faire? "Essayons de traiter la racine de -1 comme si elle était un nombre normal".

14) A ce point j'ai proposé de donner un nom à cet objet évanescent et d'inventer un symbole nouveau pour le désigner.

En ce qui concerne le nom les propositions ne se sont pas fait attendre: "absurde, impossible et, finalement, imaginaire".

Pour le symbole, aussi, il y a eu des propositions intéressantes:

$$\exists \ , \ \ni \ , \ i$$

Les deux premiers symboles indiquaient quelque chose qui existe et qui n'existe pas (il s'agit de la lettre "e", majuscule et minuscule reflétées par un miroir, lettre initiale du verbe être).

15) Puisqu'on avait proposé de travailler avec i comme s'il était un nombre comme les autres avec droit de cité dans le royaume des maths, nous avons décidé de l'appeler nombre, différent des autres, mais nombre.
16) Nous nous sommes posé alors le problème de rechercher avec soin les propriétés de ce nouveau nombre et ses caractèristiques.

En résumé:

a) On a introduit un symbole pour indiquer la racine de -1
b) On a opéré en appliquant les propriétés des racines.

Cristina a observé qu'avec l'introduction du symbole "i" le problème est seulement caché, mais non pas éliminé. L'exigence d'une réflexion critique en est ressortie. De toute façon avant d'arriver à cela on a opéré également, même si d'une façon un peu naïve.

Exemple de Michela

$$-2-3=2i^2+3i^2=i^2(2+3)=5i^2$$

L'exemple a paru à tout le monde (et à elle même) trop artificiel et rusé: néanmoins il est clair qu'il faut garder les propriétés formelles.
Pour revenir à nos moutons, on a écrit la relation:

$$\sqrt[3]{7+\frac{1}{2}\sqrt{-4*524^2}}+\sqrt[3]{7-\frac{1}{2}\sqrt{-4*524^2}}=\sqrt[3]{7+524i}+\sqrt[3]{7-524i}$$

Donc on devait travailler avec des expressions du type: $7 \pm 524i$.

Il n'a pas été difficile de généraliser selon le schéma:

$$\begin{array}{c}\text{nombres réels}\\ \Downarrow \quad \Downarrow\\ a+b\,i\\ \Uparrow\\ \text{nouveau symbole}\end{array}$$

et il a été donc assez spontané d'écrire les relations suivantes:

$$(a+bi)+(c+di)=(a+c)+(b+d)i$$

$$(a+bi)(c+di)=ac+adi+bci+dbi^2=(ac-bd)+(ad+bc)i$$

Et ça a été le tour de la division. J'ai suggéré de trouver x et y tels que

$$\frac{a+bi}{c+di} = x + yi$$

Puisque le symbole "i" au dénominateur nous gène, j'ai demandé comment il pouvait être éliminé.

Pour aider les élèves je leur ai demandé s'ils n'avaient jamais rencontré une situation pareille: si donc ils avaient déjà eu l'occasion de traiter une expression avec quelque chose de non désiré au dénominateur.

Ils ont tout de suite proposé l'exemple suivant: $\frac{4}{3+\sqrt{2}}$.

Menés par l'analogie des problèmes il n'a pas été difficile pour les élèves de comprendre ce qu'ils devaient faire.

Une fois un peu mieux connus ces nombres (que l'on a bien sûr appelés complexes) on s'est arrêtés brièvement à réfléchir sur ce que l'on venait de faire.

Il m'intéressait de savoir quelle avait été la réaction des élèves, comment en réalité ils avaient retenu les actions accomplies.

Voilà les adjectifs employés par les élèves pour décrire leur façon de travailler:

"hypothétique, absurde, casuel, fantasque".

Donc les élèves avaient ,certes, parcouru le chemin, ils avaient avancé des propositions significatives aussi, ils avaient réalisé des liaisons, conduits par l'analogie, mais il leur fallait encore quelque chose pour une vraie compréhension. Il fallait revoir la question d'une façon critique. En particulier, il fallait faire deux choses importantes: a) utiliser le symbole "i" dans la résolution des équations de troisième degré pour voir si ça marchait. b) répondre à la question:"Pouvons-nous donner le statut de nombre à ces nouveaux objets?"

La première question était de type pratique, tandis que la deuxième demandait, justement, un examen critique. Les étudiants, à ma grande surprise, ont voulu affronter tout de suite la première question, même si tout ce qu'on allait faire apparaissait tout à fait fantasque. Le problème a été résolu par Pierpaolo. Il a réutilisé avec aisance la méthode déjà appliquée dans le cas des équations avec une seule racine réelle, employant ainsi des radicaux imaginaires comme s'ils étaient des radicaux réels.

Il a observé aussi que de $\sqrt[3]{7+524i}$ "vengono fuori" (en sortent) trois valeurs différentes. Il a ajouté ensuite (ce qui est très important) qu'il avait été surpris par ce fait . . . et qu'il ne l'avait jamais vu auparavant.

Un nouveau problème se posait: comment accoupler les six valeurs des deux racines cubiques? En effet les couples possibles sont neuf tandis que les racines de l'équation sont trois. Naturellement on peut procéder par tentatives, mais ce n'est pas trop économique. J'ai suggéré de calculer les racines cubiques de l'unité, c'est-à-dire de résoudre l'équation $x^3 = 1$.

Les élèves se sont étonnés car la raison d'une telle aide ne leur semblait pas clair.

De toute façon, les calculs faits, il n'a pas été difficile de résoudre le problème.

En effet, ayant indiqué comme toujours $\omega = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} i$ on a presque immédiatement construit le tableau

*	1	ω	ω^2
1	1	ω	ω^2
ω	ω	ω^2	1
ω^2	ω^2	1	ω

et on a vérifié que $\left(\sqrt[3]{a}\,\omega\right)^3 = a$, $\left(\sqrt[3]{a}\,\omega^2\right)^3 = a$, et enfin on a écrit les solutions de l'équation $x^3 + px + q = 0$ comme il suit:

$$x_1 = \sqrt[3]{A} + \sqrt[3]{B} \quad , \quad x_2 = \sqrt[3]{A}\,\omega + \sqrt[3]{B}\,\omega^2 \quad , \quad x_3 = \sqrt[3]{A}\,\omega^2 + \sqrt[3]{B}\,\omega$$

Quand nous nous sommes engagés à chercher une convenable représentation géométrique, il ne nous a pas fallu trop de temps pour voir que la droite était déjà pleine et occupée par les réels: il fallait donc trouver ailleurs de la place vacante. Il n'a pas été difficile d'imaginer que le plan avait beaucoup de place libre et donc qu'il était possible d'associer au nombre complexe $z = a + bi$ le point $P(a,b)$. Et quand nous nous sommes demandé comment opérer dans le plan, à quelqu'un il a paru naturel de penser aux vecteurs, grâce à l'analogie avec la somme. Au contraire, pour le produit le problème était moins immédiat. J'ai alors suggéré, pour commencer, de considérer les nombres complexes de module unitaire en employant un peu de trigonométrie.

Désormais le jeu était fait, et il n'a pas été difficile d'arriver jusqu'à la célèbre formule de Moivre. Nous avons ensuite sans problèmes attaqué la question de la détermination des racines n-ièmes de l'unité et l'interprétation géométrique associée. De plus, les élèves ont attaqué et résolu tout seuls le problème du calcul de la racine carrée d'un nombre complexe quelconque, fournissant la formule générale et la relative interprétation géométrique.

La dernière question posée a été la lecture et la traduction de quelques pages de l'Algebra: puisque les difficultés étaient considérables, plusieurs fois je suis intervenu pour aider les élèves à comprendre l'abstrus langage et à reconnaitre les expressions algébriques, écrites presque sans symboles. D'une façon ou d'une autre, les élèves ont vérifié la correction des calculs et ils ont réussi à retrouver le fil du discours.

Enfin j'ai donné aux élèves un questionnaire à remplir avec sincérité.
Pour réaliser l'expérience nous avons employé 20 heures environ, ainsi partagées:

étude des fonctions polynomiales:	8 heures
formule de Cardano:	2 heures
nombres complexes:	7 heures
exercice de traduction:	2 heures
questionnaire:	1 heure

QUESTIONNAIRE

1) Décrivez avec un mot la sensation que vous avez éprouvée quand il a été nécessaire de calculer les racines carrées des nombres négatifs pour obtenir des résultats réels:
"*abstrus - atroce - gênant - choquant - stimulant - étrange - étonnant - fatiguant - égarement - extraordinaire - surprise - incroyable*"

2) Est-ce-que vous croyez que votre compréhension a été

TRES BONNE	1
BONNE	11
SUFFISANTE	5
INSUFFISANTE	1

3) Avez vous trouvé difficile le sujet?

BEAUCOUP	2
ASSEZ	14
PEU	2

4) Est-ce-que le sujet a été charmant?

BEAUCOUP	5
ASSEZ	10
PEU	3

5) Vous vous êtes amusés?

BEAUCOUP	6
ASSEZ	8
PEU	4

6) Est-ce-que vous croyez que le temps consacré au sujet a été excessif?

OUI	11
NON	6
	(1 douteux)

7) Est-ce-que les ateliers ont été utiles?

BEAUCOUP	13
ASSEZ	5
PEU	-

8) Est-ce-que les discussions ont été utiles?

OUI	17
NON	-
	(1 critique)

Pourquoi?

aide commune dans la compréhension - la comparaison démontre que notre point de vue n'est pas toujours correct - possibilité de communiquer ses difficultés - incitation à faire des propositions sur la manière d'affronter un problème - aide à comprendre des problèmes dont, normalement, on ne s'aperçoit pas-forme de contrôle - on fait une comparaison entre toutes les opinions de la classe faisant participer tout le monde au cours, meme ceux qui dorment - ça aide notre esprit dans le raisonnement et ça permet aux étudiants de fixer des idées qui peuvent paraitre lointaines - on apprend à ne pas trouver les solutions déjà toutes pretes et à chercher à résoudre personnellement les questions proposées ; cependant cela n'est pas toujours facile, au contraire, en particulier quand on ne sait pas d'où démarrer.

9) Voulez vous employer la meme méthode pour étudier d'autres sujets?

OUI	16
NON	2

10) Croyez vous avoir changé votre attitude envers les maths?

OUI	15
NON	2
	(1 réponse pas claire)

-

Comment?

l'étude est plus facile car cela a plus de sens et c'est plus beau - en pensant aux maths je ne vois pas seulement des nombres; cette méthode en effet a rendu mon esprit plus élastique en général et non seulement dans les maths - je les aime moins, peut -être à cause de la grande difficulté, néammoins je les trouve toujours charmantes - elles m'ont toujours plu et je les aimerai toujours de quelque façon qu'elles soient enseignées - j'ai appris qu'avant de résoudre un problème quelconque je dois réfléchir sans être impulsif ; de plus j'ai compris que chaque partie des maths est liée à une autre et c'est à nous de trouver cette liaison - souvent les maths peuvent t'expliquer l'inexplicable - les maths ne sont pas stériles, souvent elles sont même sympas et amusantes - maintenant je n'apprends plus des notions passivement mais je cherche à les reconstruire moi même avec le raisonnement et surtout avec l'intuition.

11) Quels buts, selon vous, je m'étais fixé?
Faire prendre confiance avec les maths pour ne pas y penser comme à quelque chose d'absurde ou d'impossible - aider nos esprits à faire des progrès presque inespérés - augmenter notre observation et notre capacité de critique; nous habituer à utiliser la logique et à évaluer justement les choses simples sans les considérer comme naturelles car c'est sur elles qui se pose le raisonnement - nous faire découvrir le charme des maths - nous faire trouver une bonne méthode pour les autres matières aussi - ce qui parait impossible à réaliser ne l'est pas et vous nous l'avez démontré - faire réfléchir d'une façon autonome - chercher toujours la voie la plus briève.

12) Est-ce-que l'expérience est réussie?

OUI	14 (2 un peu; 1 assez)
NON	2
	(1 oui et non; 1 réponse pas claire)

Pourquoi?

Au début on était tous abattus et meme un peu fachés car on ne comprenait pas le but de ce travail, mais après nous avons commencé à comprendre et alors...- selon moi on a réussi seulement en partie car souvent on repoussait un problème qu'après on n'affrontait plus - j'ai pu appliquer positivement cette méthode dans l'étude de la chimie en réussissant avec calme à comprendre meme des problèmes difficiles - nous avons appris à donner libre essor à notre intuition personnelle en nous détachant d'une façon de procéder mécanique très souvent égarante - en ce qui concerne l'intuition il est important de savoir lire, mais quelquefois il faut aussi savoir où lire.

BIBLIOGRAPHIE

Bombelli, R., **L'algebra, Prima edizione integrale**, Feltrinelli, Milano, 1966

Bombelli, R., **L'algebra (Libri IV e V)**, Zanichelli, Bologna, 1929

Bortolotti, E., **L'Ecole mathématique de Bologne**, Zanichelli, Bologna, 1928

Bortolotti, E., **L'origine et le premier développement du calcul des imaginaires**, Scientia, Zanichelli, Milano, juin 1923

Bortolotti, E., **La trisezione dell'angolo ed il caso irriducibile dell'equazione cubica nell'Algebra di Rafael Bombelli da Bologna**, Rendiconti della R. Accademia delle Scienze dell'Istituto di Bologna, 1923

Procissi, A., **Il caso irriducibile della equazione cubica da Cardano ai moderni algebristi**, Periodico di matematiche, 1951

Fuhrer, L., **Historical stories in the mathematics classroom**, For the Learning of Mathematics, Volume 11, number 2, White Rock, B.C., Canada, 1992

Kahn, C., **L'histoire comme source de problèmes**, dans "Pour une perspective historique dans l'enseignement des mathématiques", Bulletin INTER-IREM Epistémologie, Lyon

Hadamard, J., **The Psychology of Invention in the Mathematical Field**, Dover, 1954