
HUYGENS et la cycloïde
 approches géométrique, analytique et graphique

Michel ROELENS
 Professeur de Mathématiques
 Lutgardiscollege (Oudergem)
 Maria-Boodschaplyceum (Bruxelles)
 K.I.P.S.H.O. (Hasselt)
 Belgique

Dans son oeuvre *Horologium Oscillatorium* [Hu2] (1673), Christiaan HUYGENS (1629-1695) a démontré et utilisé certaines propriétés de la cycloïde pour améliorer l'horloge à pendule qu'il avait inventée lui-même 17 ans plus tôt.

Pour une journée "porte ouverte" de l'école, mes élèves (17-18 ans, 8 heures de maths par semaine) et moi ont préparé une petite exposition sur les inventions mathématiques de Huygens. Deux aspects de son oeuvre ont retenu particulièrement notre attention: l'utilisation de fractions continuées pour la fabrication d'un planétarium et l'horloge à pendule muni de lames cycloïdales. Le premier sujet étant admirablement bien décrit dans [Ha], je m'en tiens ici au second. Avec mon aide, les élèves ont re-démontré les propriétés de la cycloïde trouvées par HUYGENS, en utilisant les moyens "actuels" de l'analyse qu'ils avaient fraîchement étudiés (intégrales, dérivées, équations différentielles...).

Dans l'atelier de l'Université d'été dont cet article est le compte rendu, j'ai voulu comparer trois approches et leur complémentarité pour un enseignement de ce sujet (et d'autres sujets?): l'approche authentique "géométrique" de HUYGENS tel qu'on peut le lire dans *Horologium Oscillatorium*, l'approche par l'analyse, et l'approche "graphique" rendue possible actuellement par l'introduction (en cours) des calculatrices graphiques dans les classes.

D'une part, la comparaison de ces approches est intéressante en soi (trois façons de voir les choses, trois "cultures" différentes). D'autre part, en se limitant à une seule approche, on butte sur des difficultés de taille à faire renoncer au sujet bien des professeurs de lycée. En combinant les trois, il est possible, à mon avis, de faire découvrir les propriétés en question par les élèves, et de leur faire apprécier aussi bien les outils de l'analyse que la beauté de certains raisonnements "géométriques" (à la ARCHIMÈDE) de HUYGENS.

IREM de LYON
 BIBLIOTHEQUE
 Université Claude Bernard -LYON I
 43, Bd du 11 Novembre 1918
 69622 VILLEURBANNE Cedex

1. Les grandes lignes

L'introduction de *Horologium Oscillatorium* et quelques passages de la première partie de cette oeuvre (contenant la description de l'horloge), permettent une prise en contact "directe" avec le contexte de l'horloge à pendule (extrait 1 ci-dessous). Afin d'entrer vraiment dans le problème, mes élèves ont effectué les expériences physiques que mentionne HUYGENS.

Extrait 1

L'HORLOGE À PENDULE
OU
DÉMONSTRATIONS GÉOMÉTRIQUES
SUR LE
MOUVEMENT DES PENDULES ADAPTÉ AUX HORLOGES
PAR
CHRISTIAN HUYGENS DE ZUYLICHEM,
FILS DE CONSTANTYN.

Quinze années se sont écoulées¹⁾ depuis celle où nous avons fait connaître par la publication d'une brochure²⁾ la construction des horloges que nous avons récemment inventée à cette époque. Attendu que depuis ce temps nous avons trouvé plusieurs choses qui regardent la perfection de cet ouvrage; nous nous sommes résolus à les expliquer en particulier dans ce livre-ci.

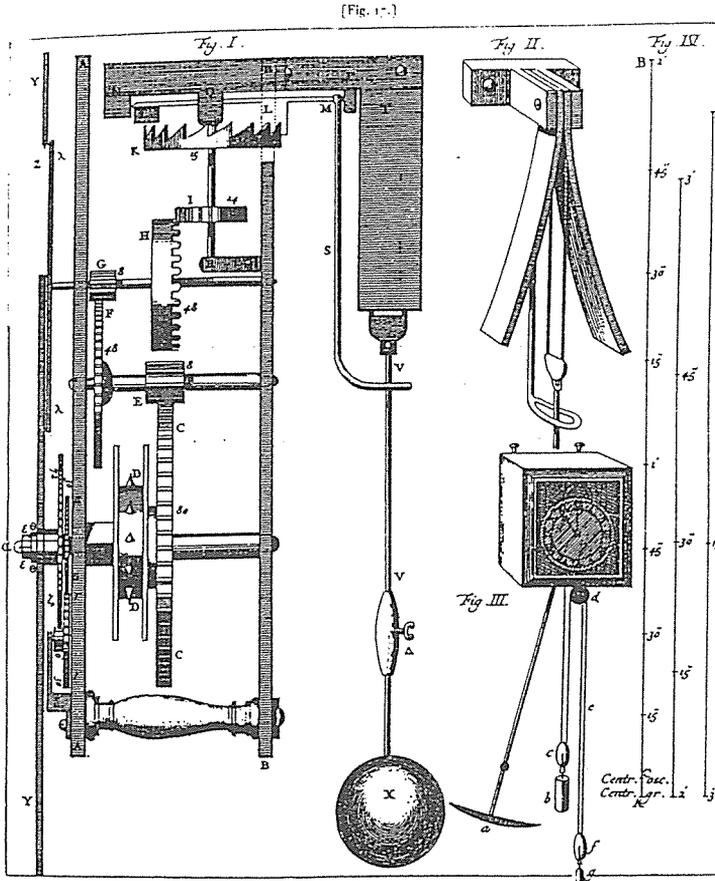
Ces choses sont si intimement liées à la perfection de cette invention qu'elles peuvent être considérées comme la principale partie et pour ainsi dire le fondement, qui y manquait auparavant, de tout ce mécanisme. En effet, le pendule simple ne possédait pas de mesure du temps certaine et égale, puisqu'on observe que les plus larges mouvements sont plus tardifs que les plus étroits; or, nous avons trouvé par le moyen de la géométrie une façon différente, inconnue jusqu'ici, de suspendre ce pendule: nous avons découvert une ligne possédant une courbure telle qu'elle se prête d'une façon entièrement admirable à lui donner l'égalité désirée. Depuis notre application de cette ligne aux horloges leur mouvement est devenu si constant et si certain qu'en suite de plusieurs expériences faites par terre et par mer il est maintenant manifeste que ces horloges sont très utiles et à l'astronomie et à l'art de naviguer. C'est cette ligne que décrit en l'air par sa circonvolution continue un clou attaché à une roue courante. Les géomètres de notre temps l'ont appelée cycloïde et l'ont examinée avec soin à cause de ses diverses autres propriétés. Quant à nous, nous l'avons considérée à cause de cette faculté dont nous parlions, savoir celle de mesurer le temps, laquelle nous y avons trouvée sans en avoir le moindre soupçon, rien qu'en raisonnant suivant les méthodes de l'art. Ayant depuis longtemps fait connaître cette propriété à quelques amis versés en ces matières (car c'est peu de temps après la première édition de l'horloge que nous l'avons aperçue), nous la proposons maintenant à lire à tous confirmée par la démonstration la plus exacte que nous ayons pu trouver. Ainsi ce sera en cette démonstration que consistera la principale partie de ce livre. Pour la donner, il a été nécessaire tout d'abord de corroborer et d'amplifier la doctrine du grand Galilée touchant la chute des corps graves, doctrine dont le fruit le plus souhaité et pour ainsi dire le sommet le plus élevé est précisément la propriété de la cycloïde que nous avons découverte.

Au reste, afin qu'on pût rapporter cette propriété à l'usage des pendules, il nous a fallu établir une nouvelle théorie des lignes courbes, savoir la théorie des courbes qui par leur évolution en engendrent d'autres. Ceci conduit à la comparaison de la longueur des lignes courbes et des lignes droites entre elles que j'ai poursuivie même au-delà de ce que mon sujet demandait: je l'ai fait à cause de la beauté et de la nouveauté apparentes de cette théorie.



PREMIÈRE PARTIE DE L'HORLOGE A PENDULE

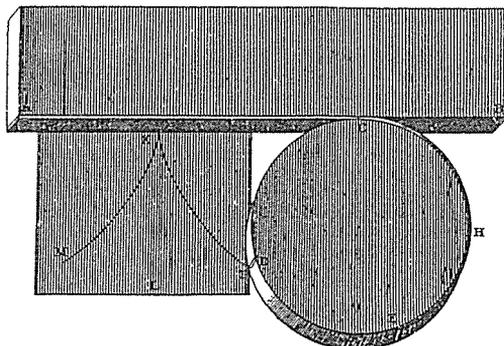
Contenant la description de l'horloge.



Reste à décrire la forme des lames entre lesquelles nous avons dit que le pendule est attaché [Fig. 17 II] et dont la fonction fort importante est de rendre sa période constante. En effet, sans elles les oscillations simples du pendule (quoique d'aucuns aient pensé différemment ¹⁾) ne seront pas isochrones mais les plus étroites auront une période plus courte. C'est ce qu'on découvre aisément par l'expérience suivante: si l'on prend deux fils de même longueur, portant des poids égaux et suspendus séparément, qu'on écarte l'un beaucoup, l'autre peu, de la perpendiculaire et qu'on les lâche simultanément, on ne les verra pas longtemps mouvoir ensemble dans le même sens mais celui dont les oscillations sont plus étroites prendra l'avance. D'autre part on peut aussi trouver les rapports des temps correspondant à des arcs quelconques; on les exprimera en nombres calculés d'après des principes bien établis et aussi proches qu'on voudra. On peut dire par exemple que le temps d'une chute le long de tout un quart de circonférence est à celui qui correspond à un très petit arc à peu près comme 34 est à 29 ²⁾. De sorte qu'on ne doit aucunement attribuer cette diversité à la résistance de l'air, comme quelques-uns l'ont voulu ³⁾, mais qu'elle provient de la nature même du mouvement et de celle du cercle. On pourrait encore tirer cette conclusion de la construction du pendule isochrone, vu que celui-ci s'écarte notablement dans son mouvement de la circonférence de cercle, comme cela paraîtra bientôt.

Il pourra peut-être sembler que dans nos horloges du genre ici considéré, où l'amplitude des oscillations est toujours la même, l'inégalité dont nous parlions n'aura aucune importance et que par conséquent aucune correction du pendule ne sera nécessaire. Il en ferait vraiment ainsi si l'amplitude de toutes les oscillations était constamment et absolument la même. Mais comme elle est quelquefois un peu plus grande et d'autres fois un peu plus petite, une assez grande différence résulte enfin de ce grand nombre de différences fort minimes; c'est ce que l'effet et les expériences font bien voir. Car quoique la force du poids par rapport à la prochaine roue soit toujours la même, cependant, étant transmise par tant d'autres, avec quelque soin qu'on les ait limées, elle ne parvient pas toujours en même intensité au pendule. D'ailleurs le mouvement des roues est aussi rendu plus difficile par le froid et par la disparition ou la corruption de l'huile qu'on y verse. Mais ce sont surtout les oscillations des horloges marines qui deviennent inégales à cause du ballonnement continu du navire, de sorte qu'il faut sans doute corriger le défaut d'inégalité chez toutes les horloges, mais que c'est surtout dans le cas des horloges marines qu'il faut veiller à ce que les oscillations de grande et de petite amplitude soient isochrones.

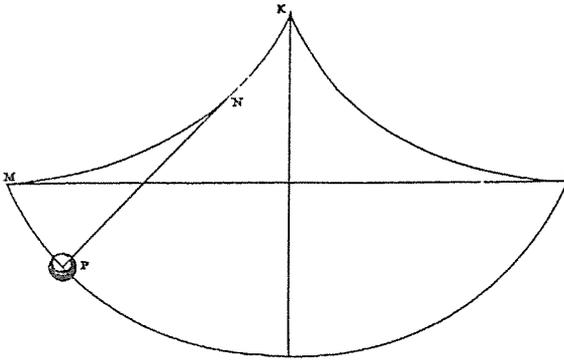
[Fig. 18.]



Soit attachée sur une table plane la règle AB grosse d'un demi-doigt [Fig. 18]. Ensuite soit fait un cylindre CDE d'une hauteur égale à cette grosseur et ayant le diamètre de la base égal à la moitié de la longueur du pendule; et soit FGHE une petite bande ou plutôt une mince plaque attachée à la règle en F et à la circonférence du cylindre en quelque point E, de sorte qu'elle s'applique en partie au cylindre et qu'en partie elle s'étende le long de la règle AB. Qu'une pointe de fer DI soit attachée au cylindre laquelle ait son extrémité un peu au-delà de la base inférieure et en façon qu'elle réponde exactement à sa circonférence.

Les choses étant ainsi arrangées, la pointe I décrira sur le plan de la table placée au-dessous la ligne courbe KI appelée cycloïde, aussitôt que le cylindre tourne en suivant la règle AB, dont il n'est séparé que par la grosseur de la petite lame FG. La base du cylindre employé sera le cercle générateur, CDE, de la cycloïde. Or, après que nous avons appliqué à la règle AB la table ou lame KL et que la partie KI de la cycloïde y a été tracée, nous retournerons cette lame et tracerons sur l'autre côté une ligne semblable KM émanant du même point K. Ensuite nous découperons la figure MKI exactement suivant ces lignes. C'est à cette figure-là qu'il faut adapter l'intervalle des lames entre lesquelles le pendule est suspendu¹⁾. À l'usage des horloges les petites portions d'arcs KM et KI suffisent; le reste de la ligne courbe serait inutile puisque le fil du pendule ne peut l'atteindre.

[Fig. 19.]



Mais afin qu'on entende plus pleinement la nature et l'effet de cette ligne admirable, il m'a semblé bon de représenter ici dans une autre figure [Fig. 19] les semicycloïdes entières KM et KI entre lesquelles le pendule KNP, d'une longueur égale à deux fois le diamètre du cercle générateur, est suspendu, lequel étant mis en mouvement exécutera des oscillations isochrones, quelle que soit leur amplitude, jusqu'à la plus grande de toutes correspondant à l'arc MPI: de telle manière que le centre de la sphère P attachée au fil se trouve toujours sur la ligne MPI qui est elle aussi une cycloïde. J'ignore si cette propriété remarquable est donnée à aucune autre ligne, savoir celle de se décrire soi-même par son évolution²⁾. Or, ce que nous avons dit à propos d'elle sera démontré en détail lorsque nous traiterons de la chute des corps graves et de l'évolution des courbes.

De cette lecture et de ces expériences, nous retenons la description-définition de la cycloïde ainsi que les trois affirmations suivantes, qui demandent à être démontrées.

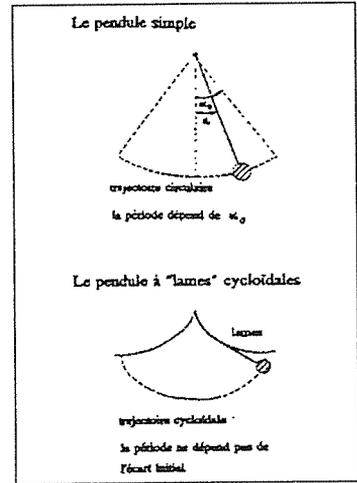
A Le pendule simple n'est pas *isochrone*.

B En suspendant le pendule entre deux "lames" cycloïdales (de dimensions appropriées), on retrouve comme trajectoire du pendule une cycloïde "égale".

C Le mouvement d'un corps "grave" sur une trajectoire cycloïdale est isochrone.

Il est clair que les affirmations B et C impliquent l'isochronisme d'un pendule muni de telles lames.

Chacun des paragraphes qui suivent reprend une de ces affirmations.



2. Le pendule simple (A)

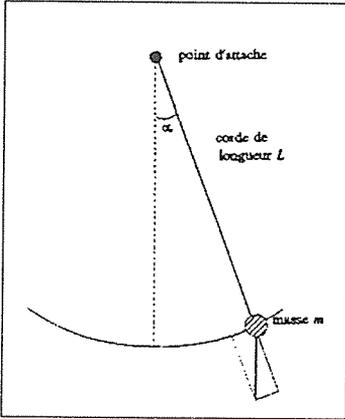
Approche de HUYGENS

Nous avons lu dans l'extrait 1 (p. 2): "*Le pendule simple ne possédait pas de mesure du temps certaine et égale, puisqu'on observe que les plus larges mouvements sont plus tardifs que les plus étroits.*"

HUYGENS ne donne pas de démonstration mais se réfère à l'expérience.

Approche analytique

Voyons ce qu'en dit la mécanique et l'analyse de NEWTON et d'après.



"Force égale masse fois accélération" nous donne l'équation différentielle

$$-mg \sin \alpha = mL \frac{d^2 \alpha}{dt^2}$$

ou encore

$$\frac{d^2 \alpha}{dt^2} = -\frac{g}{L} \sin \alpha$$

Dans une approximation pour petits angles α , on remplace $\sin \alpha$ par α et on trouve comme solution $\alpha = \alpha_0 \cos(\sqrt{\frac{g}{L}}t)$. La période (approchée) $2\pi\sqrt{\frac{L}{g}}$ ne dépend pas de α_0 .

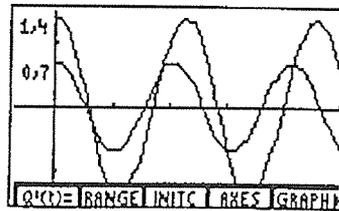
Il est bien plus compliqué de calculer la période exacte. On trouve (dans des cours universitaires de mécanique):

$$T = 4 \sqrt{\frac{L}{g}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - \sin^2 \frac{\alpha_0}{2} \sin^2 \varphi}}$$

$$= 2\pi \sqrt{\frac{L}{g}} \left[1 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1 \cdot 3 \cdot \dots \cdot (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot \dots \cdot (2n)} \right)^2 \sin^{2n} \frac{\alpha_0}{2} \right]$$

Approche graphique

Pour les élèves, l'équation différentielle est bien trop difficile à résoudre de façon analytique, mais il est possible de l'aborder graphiquement. On introduit l'équation différentielle dans une calculatrice graphique (en prenant p.e. $L = 1$ m) et on choisit deux valeurs différentes pour la condition initiale α_0 , p.e. 1,4 rad et 0,7 rad.



Les solutions graphiques données par l'appareil (suivant une méthode numérique nommée *Runge-Kutta*), n'ont manifestement pas la même période.

Nous avons utilisé ici (et dans les paragraphes suivants) la TI-85 de *Texas Instruments*.

3. La développante de la cycloïde est une cycloïde égale (B)

L'approche de HUYGENS

Jetons d'abord un coup d'oeil sur la démonstration de HUYGENS. Celle-ci remplit plusieurs pages de la troisième partie de *Horologium Oscillatorium* (extrait 2 ci-dessous). L'affirmation B dont il s'agit correspond à la proposition VI de cette troisième partie (p. 13). J'invite le lecteur à prendre le temps de "descendre" le long du fil déductif de HUYGENS, qui mène par toutes les six premières propositions de la troisième partie. Deux propositions de la deuxième partie sont également utilisées, notamment les propositions XIV et XV.

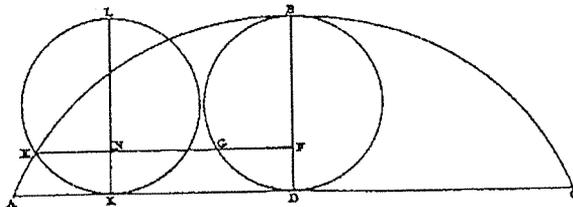
Le raisonnement se résume ainsi: HUYGENS considère deux cycloïdes égales comme sur la figure 58 (p. 12); il démontre que la "deuxième" cycloïde est perpendiculaire aux tangentes de la première, et que cette propriété suffit pour conclure qu'elle en est la développante. Le "passage à la limite" et la "dérivabilité" se cachent dans la démonstration de la proposition 3 (p. 11).

Extrait 2

PROPOSITION XIV.

Soit ABC une cycloïde [Fig. 35], AC sa base, BD son axe. Je pense qu'on voit avec évidence comment cette ligne est engendrée suivant ce qui a été exposé plus haut sur sa définition et sa description mécanique (). Soit de plus BGD un cercle symétrique par rapport à l'axe BD. Traçons EF parallèlement à la base AC par un point E arbitrairement choisi sur la cycloïde, laquelle parallèle coupe l'axe BD en F et la circonférence BGD en G. Je dis que la droite GE est égale à l'arc GB (*).*

[Fig. 35.]

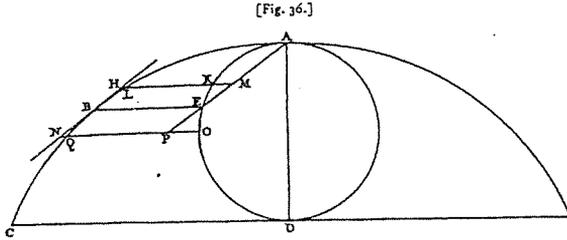


En effet, soit décrite par le point E une circonférence de cercle LEK égale à BGD et touchant la base de la cycloïde en K. Menons aussi le diamètre KL. La droite AK est donc égale à l'arc EK. Mais la longueur entière AD est égale à la demi-circonférence KEL; par conséquent KD est égale à l'arc EL ou GB. Or, KD ou NF est égale à EG, puisque EN = GF et que la partie NG leur est commune. Il est donc prouvé qu'on a aussi : GE = arc GB.

PROPOSITION XV.

Un point sur une cycloïde étant donné, mener par lui une tangente à la cycloïde³⁾.

Soit ABC [Fig. 36.] la cycloïde et B le point donné sur lui par lequel il faut mener la tangente.



Construisons autour de l'axe AD de la cycloïde le cercle générateur AED et menons BE parallèlement à la base de la cycloïde, laquelle parallèle coupe la circonférence du cercle nommé en E. Joignons les points A et E par une droite et tirons enfin par B une parallèle HBN à cette dernière. Je dis que cette parallèle touche la cycloïde en B.

En effet, prenons sur la parallèle un point H quelconque différent de B, d'abord vers le haut, et menons par H une droite parallèle à la base de la cycloïde, coupant celle-ci en L, la circonférence AED en K et la droite AE en M. Comme KL est alors égale à l'arc KA et que la droite KM est plus petite que l'arc KE, la droite ML sera inférieure à l'arc AE, c.à.d. à la droite EB ou MH; d'où il apparaît que le point H est situé en dehors de la cycloïde.

Prenons en second lieu sur la droite HN un point N situé au-dessous de B et menons, comme plus haut, par N une droite parallèle à la base, coupant la cycloïde en Q, la circonférence AED en O, et le prolongement de la droite AE en P. Comme OQ est alors égale à l'arc OA et que OP est plus grande que l'arc OE, PQ sera inférieure à l'arc EA, c.à.d. à la droite EB ou PN. D'où il apparaît de nouveau que le point N se trouve en dehors de la cycloïde. Puisque tous les points pris sur la droite HBN, excepté B, sont donc situés en dehors de la cycloïde, il est établi que cette droite touche la cycloïde en B. C. Q. F. D.



TROISIÈME PARTIE
DE L'HORLOGE À PENDULE.

De l'Evolution et de la Dimension des Lignes courbes.

DEFINITIONS.

I.

Appelons ligne courbée vers un seul côté une ligne que toutes ses tangentes touchent du même côté. Que si la ligne a quelques parties droites, les prolongements de celles-ci seront considérés comme des tangentes.

II.

Lorsque deux lignes de cette espèce émanent d'un même point et que la convexité de l'une est tournée vers la concavité de l'autre, comme sont placées dans la figure ci-jointe [Fig. 52] les courbes ABC et ADE, elles seront dites concaves l'une et l'autre vers le même côté.

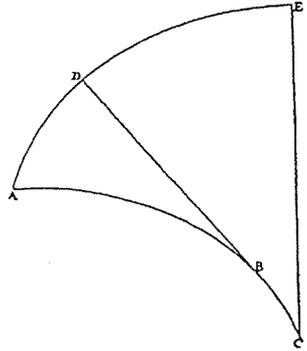
III.

Si l'on considère un fil, ou une ligne flexible, enroulé sur une ligne courbée vers un seul côté, et que, une extrémité du fil demeurant attachée à la courbe, l'autre en est écartée de telle manière que la partie libre du fil reste toujours tendue, il est manifeste qu'une certaine autre courbe est décrite par cette extrémité du fil. Donnons-lui le nom de Développante.

IV.

Et que celle sur laquelle le fil est enroulé porte le nom de Développée. Dans la figure qui précède [Fig. 52] ABC est la développée et ADE la développante correspondante de sorte que, lorsque l'extrémité du fil passe de A en D, la partie tendue du fil est la droite DB, le reste BC étant encore enroulé sur la courbe ABC. Il est manifeste que DB touche la développée en B.

[Fig. 52.]

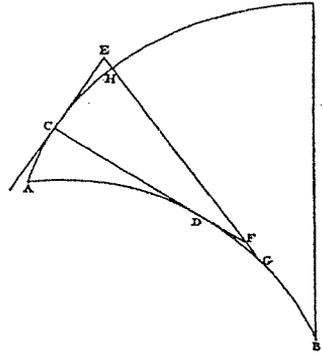


PROPOSITION I.

Toute tangente à la développée rencontrera la développante à angles droits.

Soit AB [Fig. 53] la développée et AH la ligne décrite par son évolution. Puisse la droite FDC, tangente en D à la courbe AD, couper en C la courbe ACH. Je dis qu'il la coupe à angles droits, en d'autres termes que si l'on mène la droite CE perpendiculairement à CD elle touche la courbe ACH en C. En effet, puisque DC touche la développée en D, il apparaît qu'elle représente la position du fil au moment où son extrémité est parvenue jusqu'au point C; et si nous réutilisons à démontrer que le fil, dans la description entière de la courbe ACH, n'atteint nulle part la droite CE excepté au point C, il sera manifeste que la droite CE touche la courbe ACH en ce point.

[Fig. 53.]

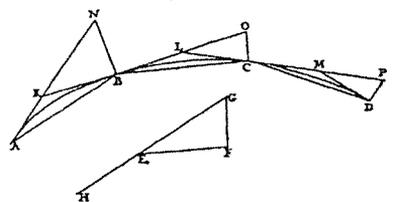


Prenons sur AC un point H quelconque différent de C et considérons d'abord le cas où ce point est plus éloigné de l'origine de la développante que le point C. Supposons que la partie libre du fil soit HG lorsqu'il est parvenu avec son extrémité jusqu'au point H. HG touche donc la ligne AB en G. Et comme dans la description de la partie CH de la courbe, l'arc DG a été développé, CD prolongée du côté D coupera HG, p. e. en F. Appelons E le point de rencontre de GH avec la droite CE. Puisque l'ensemble des deux lignes CF et FG est plus grand que DG, que cette dernière soit courbée ou droite, il en résultera, lorsqu'on ajoute de part et d'autre la droite DC, que la somme des droites CF et FG est plus grande que celle de la droite CD et de DG. Mais à cause de l'évolution du fil, il apparaît que la droite HG est égale à la somme de la droite CD et de DG. Par conséquent la somme CF + FG sera aussi plus grande que la droite HG; et en retranchant la partie commune FG, on trouve que CF est plus grande que HF. Or, FE > FC, parce que l'angle C du triangle FCE est droit. FE est donc a fortiori plus grande que FH. D'où il ressort que du moins de ce côté-là du point C l'extrémité du fil n'arrive pas jusqu'à la droite CE.

PROPOSITION II.

Toute ligne courbe terminée, courbée vers un seul côté, telle que ABD [Fig. 55] peut être divisée en un si grand nombre de parties qu'il s'en tire les cordes qui soutiennent chacun des arcs, telles que AB, BC et CD, et ensuite depuis chacun des points de division et aussi depuis l'extrémité de la courbe les tangentes AN, BO, CP, chacune jusqu'à la normale à la courbe au point de division suivants (BN, CO, DP sont des normales), que chaque corde, dis-je, aura à la normale correspondante (AB à BN, BC à CO, CD à DP) un rapport supérieur à tout rapport arbitrairement donné.

[Fig. 55.]



En effet, soit donné le rapport $EF : FG$ [Fig. 55] de deux droites formant les côtés d'un angle droit F et tirons la droite GEH .

Supposons d'abord la courbe ABD divisée par les points B, C en des parties si petites que les tangentes à la courbe en deux de ces points qui se suivent se coupent l'une l'autre suivant des angles dont chacun est supérieur à l'angle FEH , tels que $\angle AKB, \angle BLC$ et $\angle CMD$. La possibilité d'une pareille division est trop évidente pour exiger une démonstration. Les cordes AB, BC et CD ayant été tirées et les normales à la courbe BN, CO, DP ayant été élevées, lesquelles rencontrent les prolongements de AK, BL et de CM en N, O et P , je dis que chacun des rapports de deux droites $AB : BN, BC : CO$ et $CD : CP$ est supérieur au rapport $EF : FG$.

Car, puisque $\angle AKB > \angle HEF, \angle NKB$, supplément du premier, sera plus petit que $\angle GEF$. Or, l'angle B du triangle KBN est droit, comme F du triangle EFG . Par conséquent $KB : BN > EF : FG$. Mais $AB > KB$, puisque l'angle K du triangle AKB est obtus; en effet, il est plus grand que l'angle HEF lequel est obtus par construction. Le rapport $AB : BN$ sera donc plus grand que le rapport $KB : BN$ et à plus forte raison que le rapport $EF : FG$. On démontrera de la même manière que les rapports $BC : CO$ et $CD : DP$ sont l'un et l'autre plus grands que le rapport $EF : FG$. La proposition est donc démontrée.

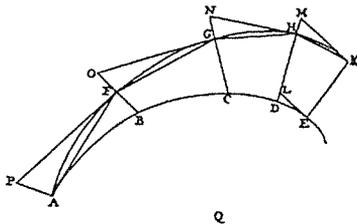
PROPOSITION III.

Deux lignes courbées l'une et l'autre vers un seul côté et concaves vers le même côté ne peuvent émaner d'un seul point dans une telle position l'une par rapport à l'autre que toute droite normale à l'une soit aussi normale à l'autre.

En effet, soient ACE et AGK possédant l'extrémité commune A , si cela est possible, des lignes courbées de cette espèce [Fig. 56] et soit KE une normale en un point quelconque K de la courbe extérieure à cette dernière: étant normale à cette courbe KE le sera donc aussi à la courbe ACE .

Nous pouvons prendre maintenant quelque droite Q plus grande que la courbe KGA . Supposons KGA divisée par les points H, G, F , comme il a été dit dans la proposition précédente, en un si grand nombre de parties que chacune des cordes KH, HG, GF, FA ait à la normale adjacente HM, GN, FO ou AP un rapport supérieur à celui de la ligne Q à la droite KE . L'ensemble des cordes nommées aura donc aussi à la somme de toutes les normales un rapport supérieur à $Q : KE$. Prolongeons maintenant ces mêmes normales et puissent-elles couper la courbe ACE en D, C , et B , normalement par hypothèse. On aura maintenant: $KE < MD$. En effet, EL , perpendiculaire à KE , sera tangente à la courbe ACE , puisque KE lui est normale; EL coupera donc nécessairement la droite MD entre D et M . Par conséquent KE , qui est la plus courte de toutes les lignes comprises entre les parallèles EL et KM , sera plus petite que ML et à plus forte raison que MD . On démontrera de la même manière que $HD < NC, GC < OB$, et $FB < PA$. Comme on a donc $PA > FB$, la somme $PA + OF$ sera supérieure à OB . Pareillement, puisque $OB > GC$, la somme $OB + NG$ sera plus grande que NC . Mais la somme $PA + OF$ était supérieure à OB . Par conséquent la somme des trois termes PA, OF et NG sera certainement plus grande que NC . Derechef, puisque $NC > HD$, la somme $NC + MH$ sera plus grande que MD . Partant, si l'on prend au lieu de NC la somme des trois termes PA, OF, NG qui lui est supérieure, la somme des quatre grandeurs PA, OF, NG et MH sera a-fortiori plus grande que MD : et par conséquent cette même somme sera aussi certainement plus grande que la droite KE , puisque MD surpassait KE en longueur. Or, nous avons dit que la somme des sous-tangentes $AF + FG + GH + HK$ à celle de toutes les normales PA, OF, NG et MH un rapport supérieur à celui de la ligne Q à KE . Par conséquent la somme de toutes les cordes sera plus grande que la droite Q . Mais cette dernière avait été prise plus grande que la courbe AGK . La somme des cordes $AF + FG + CK + HK$ sera donc plus grande que la courbe AGK aux arcs de laquelle ces cordes correspondent; ce qui est absurde puisque chacune des cordes est plus petite que l'arc correspondant.

[Fig. 56.]



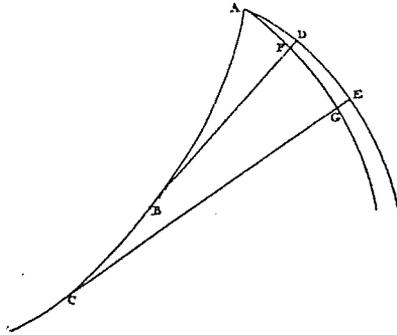
PROPOSITION IV.

Si d'un même point partent deux lignes courbées l'une et l'autre vers un seul côté et concaves vers le même côté, et ainsi situées l'une par rapport à l'autre que toutes les tangentes à l'une d'elles coupent l'autre à angles droits, cette deuxième sera la développante de la première à partir du point commun.

Soient données les lignes ABC et ADE [Fig. 57] courbées l'une et l'autre vers un seul côté et concaves vers le même côté, possédant l'extrémité commune A. Puissent toutes les tangentes à la ligne ABC, telles que BD et CE, couper la ligne ADE normalement. Je dis que ADE est décrite par l'évolution de ABC à partir de l'extrémité A.

En effet, supposons, si cela est possible, que par la dite évolution soit décrite une certaine autre courbe AFG. Par conséquent des lignes droites quelconques, tangentes à la développée ABC, telles que BD et CE, couperont cette courbe AFG à angles droits*, p. e. en F et G. Mais par hypothèse ces mêmes tangentes sont aussi normales à la ligne ADE. Or, nous avons affaire à des courbes ADE et AFG, se terminant au même point A, courbées l'une et l'autre vers un seul côté et concaves vers le même

[Fig. 57.]



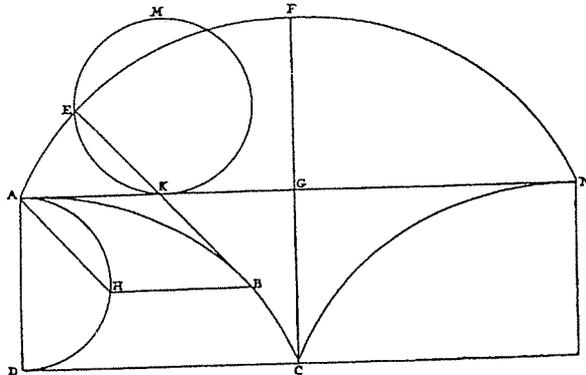
côté, puisqu'elles sont concaves vers le même côté que ABC; car ceci est vrai de la ligne ADE par hypothèse et de la ligne AFG d'après la première proposition de cette Partie. De plus toutes les normales à l'une d'elles sont aussi normales à l'autre. Mais il a été démontré plus haut que ceci est impossible*. Il est donc établi que ADE elle-même sera décrite par l'évolution de la ligne ABC. C. Q. F. D.

PROPOSITION V.

Lorsqu'une droite touche une cycloïde en son sommet et qu'on construit sur cette droite prise pour base une autre cycloïde, semblable et égale à la première, à partir du point coïncidant avec le sommet nommé, une tangente quelconque à la cycloïde inférieure sera normale à l'arc cycloïdal supérieur¹.

Supposons que la droite AG [Fig. 58] touche la cycloïde en son sommet A et que sur cette droite prise pour base une autre cycloïde AEF à sommet F soit construite. Soit BK une tangente à la cycloïde ABC. Je dis que cette tangente, prolongée jusqu'à la cycloïde AEF, la rencontrera à angles droits.

[Fig. 58.]



En effet, décrivons autour de $A\bar{D}$, axe de la cycloïde ABC , le cercle générateur AHD qui coupe BH , parallèle à la base, en H , et tirons la droite HA *. Il s'ensuit, puisque BK touche la cycloïde en B , qu'elle est parallèle à la droite HA *. Par conséquent $AHBK$ est un parallélogramme et AK est égale à HB , c.à.d. à l'arc AH *. Décrivons maintenant le cercle KM égal au cercle générateur AHD , touchant la base AG en K et coupant la droite BK prolongée en E . Comme BKE est parallèle à AH et par conséquent $EKA = KAH$, il est manifeste que le prolongement de BK coupe de la circonférence KM un arc égal à celui que la droite AH coupe de la circonférence AHD . Par conséquent l'arc KE est égal à l'arc AH , c.à.d. à la droite HB et à la droite KA . Mais de cette égalité il résulte, d'après une propriété de la cycloïde, puisque le cercle générateur MK a touché la règle en K , que le point décrivant la cycloïde à passé par E . La droite KE rencontre donc la cycloïde en E à angles droits **. Or, KE n'est autre chose que le prolongement de BK . Il est donc évident que BK prolongée jusqu'à la cycloïde lui est normale. C. Q. F. D.

* Propos. 13. de
la 2^{ème} partie.
* Propos. 14. de
la 2^{ème} partie.

** Propos. 12. de
la 2^{ème} partie.

PROPOSITION VI.

Par l'évolution, à partir du sommet, d'une demi-cycloïde, une autre demi-cycloïde est décrite, égale et semblable à la première, dont la base coïncide avec la droite qui touche la cycloïde développée en son sommet.

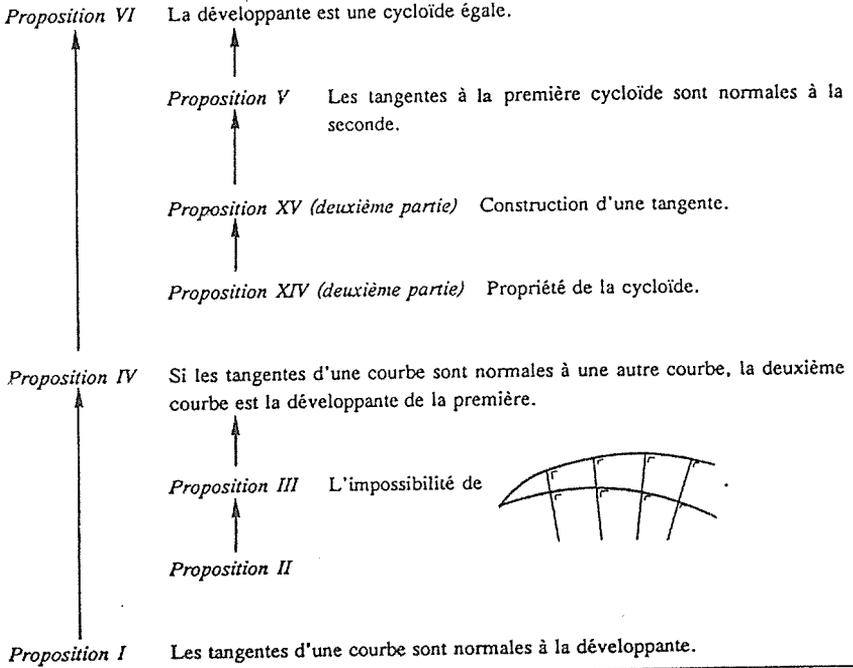
Soit donnée une demi-cycloïde ABC [Fig. 58] à laquelle soit imposée une autre demi-cycloïde semblable AEF , comme dans la proposition précédente. Je dis que lorsque la ligne flexible appliquée à la demi-cycloïde ABC est développée à partir du point A , elle décrit de son extrémité la demi-cycloïde AEF . En effet, puisque les demi-cycloïdes ABC et AEF , courbées l'une et l'autre vers un seul côté et concaves vers le même côté, de plus situées de sorte que toutes les tangentes de la demi-cycloïde ABC coupent la demi-cycloïde AEF à angles droits, il s'ensuit que cette dernière est décrite par l'évolution de la première à partir du point A *. C. Q. F. D.

Et il apparaît que si nous construisons une demi-cycloïde CN symétrique avec ABC par rapport à la droite CG , une autre demi-cycloïde FN sera décrite par l'extrémité du fil, soit par l'évolution de la courbe CN soit lorsque le fil, déjà tendu suivant CF , est enroulé sur elle; et que cette demi-cycloïde formera avec la précédente, AEF , une cycloïde entière.

Par ces considérations, et par la Prop. XXV de la Chute des Corps pesants, la vérité de ce que nous avons dit plus haut dans la Construction de l'Horloge sur le mouvement uniforme du pendule est présentement manifeste. En effet, il est clair que le pendule, suspendu et mis en mouvement entre une paire de lames courbées en forme de demi-cycloïde, décrit par son mouvement un arc de cycloïde et que par conséquent ses oscillations, quelle que soit leur amplitude, sont exécutées dans des temps égaux. Car il n'est d'aucune importance que le mobile parcoure une surface courbée en cycloïde ou bien qu'étant attaché à un fil il décrive cette même ligne en l'air, attendu que dans l'un et l'autre cas il est également libre et à la même inclinaison au mouvement dans tous les points de la courbe.

La question qui reste ouverte après cette lecture attentive, c'est "comment a-t-il trouvé ça?" Comme dans tout texte organisé de façon déductive (et non de façon heuristique), l'auteur ne le dit pas! Au contraire, il prétend l'avoir trouvé par hasard et sans peine: "[...], laquelle nous y avons trouvée sans en avoir le moindre soupçon, rien qu'en raisonnant suivant les méthodes de l'art" (extrait 1, p.2).

Schéma: le fil déductif de la démonstration de HUYGENS

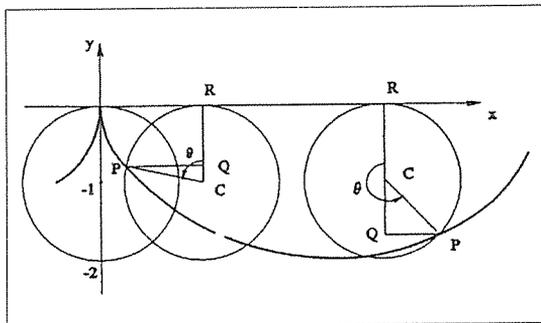


Approche analytique

Re-démontrons maintenant cette même propriété en utilisant les moyens actuels de l'analyse. Les questions parsemées dans le texte guideront les élèves qui en ont besoin.

Tout d'abord, il faut "traduire" la définition "mécanique" de la cycloïde en langage analytique.

Prenons comme unité de longueur le rayon de la "roue".

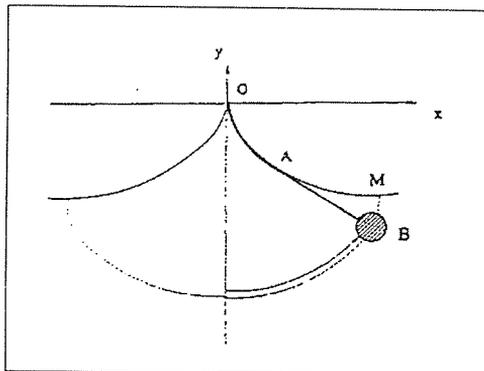


- ? Comment traduire le fait que la roue "ne glisse pas"?
- ? Exprimer les coordonnées de C en fonction de l'angle θ .
- ? Utiliser le triangle CPQ afin d'exprimer les coordonnées de P en fonction de θ .

Nous obtenons des équations paramétriques de la première cycloïde (les "lames"):

$$\begin{cases} x = \theta - \sin\theta \\ y = -1 + \cos\theta \end{cases}$$

Attachons maintenant en O un pendule de longueur égale à $|\text{arc } OM|$. A un moment donné, la corde suit l'arc OA et continue de A à B selon la tangente. Soit θ_1 la valeur du paramètre θ en A .



- ? Calculer la mesure de l'arc OA et du segment AB

On trouve pour l'arc OA

$$\int_0^{\theta_1} \sqrt{\left(\frac{dx}{d\theta}\right)^2 + \left(\frac{dy}{d\theta}\right)^2} d\theta = \dots = 4 \left(1 - \cos \frac{\theta_1}{2}\right).$$

En remplaçant θ_1 par π on voit que la corde mesure 4 unités. AB mesure donc $4 \cos \frac{\theta_1}{2}$ unités.

- ? Les coordonnées de B sont celles de A plus $|AB|$ fois un vecteur normé tangent à la cycloïde et orienté de A vers B . Qu'est-ce que ça donne?

Ça donne, après quelques lignes de calcul, $B(\theta_1 + \sin \theta_1, -3 - \cos \theta_1)$.

? Montrer que, si θ_1 varie, B parcourt une cycloïde égale à la première.

Il suffit pour cela de vérifier que

$$\begin{cases} B_x(\theta) = A_x(\theta + \pi) - \pi \\ B_y(\theta) = A_y(\theta + \pi) - 2 \end{cases}$$

(B_x et B_y , par exemple, désignent les coordonnées du point B).

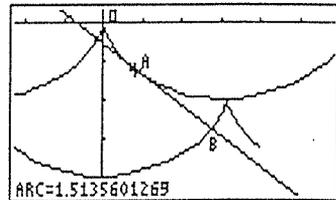
Certes, il y a bien d'autres façons de procéder pour démontrer que la développante est une cycloïde égale. On pourrait partir des équations des deux cycloïdes, définir B comme le point d'intersection de la tangente en A et la deuxième cycloïde, et vérifier que $|\text{arc } OA| + |AB| = |\text{arc } OM|$. Ou alors, on pourrait suivre HUYGENS d'un peu plus près: démontrer "en général" qu'une courbe normale à toutes les tangentes d'une courbe donnée, en est la développante, et puis vérifier que nos deux cycloïdes vérifient cette propriété.

Les concepts utilisés et les calculs de l'approche analytique sont plus compliqués que ceux de HUYGENS. L'avantage, néanmoins, c'est qu'il s'agit d'un *calcul*: la stratégie à suivre n'est pas difficile à découvrir; pour aboutir, il suffit de persévérer et d'être suffisamment habile en calcul algébrique. Le "calculus" de NEWTON et autres nous permet, en quelque sorte, de nous passer du génie de HUYGENS...

Approche graphique

Contrairement aux systèmes d'algèbre sur ordinateur (*Derive*, *Mathematica*, ...) les calculatrices graphiques ne peuvent pas (encore) effectuer à notre place ces manipulations de formules. Mais elles peuvent aider à visualiser et à vérifier ce calcul. Avant de voir apparaître la cycloïde sur l'écran, il faut en déterminer les équations. (Pour mes élèves, c'est un argument motivant en faveur de l'étude des équations paramétriques).

Dessignons sur l'écran la première cycloïde et sa translatée. En A , dessinons la tangente. Calculons (sur la calculatrice) $|\text{arc } OA|$ (figure ci-jointe) et $|AB|$. On additionne ces deux mesures et on voit apparaître la valeur exacte de 4. Si la calculatrice ne démontre pas, du moins elle convainc.



4. L'isochronisme (C)

Approche de HUYGENS

La dernière des trois affirmations de nos "grandes lignes", notamment l'isochronisme d'un mouvement oscillatoire sur une trajectoire cycloïdale, est plus difficile à démontrer que la deuxième. Mon collage de *Horologium Oscillatorium* (extrait 3 ci-dessous) ne reprend que quelques propositions et "saute" les démonstrations. Notons au passage la façon dont les propriétés du mouvement de chute sont déduites de quelques "hypothèses" simples. HUYGENS "refait" ici une partie du travail de GALILÉE. Il est intéressant de repérer le "passage à la limite": "*si l'on considère les lignes courbes comme composées d'une infinité de lignes droites...*" (p. 20). C'est cette idée audacieuse qui a permis à LEIBNIZ, pendant les mêmes années 1670, de mettre au point le calcul différentiel.

Extrait 3

DEUXIÈME PARTIE DE L'HORLOGE À PENDULE.

De la Chute des Corps pesants et de leur Mouvement cycloïdal.

HYPOTHÈSES.

I.

Si la gravité n'existait pas et qu'aucune résistance d'air ne s'opposait au mouvement des corps, chacun d'eux continuerait son mouvement avec une vitesse uniforme en suivant une ligne droite.

II.

Mais maintenant il arrive par l'action de la gravité, de quelque cause qu'elle provienne, que les corps se meuvent d'un mouvement composé de leur mouvement uniforme dans une direction quelconque et de celui de haut en bas qui est dû à la gravité.

III.

On peut considérer ces deux mouvements séparément et l'un n'est pas empêché par l'autre¹).

PROPOSITION I¹).

Dans des temps égaux les accroissements de la vitesse d'un corps tombant sont toujours égaux et les espaces parcourus durant des temps égaux depuis le commencement de la chute forment une série dont les différences successives sont constantes.

PROPOSITION II¹).

L'espace parcouru pendant un certain temps par un corps qui commence sa chute en partant du repos est la moitié de l'espace que ce corps pourrait parcourir d'un mouvement uniforme avec la vitesse acquise par la chute au bout du temps considéré.

PROPOSITION III.

Deux espaces parcourus par un corps tombant dans des temps quelconques, dont chacun est pris depuis le commencement de la chute, sont entre eux comme les carrés de ces temps, ou bien comme les carrés des vitesses acquises.

PROPOSITION VIII.

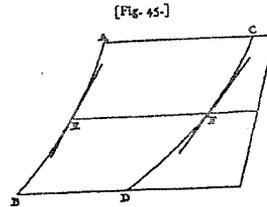
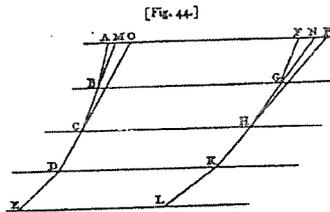
Lorsqu'un mobile descend d'un mouvement continu d'une hauteur déterminée par un nombre quelconque de plans contigus d'inclinaison quelconque, il finira toujours par acquies la même vitesse, laquelle sera égale à celle qu'il acquerrait par une chute verticale de même hauteur¹⁾.

PROPOSITION XI.

Lorsqu'un mobile tend à descendre par quelque surface et qu'après l'inversifement du mouvement il est porté en haut par la même surface ou par une autre semblable et semblablement posée, il montera et descendra par le même espace en des temps égaux¹⁾.

PROPOSITION XXI.

Lorsqu'un mobile descend d'un mouvement continu le long de certains plans inclinés contigus quelconques, et qu'une autre fois il descend de la même hauteur par un même nombre de plans contigus, ainsi construits que chacun d'eux correspond en hauteur à un des plans précédents, mais que le deuxième plan a toujours une plus grande inclinaison que le premier; je dis que le temps de la descente le long des plans moins inclinés est plus bref que celui de la descente par les plans plus inclinés.



Or, il est manifeste par là, si l'on considère les lignes courbes comme composées d'une infinité de lignes droites, que lorsqu'on a affaire à deux surfaces inclinées suivant des lignes courbées de la même hauteur et dont l'inclinaison de l'une surpasse toujours celle de l'autre en des points quelconques de même hauteur, le corps descendra alors aussi en un temps plus court le long de la surface moins inclinée que le long de la plus inclinée.

Supposons par exemple que les deux surfaces [Fig. 45] soient inclinées suivant les courbes AB et CD de même hauteur et pour lesquelles, lorsqu'on prend des points quelconques E, F de même hauteur, l'inclinaison de CD surpasse celle de AB, en d'autres termes que la tangente à la courbe CD en F soit plus inclinée par rapport à l'horizon que la tangente en E à la courbe AB: le temps de la chute par AB sera plus court que celui de la chute par CD.

Et la même chose aura lieu lorsque l'une des lignes est droite, pourvu que l'inclinaison partout égale de la droite soit plus grande ou plus petite que celle de la courbe en chacun de ses points.

PROPOSITION XXII.

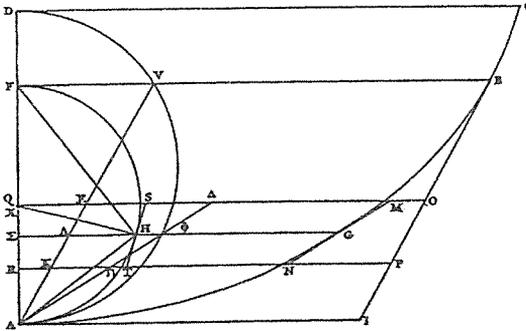
Si l'on considère dans une cycloïde à axe vertical, ayant son sommet en bas, deux parties de même hauteur de la courbe, mais dont l'une est plus proche du sommet, le temps de descente par la partie supérieure sera plus petite que celui de la descente par la partie inférieure.

PROPOSITION XXIII.

Soit la cycloïde ABC [Fig. 48] ayant son sommet vers le bas et son axe AD vertical. Prenons sur elle un point quelconque B et tirons de là vers le bas la droite BI qui touche la cycloïde et se termine à la droite horizontale AI. Tirons la droite BF perpendiculairement à l'axe et décrivons sur FA, après l'avoir divisée en deux parties égales par le point X, la demi-circonférence FHA. La droite ΣG ayant été ensuite menée parallèlement à BF par un point quelconque G pris sur la courbe BA, laquelle ΣG coupe la circonférence FHA en H et l'axe AD en Σ, considérons les tangentes aux deux courbes aux points G et H et les parties de ces tangentes interceptées par les mêmes deux horizontales MS et NT, savoir MN et ST. Et puissent les mêmes droites MS et NT intercepter sur la tangente BI la partie OP et sur l'axe DA la partie QR.

Cela étant ainsi, je dis que le temps dans lequel un corps parcourra la droite MN avec une vitesse constante telle qu'il peut l'acquérir en descendant par l'arc BG de la cycloïde, sera au temps dans lequel la droite OP sera parcourue avec une vitesse constante égale à la moitié de celle qui est acquise par la descente le long de la tangente BI, comme la tangente ST est à la partie QR de l'axe.

[Fig. 48.]

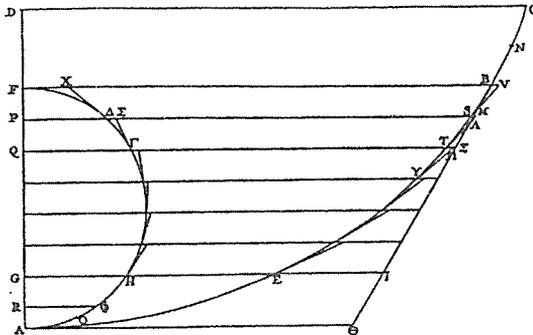


PROPOSITION XXIV.

Considérons de nouveau, comme dans la Proposition précédente, la cycloïde ABC [Fig. 49] dont le sommet se trouve en bas et dont l'axe AD est vertical. Prenons sur elle un point quelconque B et tirons à partir de lui de haut en bas la tangente à la cycloïde BΘ qui rencontre la droite horizontale AΘ en Θ. Tirons encore la droite BF perpendiculaire à l'axe et décrivons sur FA la demi-circonférence FHA. Puisse ensuite une autre droite GE, parallèle à FB, couper la cycloïde en E, la droite BΘ en I, la circonférence FHA en H et enfin l'axe DA en G.

Je dis que le temps de la descente suivant l'arc de cycloïde BE est à celui suivant la tangente BI avec la moitié de la vitesse qui peut être acquise par une chute suivant BΘ comme l'arc FH est à la droite FG.

[Fig. 49.]



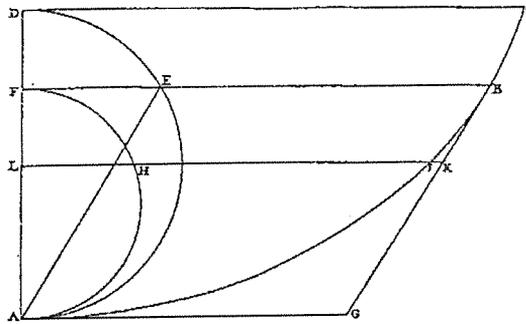
PROPOSITION XXV.

Dans une cycloïde à axe vertical et dont le sommet se trouve en bas, les temps de descente dans lesquels un mobile, partant du repos d'un point quelconque de la courbe, atteint le point le plus bas, sont égaux entre eux, et ont au temps de la chute verticale le long de l'axe entier de la cycloïde une raison égale à celle de la demi-circonférence d'un cercle à son diamètre.

PROPOSITION XXVI.

Les mêmes choses étant supposées, et une horizontale HI étant en outre tirée [Fig. 51] qui coupe l'arc BA en I et la circonférence FHIA en H, je dis que le temps nécessaire pour parcourir l'arc BI est à celui dans lequel est parcouru l'arc IA après BI, comme l'arc FH de la circonférence est à HA.

[Fig. 51.]

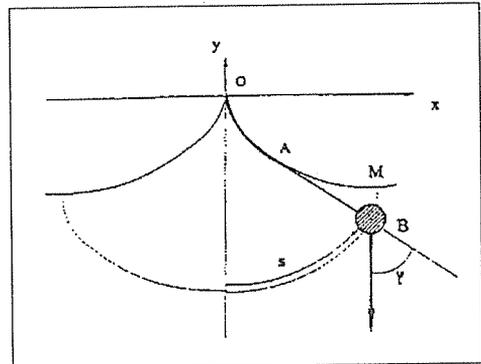


Approche analytique

Dans une approche analytique, une équation différentielle intervient à nouveau.

Sur la figure, on voit que la composante tangente de la pesanteur mesure $m g \sin \psi$. On obtient donc l'équation différentielle

$$-mg \sin \psi = m \frac{d^2 s}{dt^2}$$



? Quel rapport y a-t-il entre l'angle ψ et la valeur du paramètre θ en A ?

Il suffit p.e. d'exprimer la pente de AB , d'une part en fonction de θ (en utilisant les équations de la première cycloïde), et d'autre part en fonction de ψ , pour trouver que

$$\psi = \frac{\theta}{2}$$

? Exprimer la mesure s de l'arc NB en fonction de θ .

Pas besoin pour cela de calculer à nouveau une intégrale: on peut réutiliser intelligemment la formule trouvée plus haut pour la mesure de l'arc OA . On trouve:

$$s = 4 \sin \frac{\theta}{2}.$$

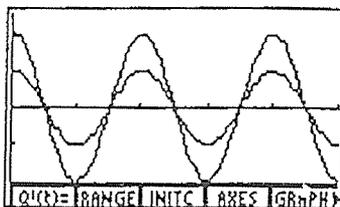
En substituant tout ça dans l'équation différentielle, on obtient

$$\frac{d^2 s}{dt^2} = -\frac{g}{4} s.$$

La solution est $s = s_0 \cos\left(\frac{\sqrt{g}}{2} t\right)$. La période, $\frac{4\pi}{\sqrt{g}}$, est donc constante, en effet.

Approche graphique

Graphiquement, ceci peut être découvert par des élèves qui n'ont pas étudié la résolution d'équations différentielles. On fait tracer sur l'écran les solutions pour quelques valeurs de la condition initiale s_0 , et on constate que la période ne change pas. En déterminant un "modèle-sinus" pour les graphes obtenus, on peut découvrir également la formule exacte de la solution (et donc de la période).



5. Bibliographie

- [Bo] H. J. M. Bos, *Studies on Christiaan Huygens: invited papers from the symposium on the life and work of Christiaan Huygens, Amsterdam 22-25 August 1979*, Lisse (Swets & Zeitlinger), 1980
- [Cl] M. Cleve, D. De Bock, M. Roelens, *De grafische rekenmachine in de wiskundeles*, *Uitwisseling* 9/4 (1993), 15-50
- [Ed] C. H. Edwards, Jr., *The historical development of the calculus*, New York (Springer), 1979
- [Fi] R. Finney, G. Thomas, F. Demana, B. Waits, *Calculus, a graphing approach*, Reading MA (Addison-Wesley), 1993, 2 volumes
- [Ha] M. Hallez, Introduction de l'histoire des mathématiques du 17^{ème} siècle en classes de 4^{ème} et 3^{ème}, Pour une perspective historique dans l'enseignement des mathématiques, *Bulletin inter-IREM épistémologie*, Lyon, p. 271-291
- [Ho] R. Hooykaas, *Experientia ac ratione: Huygens tussen Descartes en Newton*, Mededeling 201 van het Museum Boerhave, Leiden, 1979
- [Hu1] C. Huygens, *Oeuvres complètes*, Den Haag (Nijhoff), 1888-1950, 23 volumes
- [Hu2] C. Huygens, *Horologium Oscillatorium*, Bruxelles (Culture et civilisation), 1966 (fac simile de l'édition de 1673)
- [MB] Museum Boerhave, *Christiaan Huygens 1629-1695*, Mededeling 224, Leiden, 1988
- [St] D. J. Struik, *The land of Stevin and Huygens*, Dordrecht (Reidel), 1981