LA NAISSANCE DE LA PERSPECTIVE AU XVÈME SIÈCLE

IREM PARIS 7, Groupe M:A.T.H.
Philippe Brin, Michèle Grégoire, Maryvonne Hallez

Une approche pluridisciplinaire en classe de cinquième, de première S et de première E.

Les élèves d'une classe de 1°S et d'une classe de 1°E de deux lycées de la région parisienne ont travaillé avec leurs professeurs de mathématiques, de français, d'histoire-géographie, de dessin et de construction, sur le thème de la naissance de la perspective dans la peinture italienne au XVème siècle.

Ils ont été tout d'abord sensibilisés aux diverses façons de représenter l'espace au cours d'une conférence de Philippe Comar, professeur aux Beaux-Arts. La question centrale était: peut-on représenter ce que l'on voit, sur une surface plane ?

Une visite au musée du Louvre a été l'occasion de découvrir sur quelques tableaux de Cimabue, Giotto, Fra Angelico, Uccello,..., l'apparition de la perspective ou plus exactement d'une mise en espace des volumes.

Le problème ainsi posé, il nous était alors possible d'étudier avec les élèves les règles élaborées par les artistes du XVème siècle. Il est en effet possible de suivre l'évolution de ces règles en s'intéressant à la construction de l'apparence d'un dallage à mailles carrées. Nous leur avons donc présenté les diverses méthodes utilisées au XIVème siècle et au début du XVème. Cette présentation s'est faite à partir de la lecture du texte d'Alberti (*De Pictura* 1435, livre I, §§ 19 et 20) dans lequel l'auteur fournit une méthode qu'il qualifie d'excellente. Par ailleurs, un problème (annexe 1) leur a permis d'étudier l'aspect mathématique de ces constructions. Un second problème a été proposé aux élèves à propos d'un théorème de Guidobaldo del Monte daté de 1600 qui permet de donner un réel fondement à la théorie de la perspective géométrique (annexe 3).

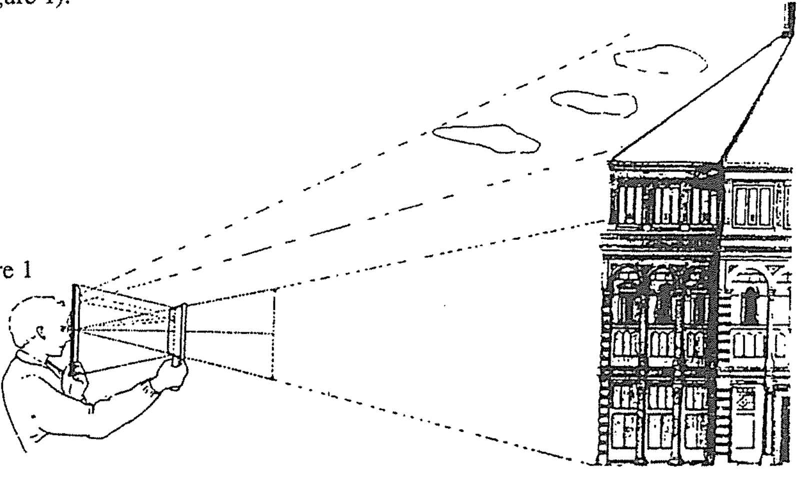
Dans un troisième temps, Jean-Pierre Le Goff et Didier Bessot de l'IREM de Caen, ont présenté aux élèves les méthodes utilisées par Piero della Francesca pour effectuer des représentations en perspective géométrique. Ces méthodes étant relativement simples à utiliser, les élèves ont pu réaliser des représentations de figures planes, de volumes, certains étant parfois très complexes.

Lors d'un voyage à Florence, les élèves purent apprécier les œuvres des peintres italiens du Quattrocento ainsi que celles de quelques-uns de leurs prédécesseurs ou successeurs. Par groupes de trois ou quatre, ils étaient chargés d'étudier l'œuvre d'un artiste et de mettre en évidence ses aspects particuliers concernant la perspective. A leur retour, ce travail a été poursuivi avec l'aide de leurs professeurs de français, d'histoire.et de dessin. Les élèves de 1°E ont, pour leur part, plus insisté sur l'aspect technique de la perspective et ont continué leur recherche avec leur professeur de construction.

Une exposition, réalisée par les élèves, sous la direction de la graphiste Joëlle Brover, a permis de présenter le travail des élèves au cours de l'année. Elle tente de retracer brièvement l'histoire de la perspective et de présenter les travaux des principaux acteurs de cette histoire. Elle est aussi le reflet du regard nouveau des élèves sur la peinture de la Renaissance italienne.

Dans le même temps, des élèves de 5° du collège Paul Bert ont travaillé sur le Moyen-âge et la Renaissance. Ils ont étudié quelques règles de la perspective centrale ainsi que l'expérience de Brunelleschi évoquée sur la figure 1, à partir de laquelle on peut percevoir les prémisses des modes de représentation futurs. Sur cette figure, on peut voir un personnage, Brunelleschi, qui regarde le Baptistère de Florence à travers un trou percé dans un tableau. Sur ce tableau, il a représenté ce même Baptistère, et il se trouve à l'endroit exact d'où il a exécuté sa peinture. le tableau est percé au niveau du point de fuite. A cette occasion, les élèves ont fabriqué des "tavolette" (petits tableaux) sur lesquelles était représenté le Baptistère de Florence. Chaque tavoletta était percée au point de fuite principal, et les élèves ont pu vérifier, lors de leur voyage à Florence, le bien-fondé de la méthode de Brunelleschi. En effet, ils se sont placés face au Baptistère à un endroit déterminé, ont regardé par le trou percé dans la tavoletta placée à l'envers et ont mis un miroir entre le tableau et le Baptistère. Ils ont alors pu constater que le Baptistère réel et le reflet du tableau dans le miroir ne faisaient qu'une seule et même image (voir la figure 1).

Figure 1



Expérience de Brunelleschi (~1420)

Par ailleurs, les élèves ont réalisé une fenêtre grâce à laquelle ils ont pu reproduire l'expérience de la "fenêtre de Dürer". Ils avaient eu la même sensibilisation que les élèves de 1° lors d'une conférence de Philippe Comar et d'une visite-conférence au musée du Louvre. En outre ils ont travaillé avec leurs professeurs, sur la légende de la vraie croix, thème développé par Piero della Francesca dans les fresques de l'église Saint François d'Arezzo. Suivant les traces de Piero dans sa ville natale de Borgo San Sepolcro, ils ont étudié les œuvres de Piero exposées au musée civique de Borgo. Des tavolette ainsi que la "fenêtre de Dürer" ont été jointes à l'exposition "Perspectives de Florence" des élèves de 1°.

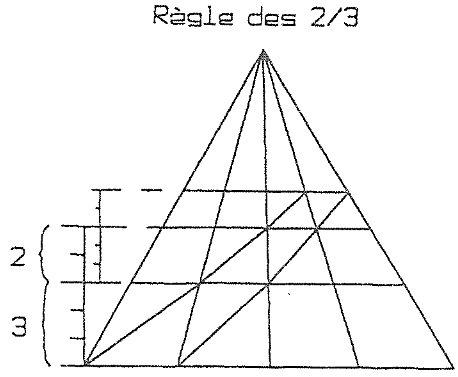
Rapide histoire de l'apparition de la perspective.

Parmi les premiers exemples d'apparition de la perspective figure la représentation d'un carrelage. Au XIIIème siècle et jusqu'à la fin du XVème, les artistes et mathématiciens admettront la convergence des perpendiculaires au tableau en un point unique. Le problème posé était donc la détermination de la position des parallèles au plan du tableau.

Les premières règles consistaient à considérer la suite des écartements successifs des parallèles comme une suite géométrique. Le coefficient de cette suite était le plus généralement 2/3[1] (cf figure 2)

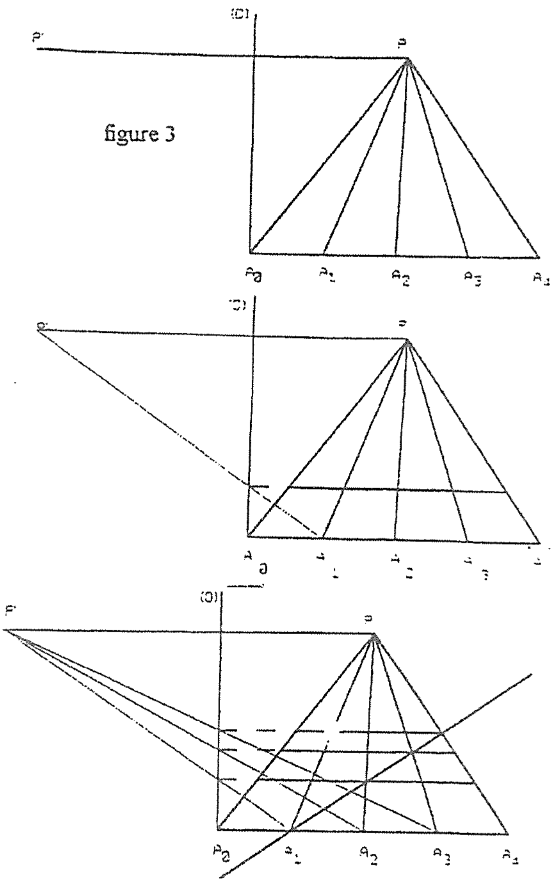
[1] A ce propos voir l'annexe 1 (la règle des deux tiers), l'annexe 4 (exercice 1) et l'annexe 5 (1° question).

figure 2



Ce mode de représentation ne conserve pas l'alignement des diagonales, ce qui, pour notre regard du XXème siècle, provoque une aberration par rapport à notre vision habituelle, celle de la photographie (fig.2). Quelle que soit la suite géométrique choisie, ce "défaut" demeure, mais il est possible d'obtenir des courbures différentes suivant le choix de l'écartement initial. Certaines courbes sont concaves, convexes, et parfois, on peut observer un changement de courbure, par exemple, lorsque l'écartement initial est très légèrement supérieur à 1/5 de la distance de la première parallèle au point de fuite principal.

figure 3



Ces méthodes furent critiquées par Alberti dans son ouvrage **De Pictura**, *"Ceux qui feraient ainsi,..., je déclare qu'ils se trompent,..."*. Au paragraphe 20 du livre I,, il va donner une méthode pour construire les parallèles au tableau., mais auparavant, il est intéressant de remarquer qu'Alberti va fixer les conditions de représentation de l'espace et définir les conventions qui sont encore les nôtres. Au paragraphe 12, il écrit: *"La peinture sera donc une section de la pyramide visuelle selon une distance donnée, le centre étant placé et les lumières fixées; cette section est représentée avec art sur une surface donnée au moyen de lignes et de couleurs;"*. Cette définition permettra de justifier sa construction et toutes les règles à venir.

Voyons à présent quelles sont les règles fournies par Alberti. Il trace la ligne de terre et les perpendiculaires au tableau qui convergent en un point, le point de fuite principal, situé à une hauteur d'homme. Il place ensuite une droite (D), perpendiculaire à la ligne de terre et place un point à la même hauteur que le point de fuite dont la distance à cette perpendiculaire est égale à la distance de l'œil au tableau. De ce point, il trace les droites passant par les pieds des perpendiculaires au tableau et obtient ainsi, aux intersections avec la droite (D), les "hauteurs" des parallèles successives.(cf figure 3). Alberti n'apporte aucune "preuve" de sa construction, mais justifie celle-ci par le fait que, dans sa représentation, les diagonales sont alignées. *(" J'aurai la preuve* *que celles-ci ont été correctement tracées si une même ligne sert de diamètre aux rectangles juxtaposés").*

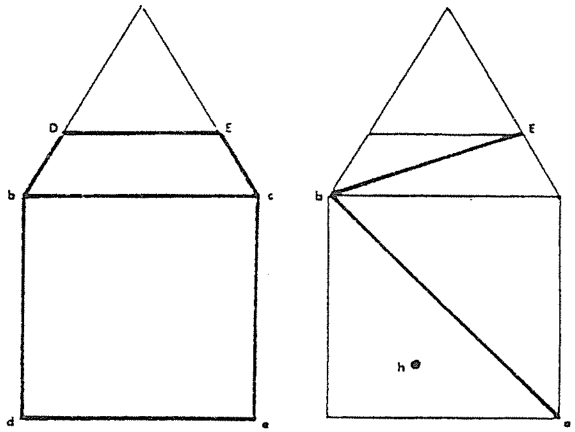
En 1470, dans son ouvrage *De Prospectiva Pingendi*, Piero della Francesca reprend la méthode d'Alberti et démontre le caractère légitime de celle-ci à la proposition XIII du livre I. La démonstration proposée repose sur une utilisation répétée du théorème de Thalès. Nous avons demandé aux élèves de redémontrer cette proposition[2]
L'ouvrage de Piero della Francesca contient un grand nombre de démonstrations concernant les propriétés de la perspective géométrique. Nous citerons seulement celles qui ont fait l'objet d'un travail avec nos élèves. Tout d'abord, Piero della Francesca étudie les rapports de réduction des lignes parallèles au tableau et montre que ceux-ci ne sont ni en progression géométrique ni arithmétique mais en progression que nous qualifions aujourd'hui d'harmonique. En fait il fournit deux exemples (deux suites de nombres pouvant être proportionnelles à des réductions successives) et précise qu'il ne peut fournir de méthode générale. La démonstration de cette propriété à été proposée aux élèves de 1° en devoir (annexe 1). La proposition XVIII du livre I permet d'effectuer la construction en perspective d'un point quelconque situé dans un carré à partir de la représentation de ce carré sans utiliser la distance à laquelle se trouve l'observateur (cf.figure 4)[3]

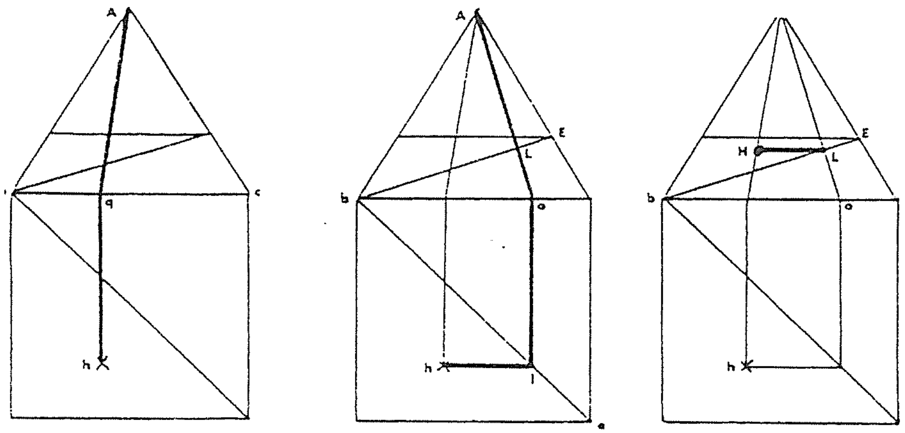
Sa construction repose sur l'utilisation de la diagonale du carré et de son image. De là, il sera possible de déduire l'apparence d'une figure plane quelconque, puis celle d'une figure en trois dimensions.Au début du XVIème siècle, un chanoine de Toul, Jean Pélerin dit Viator proposera une méthode reposant uniquement sur la notion de point de distance. La démonstration de son équivalence avec celle d'Alberti paraîtra en 1582 dans un traité de Vignola-Danti (annexe 2).

[2] Cette activité est présentée dans le numéro 7 de la revue Mnémosyne, IREM Paris 7.
[3] Voir l'annexe 1 (la juste proportion) et l'annexe 5 (4° question).

Figures tirées de Bessot D. et Le Goff J.P. Mais où est donc passée la troisième dimension?[4]

figure 4





Les étapes de la construction par la méthode de Piero della Francesca, de l'apparence d'un point donné dans un carré d'apparence connue.

Pour conclure, en ayant conscience du caractère très succint de ce propos, il nous a paru important de citer les travaux de Guidobaldo del Monte et notamment la proposition 32 de son traité, **Perspectivae Libri Sex** (1600). *"Si l'oeil voit des lignes parallèles, qui, prolongées, rencontrent la section, les lignes apparentes dans la section se rencontreront en un point unique, aussi haut que l'oeil au-dessus d'un plan parallèle aux lignes parallèles."* Cette proposition est la première à démontrer la convergence des apparences de droites parallèles, elles-mêmes non parallèles au tableau. Elle nous a permis de mettre un point final au travail effectué avec les élèves en justifiant les constructions proposées antérieurement (annexe 3).

En complément des problèmes faits par les élèves de premières, nous vous proposons quelques activités menées en classes de cinquième et de seconde (annexes 4 et 5).

---

[4] Histoire de Problèmes Histoire de Mathématiques, IREM, Ellipses, 1993.

ANNEXE 1

PERSPECTIVE D'UN CARRELAGE AU SOL

On admet la propriété utilisée déjà par de nombreux peintres du Trecento (14ème siècle), que les perpendiculaires au tableau aient des apparences concourantes en un point dit "point de fuite principal". Ainsi, un sol carrelé, formé de dalles carrées dont un côté est parallèle, et l'autre perpendiculaire à la ligne de terre, est représenté de telle sorte que les apparences des perpendiculaires à la ligne de terre concourent en un point F de la ligne d'horizon. On se propose d'étudier comment espacer les parallèles à la ligne de terre, c'est à dire comment "raccourcir" les dimensions du carré sur la direction des apparences des perpendiculaires au tableau.

1. La règle des deux tiers: Au Trecento et jusque vers les années 1435, les peintres avaient l'habitude d'utiliser un coefficient de raccourcissement de $\frac{2}{3}$
Effectuez une telle construction d'un dallage à 16 carrés de côté 1. Tracez les diagonales du damier obtenu. Que remarquez-vous?

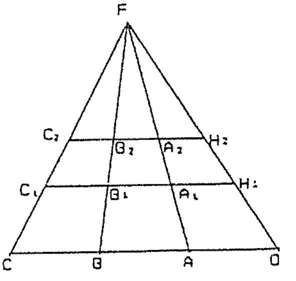
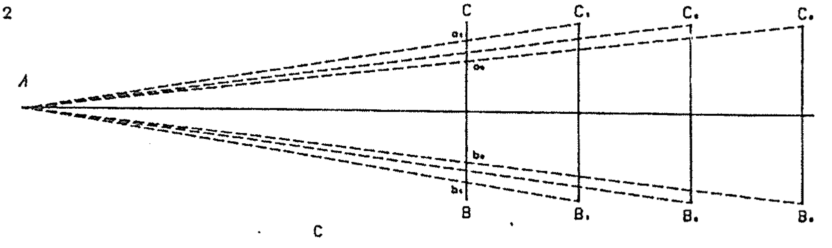


fig. 1 OH_1 est quelconque, $OH_1 < OA$,

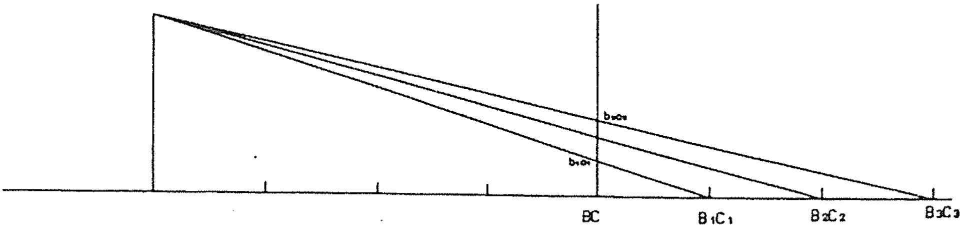
$H_1H_2 = \frac{2}{3} OH_1$; $H_2H_3 = \frac{2}{3} H_1H_2$

2. La juste Proportion : Piero della Francesca, dans son traité manuscrit datant d'environ 1470, *De prospectiva pingendi*, critique l'usage de cette proportion des $\frac{2}{3}$, et propose d'autres valeurs pour les coefficients de réduction. (cf. le texte ci-joint - traduction de J. P. Le Goff - et les figures 2 et 3 . Ces figures reproduisent celles qui accompagnent le texte. Ces vues de dessus et de profil sont les seules représentations qu'on trouve dans le manuscrit de Piero della Francesca)

plan Fig.2



profil Fig.3



Jusqu'ici j'ai parlé de proportion des lignes et des surfaces non dégradées (non mises en perspective), et j'ai dit comment les diagonales partagent les surfaces carrées en deux parties égales, et pourquoi toutes les divisions effectuées dans ces surfaces par des lignes parallèles sont en proportion. Maintenant, parce que je veux parler des lignes et des surfaces dégradées (mises en perspective), il est nécessaire de démontrer cette proportion, car quand je dis proportionnellement, il faut savoir de quelle proportion je parle car les proportions sont innombrables; et celle-ci n'est ni double[1] *comme l'est 2 -4 - 8, ni sesquialtère*[2] *comme 4 - 6 - 9, ni sesquitierce comme 9 - 12 - 16, ni triple ni quadruple*[3]*, mais je dis que c'est une proportion dégradée*[4]*, non pas encore comme 4 - 8 - 12 - 15, ni même comme 6 - 9 - 11 - 12* [5] *, mais qui s'établit selon la distance de l'oeil au support où l'on reporte les choses dégradées*[6] *et la distance de ce support à la chose vue.*

A savoir : soient quatre lignes parallèles, chacune est à une brasse de l'autre, et elles sont chacune longues d'une brasse; elles sont en outre entre deux lignes parallèles, et de la première ligne qui est le support, à l'oeil, il y a quatre brasses; je dis que de la seconde à la première, il y a un rapport sesquiquarte [7] *, que de la troisième à la seconde, dans le support, il y a un rapport sesquiquinte, que de la quatrième à la troisième, dans le support, il y a un rapport sesquisixte. Pour être mieux entendu, la proportion entre ces quatre lignes est celle qui est entre les quatre nombres suivants : 105 - 84 - 70 - 60; mais si nous modifions la distance de l'oeil au support, alors la proportion change, i-e : si tu recules de deux brasses, de sorte qu'il y en ait six de l'oeil au support, ces quatre lignes changeront de proportion, et seront tout comme ces quatre nombres: 84 - 72 - 63 -,56, en proportion différente des premiers nombres envisagés parce que, dans cette proportion, la distance à l'oeil du premier support n'est plus la même que la distance (de l'oeil) à la chose vue dans le second support. Donc en changeant le support, on change la proportion. Et toujours la proportion de la seconde ligne à la première est celle qui est entre (la distance) de l'oeil au support - qui est la première ligne -, et (la distance) de la seconde ligne à l'oeil, i-e: la proportion qu'il y a de la ligne qui part de l'oeil et aboutit à la seconde ligne; et du fait qu'on ne peut démontrer de façon manifeste, par des nombres, les modifications de ces proportions, je les démontrerai avec les lignes dans la dégradation (l'apparence ou l'image perspective) des surfaces.*

---

[1] Ce texte a été lu en classe et des éclaircissements ont été donnés au fur et à mesure, que je résume dans cette note et les suivantes ; 2-4-8 est une *proportion double* puisque $\frac{4}{2} = \frac{8}{4} = 2$

[2] 4-6-9 est une *proportion sesquialtère* puisque $\frac{6}{4} = \frac{9}{6} = 1 + \frac{1}{2}$

[3] 9-12-16 est une *proportion sesquitierce* puisque $\frac{12}{9} = \frac{16}{12} = 1 + \frac{1}{3}$ Une proportion *triple* ou *quadruple* correspond à un rapport commun égal à 3 ou à 4.

[4] *proportion dégradée*: les termes consécutifs n'ont pas de rapport constant

[5] *4-8-12-15 :* $\frac{8}{4} = 1 + 1$ $\frac{12}{8} = 1 + \frac{1}{2}$ $\frac{15}{12} = 1 + \frac{1}{4}$.

6-9-11-12 : 9 - 6 = 3, 11 - 9 = 2, 12 - 11 = 1

[6] i. e. mises en perspective

[7] *sesquiquarte* : le rapport de la première ligne à la seconde est égal à $1 + \frac{1}{4}$. *sesquiquinte* :le même type de rapport vaut $1 + \frac{1}{5}$. *sesquisixte* :le même type de rapport vaut $1 + \frac{1}{6}$.

Compléter la figure 4 ci-dessous, construite en perspective cavalière, dans laquelle le point A représente l'oeil du peintre ou de l'observateur, T , le plan du tableau, G le plan du sol (dit souvent géométral) sur lequel est inscrit un carrelage $BCB_1C_1B_2C_2$ ... représenté en $BCb_1c_1b_2\,c_2$ ... sur le tableau.

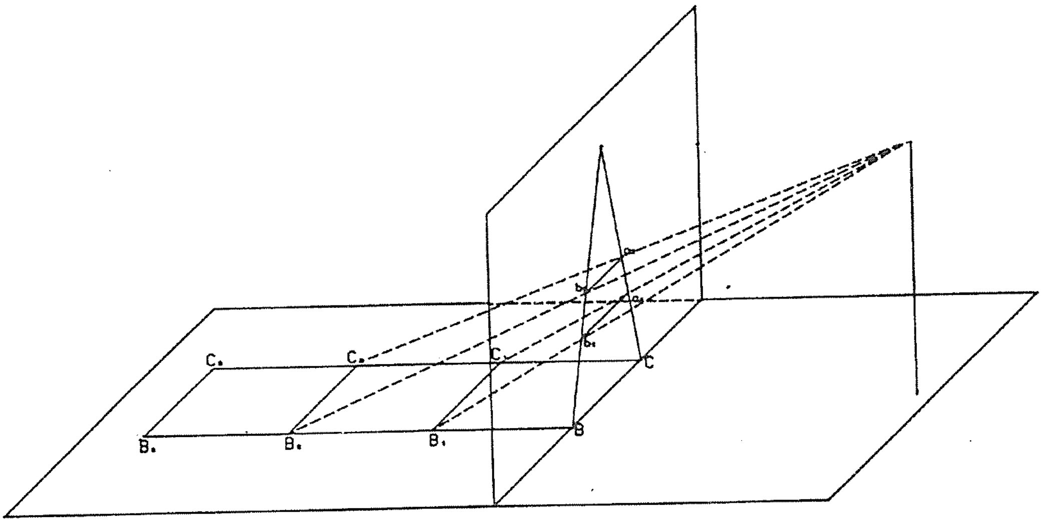


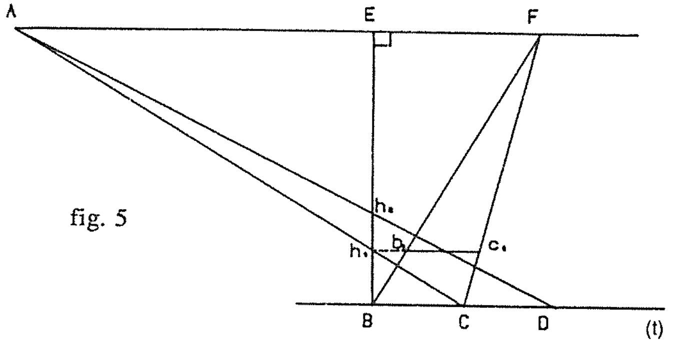
fig. 4

a) Sur la figure 4 placer les points b'_1 , c'_1 ,b'_2 , c'_2 intervenant dans la figure 2. Montrer que $b_1c_1 = b'_1c'_1$ et $b_2\,c_2 = b'_2\,c'_2$ etc.

b) Montrer, en utilisant la figure 2, que si la distance de l'oeil au tableau est de 4, on retrouve pour ces rapports les proportions proposées par Piero : $\frac{BC}{b1c1} = \frac{105}{84}$, $\frac{b1c1}{b2c2} = \frac{84}{70}$ etc . Calculer ces rapports pour une valeur d quelconque de la distance de l'oeil au tableau.

*3. **La construction légitime*** : Dans son traité *de Pictura* de 1435, Alberti avait déjà critiqué l'usage de la règle des deux tiers, et proposé une méthode de construction de l'apparence d'un dallage, qui a été expliquée en classe. Il la considère légitimée par le fait que les diagonales sont en lignes droites.

fig. 5



a) Soit F un point quelconque sur (AE) Soit d = AE , la distance de l'oeil au tableau. Montrer que par la construction d'Alberti, amorcée sur la figure 5, on retrouve la même valeur du rapport $\frac{BC}{b1c1}$ qu'avec la méthode de Piero.

(On peut calculer $\frac{FB}{Fb_1}$ *et* $\frac{EB}{Eh_1}$)

N.B. Piero della Francesca démontre d'ailleurs par ce type de remarque que la méthode d'Alberti donne la bonne construction d'un dallage. (cf. prop. XIII du Livre I du *De prospectiva pingendi*)

b) Montrer de même qu'en poursuivant la construction, on retrouve les mêmes valeurs des rapports $\frac{b1c1}{b2c2}, \frac{b2c2}{b3c3}$, ... que ceux obtenus ci-dessus.

c) Conjecturer la valeur de $\frac{b_nc_n}{b_{n+1}c_{n+1}}$, et la démontrer .

ANNEXE 2

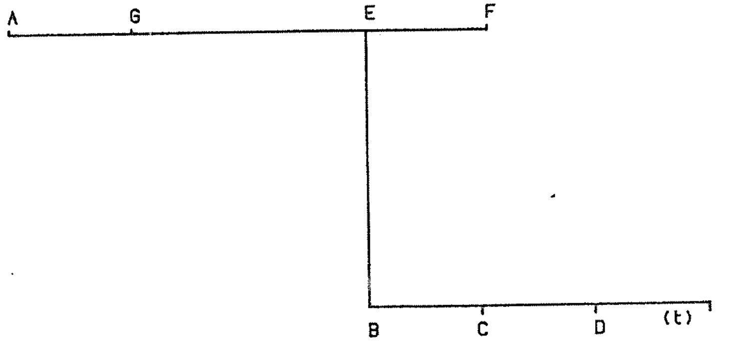
Equivalence des constructions d'Alberti et de Viator

ou équivalence de la construction "légitime"et de la méthode du tiers point

La démonstration en a été faite par Danti en 1582 et publiée dans un traité reprenant les travaux de l'architecte Vignole.

Soit A, B, C trois points équidistants sur la ligne de terre (t), amorçant le dessin d'un carrelage, F un point de la ligne d'horizon (d), parallèle à (t). Effectuer les deux constructions suivantes avec des couleurs différentes.

fig. 6



1. Construction d'Alberti : Soit E le projeté orthogonal de C sur la ligne d'horizon (d), H un point de (d), non situé sur [EF) . (N.B. la distance EH représente la distance de l'oeil au tableau). Soit I_1 l'intersection de (HB) et (EA), et I_2 l'intersection de (EA) et (HC). I_1 donne la position de la première transversale du carrelage, parallèle à la ligne de terre, I_2 celle de la deuxième.

2. Construction de Viator : (D'après le *De artificiali perspectiva* , publié à Toul en 1505 par Jean Pélerin - dit Viator -) Soit G le point de [FH) tel que FG = EH. Soit C_1 l'intersection de (FC) et de (GB), C_2 l'intersection de (FC) et de (GA), B_1 l'intersection de (FB) et de (GA). La première transversale du carrelage obtenue par cette méthode est (B_1C_1)

Que remarquez-vous quant aux deux constructions ?

Démonstration de la coïncidence des deux constructions

1) Démontrez que (B_1C_1) est parallèle à (t).

2) Démontrez que (I_1C_1) est parallèle à (t). Que peut-on dire des points B_1 , C_1 et I_1 ?

3) Poursuivre ce processus en construisant B_2 et démontrer de même que B_2 , C_2 et I_2 sont alignés. Expliquez l'étape suivante.

4) Que remarque-t-on quant aux diagonales de la représentation du carrelage ?

ANNEXE 3

Lecture de la Proposition XXXII du premier livre de perspective de Guidobaldo del Monte

1. Enoncer en termes modernes le théorème de la proposition XXXII. Faire une figure reprenant la figure qui accompagne le texte, avec le mode de représentation habituel (perspective cavalière).
2. Rédiger une démonstration moderne de ce théorème.
3. Transposer en termes modernes l'énoncé du corollaire 1.
4. X désigne le point de concours des apparences des perpendiculaires au tableau. On choisit une direction de diagonales d'un carrelage dont les mailles carrées sont formées de parallèles et de perpendiculaires aa plan du tableau; où se trouve le point de concours Y des apparences de ces diagonales ? Préciser la distance XY. Où concourent les apparences de l'autre direction de diagonales?

figure 7

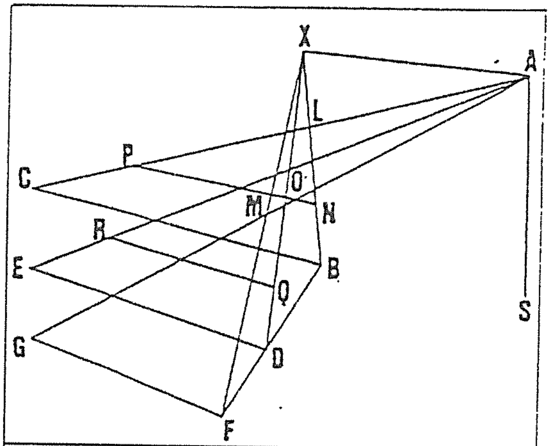


Fig 4. Perspective de droites parallèles . Les images se coupent au point de concours X.
Nota. C'est deux figures sont extraites de Perspective Libri Sex.

Guidobaldo del Monte *Perspectivae Libri Sex*, Livre I , proposition XXXII
(traduction de C. Guipaud)

Si l'oeil voit des lignes parallèles qui, prolongées, rencontrent la section, les lignes apparentes dans la section se rencontreront en un point unique , aussi haut que l'oeil au dessus d'un plan parallèle aux lignes parallèles.

Soit A l'oeil, et soit SA sa hauteur sur un plan parallèle aux lignes BC, DE, FG, parallèles entre elles; ces lignes sont certainement dans un même plan et rencontrent la section BXF aux points B, D, F. Je dis que les lignes apparentes dans la section se coupent en un point unique , aussi haut que l'oeil au-dessus du plan auquel appartiennent les lignes parallèles.

On mène du point A la ligne AX, parallèle aux lignes BC, DE, FG et soit X le point dans la section; on joint BX, DX, FX et AC, AE, AG. Puisque AX et BC sont parallèles, les lignes XB et AC qui les relient apprtiennent au même plan auquel appartiennent AX et BC; pour cette raison, le rayon visuel CA coupe la ligne BX; il la coupe en L. De la même façon, on montrera que AE coupe DX en O et que GA coupe FX en M. Mais alors, puisque les points B, X appartiennent à la section , la ligne BX appartiendra à la section; d'où BC apparaîtra en BL dans la section; et pour la même raison, DE apparaîtra en DO et GF en FM; et puisque BL, DO, FM font partie de BX, DX, FX, les lignes BL, DO, FM appartiendront à des lignes qui concourent en un point unique.

Puisque d'autre part, AX est parallèle aux lignes BC, DE, FG, AX sera parallèle aussi au plan qui contient les parallèles; pour cette raison, le point X est aussi haut que l'oeil au dessus *du plan auquel appartiennent les parallèles; pour cette raison, le point X est aussi haut que l'oeil A au dessus du plan auquel appartiennent les parallèles; alors les lignes BL, DO, FM se coupent en un point unique, aussi haut que l'oeil au dessus du plan auquel appartiennent les parallèles. C'est ce qu'il fallait démontrer.*

Si on avait eu des lignes parallèles NP, QR, FG n'appartenant pas toutes au même plan, on aurait également montré que les lignes apparentes dans la même section concourent au même point X.

En effet les lignes apparentes sont NL, QO, FM, lesquelles concourent en X. La même chose se vérifiera dans les tous autres cas.

Mais puisque, par la suite, il faudra nommer souvent le point en lequel concourent les lignes dans la section, un tel point, comme par exemple X, sera appellé **point de concours** *et par cela, on devra entendre le point de concours des lignes BC, DE, FG, et des autres lignes parallèles à celle-ci. En effet, bien que les lignes BL, DO, FM se coupent en X, les lignes BC, DE, FG sont cependant parallèles, elles qui dans la section semblent pour l'oeil se couper en X.*

On doit dire aussi pour cela pour une seule ligne, de telle façon que si on considère par exemple seulement la ligne BC, le point X sera absolument le point de concours de la ligne BC, puisque BC apparaît dans la section comme s'il tendait vers le point X . Si on avait mené d'autres lignes parallèles à BC, le même point X serait aussi, de la même façon, le point de concours de toutes les lignes.

Corollaire 1: *Il résulte de cela que le point de la section par lequel passe la ligne conduite par l'oeil et équidistante aux lignes parallèles est un point de concours.*

EXERCICE 5

Construction d'un cube en perspective : Méthode de Piero della Francesca

Sur la figure ci-jointe, le carré $\alpha,\beta,\gamma,\delta$. est la vue de "dessus" d'un cube de 7cm de côté qu'il s'agit de représenter en perspective.

1°) Représenter par la "méthode de Piero" (cf exercice 4) l'image a,b,c d du carré $\alpha,\beta,\gamma,\delta$.

2°) Pour figurer le cube en "volume", on utilise la méthode suivante:

Principe: Les segments comme [HK], situés à la verticale de la ligne de terre(D) sont "vus" en grandeur réelle donc [HK] a une longueur de 7cm égale au côté du cube.

Les verticales (parallèles à [HK] tracées entre les 2 droites OH et OK donnent les "réductions des verticales en fonction de leur éloignement "en profondeur".

Construction d'un point:
A partir du point a obtenu au 1°), tracer:

-la projection a_1 de a sur FH parallèlement à (D)

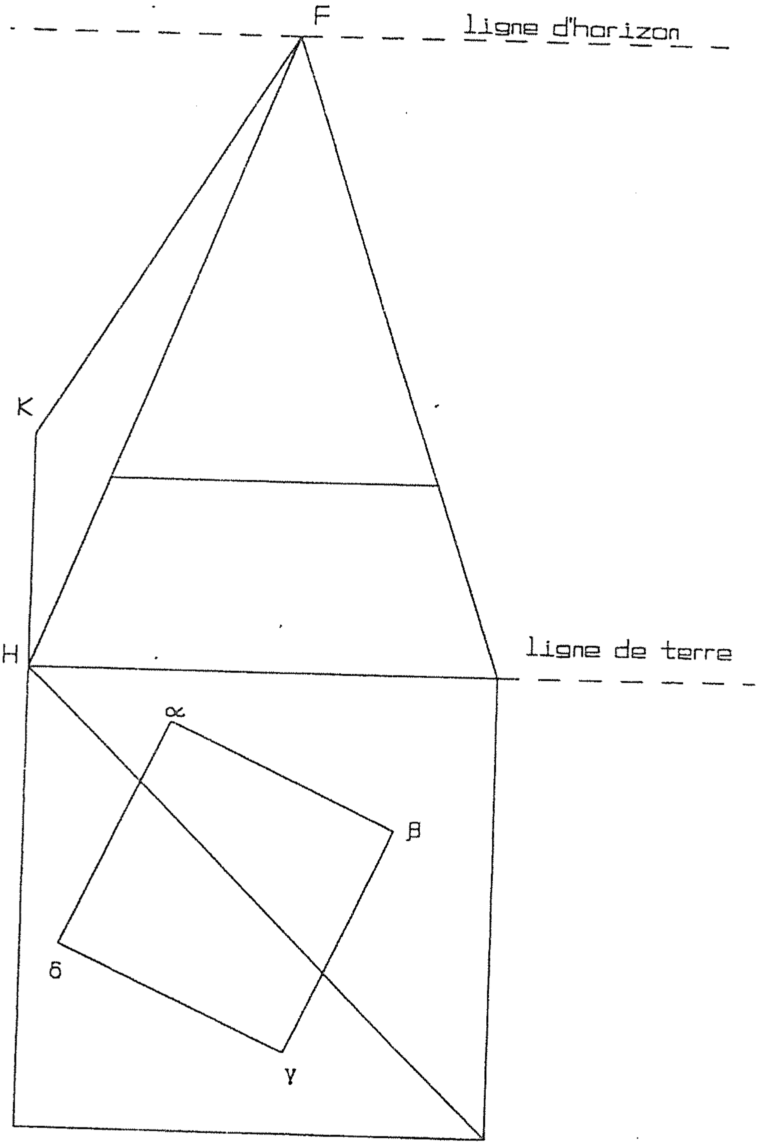
-la projection a_2 de a_1 sur FK parallèlement à HK

-le point A est l'intersection de la parallèle à HK passant par a et de la parallèle à (D) passant par a_2.

3°) Représenter avec la même méthode les points B,C et D.

4°) Terminer la représentation du cube, en dessinant en "traits pleins" les arêtes visibles et en "pointillés" les arêtes cachées.

5°) Vérifier sur le dessin que toutes les droites parallèles entre elles (et non verticales) de la représentation, se coupent en un même point situé sur la ligne d'horizon.



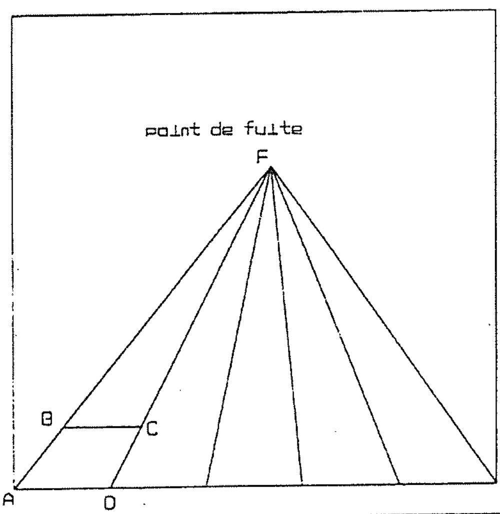
Vérification: Soit G le point d'intersection de AC avec la ligne d'horizon.

Placer l'œil à la verticale de F et à la distance FG pour vérifier que la figure représentée a bien l'apparence d'un cube en trois dimensions.

EXERCICE N°3

Méthode de Piero della Francesca

Compléter le "dallage" en vous servant de l'apparence ABCD d'un carré de base et de l'alignement de diagonales.

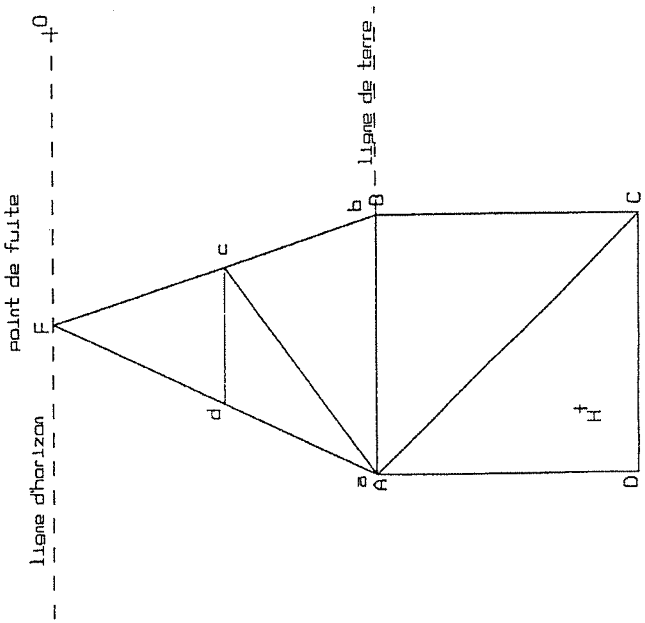


EXERCICE N°4

Etant donné un carré ABCD et son image perspective abcd, construire l'image perspective h du point H.

Méthode: a) Projeter le point H sur (AB) parallèlement à (AD), puis sur (AC) parallèlement à (CD).

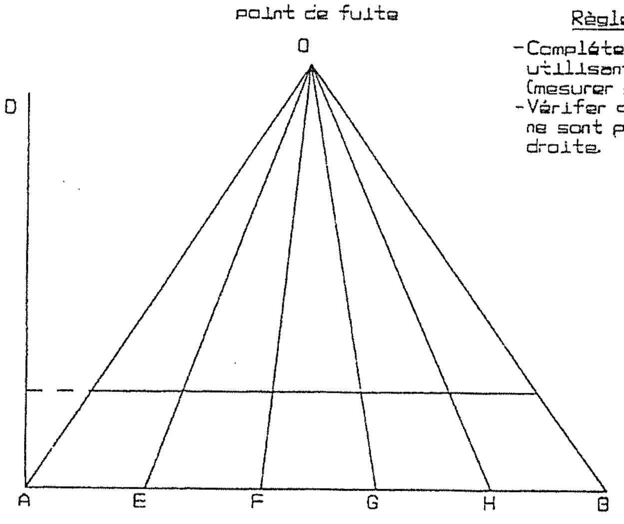
b) Déterminer les images perspectives de ces projetés et en déduire le point h.



ANNEXE 4

CONSTRUCTIONS DE CARRELAGES EN CLASSE DE SECONDE

EXERCICE N°1



Règle des 2/3

- Compléter le "dallage" en utilisant la règle des 2/3 (mesurer sur le côté AD).
- Vérifer que les diagonales ne sont pas sur une même droite.

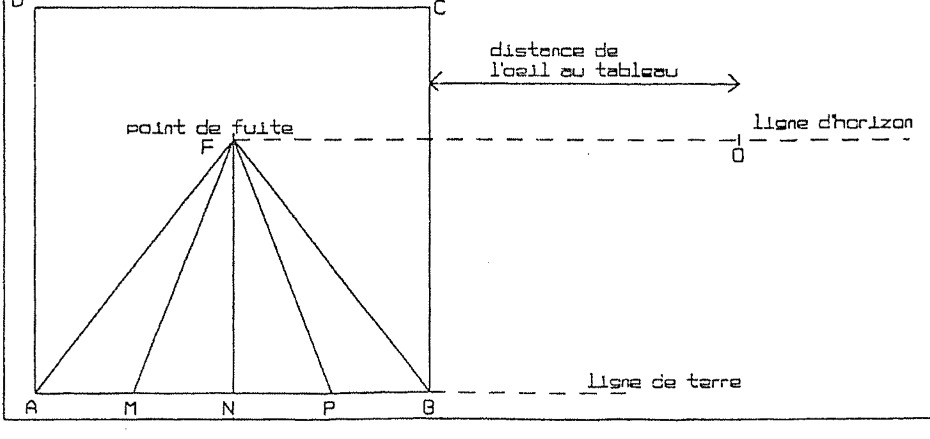
EXERCICE N°2

Règle d'Alberti

Compléter le "dallage" à l'aide de la méthode suivante:

1°) Joindre les points A.M.N.P.B au point O et marquer les points d'intersection des droites obtenues avec la droite (BC).

2°) Tracer les parallèles à la ligne de terre passant par les points obtenus au 1°)



ANNEXE 5

ACTIVITÉS EN 5E

Un objectif important des activités mathématiques en 5e fut de faire naître l'émerveillement par l'obtention d'un même dessin par trois voies radicalement différentes : un tracé empirique, un tracé géométrique selon des règles strictes, une utilisation des proportions numériques. Ce résultat surprenant fut mis en scène lors de l'exposition des travaux réalisés dans les disciplines artistique, historique et mathématique : par les trois méthodes, on obtient un dessin de l'"apparence perspective" d'un carré quadrillé légitimée par la règle énoncée par Alberti : alignement des diagonales du quadrillage.

1- Réalisation d'un quadrillage aux deux-tiers pouvant être considéré comme l'apparence perspective d'un carré, à l'aide des questions suivantes:

a) Ecris sous forme d'une seule fraction $1+\frac{2}{3}$, $1+\frac{2}{3}+\frac{4}{9}$, $1+\frac{2}{3}+\frac{4}{9}+\frac{8}{27}$

b) Calculez $\frac{5}{3} de 27 mm$; $\frac{19}{9} de 27 mm$; $\frac{65}{27} de 27 mm$

c) Dans un repère xoy orthogonal dont l'unité sur [ox) est de 2 cm et celle sur [oy) de 27 mm, trace les droites horizontales d'ordonnées respectives 1, $1+\frac{2}{3}$, $1+\frac{2}{3}+\frac{4}{9}$, $1+\frac{2}{3}+\frac{4}{9}+\frac{8}{27}$

d) Du point S de coordonnées 3 et 5 trace la verticale puis les obliques passant par les points de [ox) d'abscisses 0, 1, 2, 4, 5, 6.

e) On appelle O le point de coordonnées 0 et 6, A et B les points d'intersection de la droite horizontale d'ordonnée $1+\frac{2}{3}+\frac{4}{9}+\frac{8}{27}$ respectivement avec (SO) et (SC). Trace les diagonales obliques, penchées vers la droite, de chacun des petits trapèzes du trapèze OABC.

f) Si on considère OABC comme la mise en perspective d'un carré construit sur [OC], as-tu des remarques à faire sur cette perspective ?

Remarque: L'objectif est de montrer que les diagonales du quadrillage ne sont pas alignées.

2- Lecture du texte d'Alberti sur l'apparence perspective d'un quadrillage.

a) Les diagonales du quadrillage sont-elles alignées ?

b) Quel est le point dont Alberti parle ligne 18 ?

3 - Les figures du scénario de la construction de l'image perspective d'un point, tirées du traité de Piero furent données aux élèves qui eurent en charge d'en rédiger les explications. (Cf. fig. 4 du texte de présentation)

4 - Le calcul de la "bonne proportion" fut dégagé du texte de Piero (Cf. annexe 1) dont la lecture fut aidée des questions suivantes :

a) Explique les lignes 10 à 12.

b) Simplifie les fractions suivantes : $\frac{8}{4}$; $\frac{12}{8}$; $\frac{15}{12}$

c) Ecris sous la forme : $1+\frac{1}{p}$ avec p entier $\frac{105}{84}$; $\frac{84}{70}$; $\frac{70}{60}$; $\frac{84}{72}$; $\frac{72}{63}$; $\frac{63}{56}$

d) Réalise le dessin à l'aide des proportions.

Je parlerai donc, en omettant toute autre chose, de ce que je fais lorsque je peins. Je trace d'abord sur la surface à peindre un quadrilatère de la grandeur que je veux, fait d'angles droits, et qui est pour moi une fenêtre ouverte par laquelle on puisse regarder l'histoire[1], et là je détermine la taille que je veux donner aux hommes dans ma peinture. Je divise la hauteur de cet homme en trois parties et ces parties sont pour moi proportionnelles à cette mesure qu'on nomme vulgairement bras[2]. Car, comme on le voit par la symétrie[3] des membres de l'homme, la longueur la plus commune du corps d'un homme est de trois bras. À l'aide de cette mesure, je divise la ligne de base du rectangle que j'ai tracé en autant de parties qu'elle peut en contenir, et cette ligne de base du rectangle est pour moi proportionnelle à la quantité transversale[4] la plus proche sur le sol et qui lui est parallèle. Je pose ensuite un seul point, en un lieu où il soit visible à l'intérieur du rectangle. Comme ce point occupe pour moi le lieu même vers lequel se dirige le rayon central, je l'appelle point central. Ce point est convenablement situé s'il ne se trouve pas, par rapport à la ligne de base, plus haut que l'homme que l'on veut peindre. De cette façon, ceux qui regardent et les objets peints sembleront se trouver sur un sol plat. Le point central posé, je tire des lignes droites de ce point à chacune des divisions de la ligne de base, et ces lignes me montrent comment les quantités transversales successives changent d'aspect presque jusqu'à une distance infinie.

Pour ce faire, certains traceraient à travers le rectangle une ligne parallèle à la ligne de base et diviseraient en trois parties l'intervalle qui se trouve entre les deux lignes. Puis, à cette seconde ligne parallèle à la ligne de base, ils ajouteraient une autre ligne parallèle, placée de telle façon que l'intervalle divisé en trois parties qui sépare la ligne de base de la seconde ligne soit plus grand d'une partie que celui qui sépare la seconde ligne de cette troisième ; et ils ajouteraient ainsi d'autres lignes pour que l'intervalle qui suit un autre intervalle entre les lignes soit toujours, pour employer le terme des mathématiciens, *superbipartiens*[0]. Ceux qui feraient ainsi, même s'ils affirmaient suivre la meilleure voie en peinture, je déclare qu'ils se trompent beaucoup car, ayant posé au hasard la première ligne parallèle, quand bien même les autres lignes parallèles se suivraient selon un même rapport de diminution, le fait est qu'ils n'ont pas le moyen d'obtenir un lieu précis pour la pointe [de la pyramide] qui permet de bien voir. C'est ainsi que l'on fait facilement de lourdes erreurs en peinture. Ajoute à cela que leur façon de procéder serait mauvaise chaque fois qu'ils placeraient le point central plus haut ou plus bas que la hauteur d'un homme peint. D'ailleurs, aucune chose peinte ne peut paraître égale à une chose vraie, si ce n'est à une distance spécifique : c'est ce qu'aucune personne instruite ne niera. Nous en expliquerons la raison si jamais nous mettons par écrit ces démonstrations que nos amis, émerveillés de nous les voir faire, appelaient miracles de la peinture[1]. Et ce que je viens de dire se rapporte justement à cette partie là. Revenons donc à notre objet.

1. Il s'agit d'un des concepts majeurs du De Pictura. Ni le terme d'histoire, ni celui d'anecdote ou de sujet ne convient tout à fait. L'historia est l'objet même de la peinture qui résulte d'une invention (le sujet, qui peut faire l'objet d'une narration ou d'une description) et d'une composition achevée (agencement des formes, des parties, des corps). On ne peut cependant exclure cette acception simple : le programme « réaliste » d'Alberti exige que la peinture montre et raconte. Dans sa définition la plus formelle, l'historia est un agencement de parties (de corps, de personnages, de choses) doté de sens.

2. Bras : mesure florentine (0,58 mètre).

3. Voir note 1, p. 107.

4. C'est-à-dire proportionnelle à la ligne B de la figure 10 b qui, à ce stade de la construction, n'a pas encore été positionnée. La ligne de base sera proportionnelle à toutes les lignes transversales à venir.

0. *Chaque intervalle est fait de deux des trois parties du précédent.*

20. J'ai d'ailleurs trouvé celle excellente méthode : dans tous les cas je poursuis cette même division entre le point central et la ligne de base en tirant des droites de ce point jusqu'à chacune des divisions de la ligne de base. Mais pour la succession des quantités transversales, je procède de cette manière-ci. Je prends une petite surface[2] sur laquelle je trace une seule ligne droite. Je la divise en autant de parties que la ligne de base du rectangle est divisée. Je pose ensuite un point unique au-dessus de cette ligne, à la verticale d'une de ses extrémités, aussi élevé que l'est dans le rectangle le point central au-dessus de la ligne de base. De ce point, je trace des droites jusqu'à chacune des divisions de la ligne. Je fixe alors la distance que je désire avoir entre l'œil de celui qui regarde et la peinture, puis, ayant ainsi fixé l'emplacement de la section, au moyen de ce que les mathématiciens appellent une ligne perpendiculaire, je produis l'intersection de toutes les lignes qu'elle rencontre. Une ligne perpendiculaire est celle qui, divisant une autre ligne droite, possède partout autour d'elle des angles droits. Ainsi cette ligne perpendiculaire me donnera par ses points d'intersection les limites de chaque écartement qui doit se trouver entre les lignes transversales parallèles du dallage. Je peux de cette façon tracer toutes les rangées transversales de carreaux du dallage. On appelle parallèle l'intervalle séparant deux des lignes parallèles dont nous avons parlé plus haut. J'aurai la preuve que celles-ci ont été correctement tracées si une même ligne droite prolongée sur le dallage peint sert de diamètre[1] aux rectangles juxtaposés. Pour les mathématiciens, le diamètre d'un rectangle est la ligne droite, tirée d'angle à angle opposé, qui divise le rectangle en deux parties de façon à faire deux triangles.

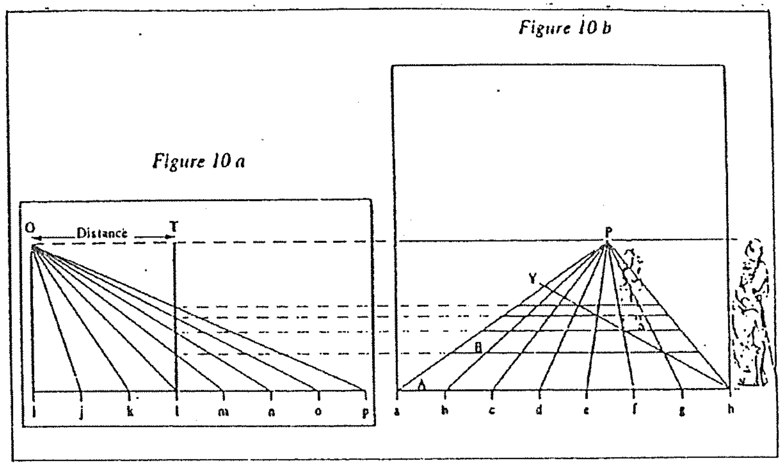
Fig 10 a. i à p

Fig. 10 a. 4

Fig 10 a. ligne T

Fig. 10 b. 1

Après avoir achevé tout cela avec soin, je trace encore une ligne transversale parallèle aux autres lignes inférieures, qui coupe les deux côtés du grand rectangle et passe



par le point de centre. Cette ligne me sert de limite et de borne : aucune quantité ne doit la dépasser, sauf celles qui sont plus hautes que l'œil de celui qui regarde. Et cette ligne, parce qu'elle passe par le point central, est nommée ligne centrale. De la sorte, les hommes peints qui se tiendront sur la dernière rangée de carreaux seront beaucoup plus petits que ceux qui se tiendront sur les plus proches. Il en est évidemment ainsi, la nature elle-même le montre. En effet, quand des hommes déambulent dans les églises, nous voyons leur tête se mouvoir à peu près à la même hauteur, alors que les pieds de ceux qui sont les plus éloignés arrivent à peu près à hauteur des genoux de ceux qui sont devant.

Fig 10 b. P

1. Il s'agit d'une diagonale

2. C'est-à-dire une feuille séparée qui sera ensuite juxtaposée au rectangle préparatoire où ont été tracées les lignes orthogonales (fig. 10 a).

Bibliographie

Alberti L. B. *De la Peinture*, 1435, trad. J.L. Schefer, ed. Macula Dédale, Paris 1992

Bessot D., Le Goff J. P. *Mais où est donc passée la troisième dimension ?* in *Histoires de problèmes, histoire des mathématiques*, par la Commission Inter- IREM Epistémologie et Histoire des mathématiques, éditions ELLIPSES, Paris , 1993.

Bessot D., Hellegouarc'h Y., Le Goff J. P. (sous la direction de) *Destin de l'Art, Desseins de la Science* , Actes du colloque A.D.E.R.H.E.M.oct. 86, Université de Caen, 1991

Brin P. Grégoire M. *La perspective à la Renaissance: Comment représenter un carrelage ?* , Mnémosyne N° 7, avril 94 , IREM Paris-7, Université Denis Diderot , 2 place Jussieu 75005 Paris

Comar P. *La perspective en jeu* , Découvertes Gallimard n° 138.

Flocon A., Taton R. *La perspective* , P.U.F., coll. Que sais-je? n° 1050.

Gilbert T. *La perspective en questions,* Ciaco Ed., Louvain-la-Neuve, 1987

IREM de Basse-Normandie, *Les cahiers de la perspective*, Université de Caen, (6 numéros parus)

Panofsky E. *La perspective comme forme symbolique* , Minuit, Paris, 1975

Thuillier P. *Espace et perspective au Quatrocento*, in *La Recherche* n° 160, nov 1984