DES PROBLEMES D'EXTREMA CHEZ FERMAT A LA NOTION DE DERIVEE

Mireille CLAPIE et Maryvonne SPIESSER

Les textes de Fermat sur les problèmes d'extrema que nous avons présenté dans notre atelier ont été proposés à des élèves de 1ére A1 en introduction à la notion de nombre dérivé. En fait nous aurions tout aussi bien pu les leur proposer après la présentation du concept de dérivée. Notre objectif premier était de confronter les élèves à des documents historiques, de façon à susciter des réactions de leur part et à ouvrir une réflexion sur les mathématiques : leur évolution, leur forme, leur statut,...L'effectif de la classe était assez faible et les élèves pour la plupart très curieux et particulièrement bien disposés envers ce type d'activité.

Des points importants se sont dégagés :

-difficulté de lecture d'un texte ancien.
-regard porté sur un grand mathématicien de notre région et réaction vive de certains après la lecture du premier texte : Fermat nous assène ses résultats avec une certitude choquante car il ne démontre rien. On fait un peu le rapprochement avec la réaction agressive de Descartes.
- prise de conscience du fait que les mathématiques ont évolué au cours des siècles.

Nous reproduisons ci-dessous le déroulement de l'activité, entrecoupé des réflexions d'un élève recueillies à la fin de l'année scolaire (d'autres incursions dans l'histoire ont illustré certains cours). Le texte de ces activités ainsi que les documents de Fermat sur lesquels elles s'appuient sont renvoyés à la fin de l'exposé.

L'enseignement des mathématiques, à mon avis, donne souvent l'impression que l'on sait ou que l'on ne sait pas. Il n'y a pas de place pour le doute. Il faut comprendre instantanément.

Pour un élève, savoir qu'un homme comme Pythagore ou un Egyptien ont pu éprouver les mêmes difficultés que lui et ont eu parfois les dépasser est assez motivant.
Cela rassure en montrant que ce qui paraît nous douteux, nous, élèves, certains grands mathématiciens ont également eu des difficultés à l'admettre.

1) Méthode *de minimis et maximis.*

Le premier texte étudié date de la fin de l'année 1637 (Voir le document 1). C'est la première exposition que Fermat fit de sa méthode du minimum et du maximum. Contrairement à la réflexion que vient de nous livrer l'élève, Fermat rejette toute forme de doute. Par contre il entraîne celui des élèves, tout comme il a provoqué une réplique cinglante de Descartes.

Ce premier document a beaucoup dérouté les élèves. Le langage est hermétique, le texte est très éloigné de leurs "normes" habituelles de lecture. ("il complique tout", "il ne démontre rien, il met tout à sa sauce", ...)

En effet, le style didactique, péremptoire, d'un Fermat qui nous affirme que le résultat se trouvera être ..., apparent fruit d'un hazard, d'un mystère dont il ne nous donne pas la clé, a pu donner lieu à certaines réactions violentes en classe. Parfois aussi, ces affrontements ont eu lieu entre élèves à propos de notions mathématiques.

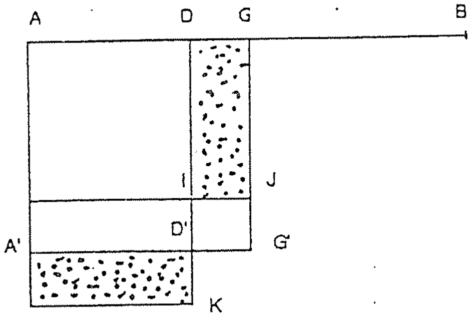
Avant la lecture du texte de Fermat, des problèmes d'extrema ont été posés aux élèves sous forme d'exercices cherchés par petits groupes. Ce sont les questions I et II de l'activité reproduite à la fin de l'article.
Le premier exercice (I) correspond à l'exemple donné par Fermat pour illustrer sa méthode. C'est une question bien connue depuis l'antiquité grecque, que nous trouvons ainsi énoncée et démontrée géométriquement dans la *Collection mathématique* de Pappus d'Alexandrie (IVème siècle après J.C.). Pappus reprend lui-même des questions posées par Apollonius (IIéme siècle av. J.C.) dans un ouvrage perdu.

PROPOSITION 13- *Si l'on a une droite AB, et si on la coupe en deux parties égales au point G, ce point G est celui qui, parmi tous les points qu'on prendra, découpe le plus grand rectangle compris sous les droites AG, GB.*

En effet, si l'on prend le point D, il se fait que le rectangle compris sous les droites AD, DB, conjointement avec le carré de la droite GD, équivaut au carré de la droite AG, c'est à dire au rectangle compris sous les droites AG, GB ; de sorte que le rectangle compris sous les droites AG, GB est plus grand que le rectangle [compris sous les droites AD,DB]. Et de même pour les autres points.

Pappus d'Alexandrie, Livre VII, XIII

En d'autres termes...



aire AG ' = aire AD' + aire DJ + aire IG' (1)
= aire AD' + aire A'K + aire IG'
= aire AK + aire IG'
Soit $AG^2 = AD \times DB + DG^2$
D'où $AD \times DB \leq AG^2$
et $AD \times DB$ est maximum lorsque $DG = 0$, soit lorsque D est en G milieu de [AB].

DK = DB; AD = DI; AG = AA'

C'est un problème du second degré et les élèves possèdent les outils nécessaires pour le résoudre. En posant AE = x, on est en effet amené à rechercher le maximum de - x(b-x). Ce n'est pas le cas pour l'exercice II qui est du troisième degré et qu'on leur suggère de résoudre par tâtonnement. La méthode de Fermat qui est opérante dans le premier cas semble également faire ses preuves dans le second cas. (voir III, questions 1 à 4).

2) Sur la même méthode.

Le second texte distribué date de 1638. Fermat y applique sa méthode à l'exercice cherché précédemment par tâtonnement. Les résultats coïncident, on la trouve efficace, et même si son exposition choque certains, elle "remonte dans l'estime". (voir document 2 et activité, III, 5)

Il m'a paru intéressant de voir qu'avec d'autres méthodes que les nôtres, par un autre vocabulaire, Fermat exprimait les mêmes choses. Cela permet, à mon avis, de mettre à distance la forme des mathématiques : souvent, nous avons l'impression que l'on maîtrise mieux des connaissances. Pourquoi telle méthode et pas telle autre ? La forme mathématique elle aussi paraît souvent intransigeante.

La présence du texte, le fait de lire un auteur qui dit « moi, Fermat, j'affirme que... » introduit une distance vis à vis du Professeur, comme dans d'autres matières, il efface l'impression d'une subjectivité de la part de l'enseignant qui entraîne souvent la méfiance de l'élève.

3) Nombre dérivé

La suite de l'activité (IV et V) est une mathématisation du problème permettant au professeur d'introduire la notion de nombre dérivé et de relier cette notion aux calculs de Fermat.

4) Une nouvelle exposition de la méthode

Le paragraphe VI introduit un troisième texte écrit autour de 1640. L'exemple que Fermat propose est celui du document 1 mais il ne le traite pas dans le même esprit et on remarquera que la notion d'adégalité a disparu. Il se base ici sur le fait que de part et d'autre de l'extremum l'équation du second degré a deux solutions a et e dont la différence "s'évanouit tout à fait pour la division correspondant au produit maximum". On note donc une évolution par rapport aux deux textes précédents. Le différend avec Descartes, que l'exposition de 1637 souleva, incita probablement Fermat à analyser plus profondément sa méthode. Les élèves ont été sensibles à cette protestation de Descartes qui correspond un peu à leur propre attitude.

5) La querelle entre Descartes et Fermat : morceaux choisis

Descartes à Mydorge, Mars 1638

Oeuvres de Fermat, compl. tome IV, p. 26

La règle de Monsieur Fermat pour trouver maximam et minimam est imparfaite, et je le pourrais montrer par une infinité d'autres exemples, mais la chose n'en vaut pas la peine.

Descartes à Mersenne, Janvier 1638
Oeuvres de Fermat, II p. 129

Si cet auteur s'est étonné de ce que je n'ai point mis de telles règles en ma Géométrie, j'ai beaucoup plus de raison de m'étonner de ce qu'il a voulu entrer en lice avec de si mauvaises armes. Mais je lui veux bien donner le temps de remonter à cheval.

Fermat à Mersenne, Février 1638
Oeuvres de Fermat, II p. 132

J'ai appris [...] qu'il [Descartes] avait trouvé à dire à mes méthodes de maximis et minimis et de tangentibus [...]. Peut-être que les ayant proposées nûment et sans démonstration, elles n'ont pas été entendues, ou qu'elles ont paru trop aisées à Monsieur Descartes, qui a fait tant de chemin et a pris une voie si pénible pour ces tangentes dans sa Géométrie.

Roberval à Mersenne, Avril 1638
Oeuvres de Fermat, tome IV p. 30

Monsieur Descartes ne peut éviter l'un des deux, savoir, ou qu'il ignore la Méthode, [...] ou bien qu'il ne procède pas de bonne foi, si n'ignorant pas l'excellence de la Méthode, il raisonne mal exprès pour avoir occasion de blâmer l'auteur.

Fermat à Mersenne, Avril 1638
Oeuvres de Fermat, tome II p. 136

Quand vous voudrez que ma petite guerre contre Monsieur Descartes cesse, je n'en serai pas marri, et si vous me procurez l'honneur de sa connaissance, je ne vous en serai pas peu obligé.

Descartes à Mersenne, Mai 1638
Oeuvres de Fermat, tome II p. 144

Il fait paraître qu'il n'a trouvé sa règle qu'à tâtons, ou du moins qu'il n'en a pas conçu clairement les principes.

Descartes à Mersenne, Juin 1638
Oeuvres de Fermat, tome IV p. 58.

Pour Monsieur Fermat, son procédé me confirme entièrement en l'opinion que j'ai eue dès le commencement que lui et ceux de Paris avaient conspiré ensemble, pour tâcher de décréditer mes Ecrits le plus qu'ils pourraient.

Descartes à Fermat, Juillet 1638
Oeuvres de Fermat, tome II p. 163

Je n'ai pas eu moins de joie de recevoir la lettre par laquelle vous me faites la faveur de me promettre votre amitié, que si elle me venait de la part d'une maîtresse dont j'aurais passionnément désiré les bonnes grâces [...]

Et voyant la dernière façon dont vous usez pour trouver les tangentes des lignes courbes, je n'ai autre chose à y répondre, sinon qu'elle est très bonne et que, si vous l'eussiez expliquée au commencement en cette façon, je n'y eusse point du tout contredit.

Descartes à Mersenne, Août 1638
Oeuvres de Fermat, tome IV p. 62

Je dirai seulement qu'il lui eût été, ce me semble, plus avantageux de ne point du tout parler de cette tangente, à cause que le grand bruit qu'il en fait donne sujet à un chacun de penser qu'il a eu beaucoup de peine à la trouver...

Deux mois après cette première incursion dans l'œuvre de Fermat, nous y sommes revenus à propos de la notion de tangente en étudiant la suite du premier document de 1637 qui concerne la recherche de la tangente en un point d'une parabole. Cette invention des tangentes est en effet le premier des "plus beaux usages" que le mathématicien toulousain fait de sa méthode du minimum et du maximum. Nous joignons le texte de Fermat et l'activité proposée sur ce sujet en fin d'article. Une étude détaillée a été publiée à l'I.R.E.M. de Toulouse dans une brochure intitulée *Des problèmes d'extrema chez Fermat à la notion de dérivée* (M. Clapié, M. Spiesser), à laquelle nous renvoyons pour une analyse plus fine et notamment une critique des activités telles qu'elles ont été rédigées. Avant de conclure avec des remarques plus générales de notre élève, nous ajouterons seulement que cette présentation n'est certes pas destinée à une meilleure compréhension de la notion mathématique appréhendée (contrairement à d'autres activités intégrant l'histoire que nous avons pu mener parallèlement). Par contre elle a provoqué un questionnement des élèves sur les mathématiques et sur leur évolution. Elle a ébranlé l'idée d'une science simmuable et figée.

L'étude, durant l'année de première, de textes portant sur les Mathématiques, directement, comme ceux de Fermat traitant la recherche du Maximum et du Minimum, ou plus indirectement, comme un extrait d'un dialogue socratique de Platon mettant en scène Socrate et un jeune esclave, de même que des introductions historiques sur certains aspects mathématiques, m'ont paru profitables pour plusieurs raisons.
Elles m'ont amené à une prise de conscience d'une autre dimension des Mathématiques qui peuvent rejoindre sur certains points et certaines problématiques d'autres disciplines, mais aussi à une mise à distance du savoir mathématique en tant qu'objet fixe, fermé à toute discussion, car inchangeable et par là même m'ont permis une démystification de l'erreur.
Tout d'abord, l'étude de tels textes m'a permis de mieux savoir que pour les Mathématiques aussi il y a eu tout un cheminement de la pensée. Souvent, l'enseignement des Mathématiques donne l'impression à l'élève que le professeur sort des règles, des calculs de son chapeau, tel un magicien, qu'il les invente devant nous.
Beaucoup sont alors découragés, pensant que de toute manière ils n'arriveront jamais à comprendre le pourquoi de ces règles incompréhensibles dont l'explication paraît une évidence aux yeux du professeur.

Si il faut bien avouer que l'étude de plusieurs textes de Fermat ne m'a presque rien apporté sur le plan de la connaissance mathématique elle-même, elle m'a tout de même permis de voir d'où viennent les connaissances que l'on nous administre. En effet, l'ignorance de la source, et l'ignorance de la finalité sont deux éléments majeurs du malaise que ressentent beaucoup d'élèves vis à vis des mathématiques. Le travail effectué revenant alors à une certaine aliénation.

1°A1 FERMAT Recherche de maximum et minimum

Tous les documents reproduits sont issus des oeuvres de Pierre de Fermat publiées par Paul Tannery et Charles Henry - Gauthier - Villars, PARIS 1891.

I - *Problème* : Soit [AC] un segment de longueur b ; on veut déterminer un point E de [AC] pour lequel le produit AE x EC est maximum ?

* Repérer les données, les inconnues.
* Mettre le problème en relation avec le cours.
* Traduire.
* Conclure.

II - *Problème* : Soit [AC] un segment de longueur b ; on veut déterminer un point B de [AC] pour lequel le produit AB^2 x BC est maximum.

* Avec les mêmes moyens que dans le problème précédent, peut-on déterminer B ?

* En utilisant des valeurs numériques essayer de localiser B.

III - *Documents 1 et 2*

1° - Lire le texte de Fermat : "méthode pour la recherche du maximum et du minimum".

2° - Relever les expressions ou les mots qui vous sont étrangers. Essayer de leur donner un sens.

3° - Reprendre toutes les phases du calcul et les mettre en relation avec les étapes de la "méthode".

4° - Utiliser la méthode de Fermat pour déterminer le point B du problème II. Trouvez-vous ce que vous aviez prévu ?

5° - Lire le document 2 : "Sur la même méthode". Etes-vous convaincu ? (par la méthode).

IV - *Reprenons le problème I*

Soit E' un point tel que AE' = a + e et f la fonction telle que f (a) = AE x EC.
f (a+e) = AE' x E'C.

A) 1° - Ecrire f (a+e) - f (a) suivant les puissances décroissantes de e.

2° - Quel est le signe de cette différence lorsque E est le point où le produit est maximum ?

B) 1° - Exprimer $\frac{f(a+e)-f(a)}{e}$. A quel moment de sa méthode Fermat utilise-t-il cette expression dans le document 1 ?

2° - Quelle est la limite de $\frac{f(a+e)-f(a)}{e}$.quand e tend vers 0 ?

V - *Reprenons le problème II avec* :

AE' = a + e et la fonction g telle que g (a) = AB^2XBC et g (a+e) = AE'^2XE'C.

1° - Calculer g (a+e) puis $\frac{g(a+e)-g(a)}{e}$

2° - Quelle est la limite de $\frac{g(a+e)-g(a)}{e}$ quand e tend vers 0 ?

3° - Pour quelle valeur de a exprimée en fonction de b cette limite est-elle nulle ? Conclure.

VI - 1° - Représenter la fonction f : a $\rightarrow$ $-a^2$ + ab, a $\in$ [0,b]

2° - Soit la droite y = z". Déterminer les points d'insertion de cette droite avec la courbe représentative de f. Appeler a et e les abscisses des points d'intersection de la droite avec la courbe représentative de f. Envisager plusieurs positions de cette droite y = z".

3° - Lire le document 3 en vous aidant du travail précédent. La quantité e est-elle la même que dans les documents 1 et 2 ?

4° - En quoi la démarche de Fermat est-elle différente ? Ce document apporte-t-il plus de crédibilité à la méthodes ? Pourquoi ?

5° - Relever dans ce texte toutes les expressions qui font appel à la notion de limite.

DOCUMENT I
Oeuvres de Fermat, tome III p.121-122
1637-38

MÉTHODE

POUR LA

RECHERCHE DU MAXIMUM ET DU MINIMUM.

Toute la théorie de la recherche du maximum et du minimum suppose la position de deux inconnues et la seule règle que voici :

Soit a une inconnue quelconque de la question (qu'elle ait une, deux ou trois dimensions, suivant qu'il convient d'après l'énoncé). On exprimera la quantité maxima ou minima en a, au moyen de termes qui pourront être de degrés quelconques. On substituera ensuite $a + e$ à l'inconnue primitive a, et on exprimera ainsi la quantité maxima ou minima en termes où entreront a et e à des degrés quelconques. On *adégalera*, pour parler comme Diophante, les deux expressions de la quantité maxima ou minima, et on retranchera les termes communs de part et d'autre. Cela fait, il se trouvera que de part et d'autre tous les termes seront affectés de e ou d'une de ses puissances. On divisera tous les termes par e, ou par une puissance de e, d'un degré plus élevé, de façon que dans l'un au moins des termes de l'un quelconque des membres e disparaisse entièrement. On supprimera ensuite tous les termes où entrera encore e ou l'une de ses puissances et l'on égalera les autres, ou bien, si dans l'un des membres il ne reste rien, on égalera, ce qui revient au même, les termes en plus aux termes en moins. La résolution de cette dernière équation donnera la valeur de a, qui conduira au maximum ou au minimum, en reprenant sa première expression.

Voici un exemple :

Soit à partager la droite AC (*fig.* 91) *en* E, *en sorte que* AE $\times$ EC *soit maximum.*

Fig. 91.

Posons AC $= b$; soit a un des segments, l'autre sera $b - a$, et le produit dont on doit trouver le maximum : $ba - a^2$. Soit maintenant $a + e$ le premier segment de b, le second sera $b - a - e$, et le produit des segments : $ba - a^2 + be - 2ae - e^2$:

Il doit être *adégalé au précédent :* $ba - a^2$:

Supprimant les termes communs : $be \backsim 2ae + e^2$:

Divisant tous les termes : $b \backsim 2a + e$:

Supprimez e : $b = 2a$.

Pour résoudre le problème il faut donc prendre la moitié de b.

Il est impossible de donner une méthode plus générale.

DOCUMENT II
Oeuvres de Fermat, tome III, p. 126
1638

SUR LA MÊME MÉTHODE.

Je veux, au moyen de ma méthode, *partager la ligne donnée* AC (*fig.* 94) *au point* B, *en sorte que* $AB^2 \times BC$ *soit le maximum* de tous les solides que l'on peut former de la même façon en partageant la ligne AC.

Fig. 94.

Posons, en notations algébriques, $AC = b$, l'inconnue $AB = a$; on aura $BC = b - a$ et le solide $a^2b - a^3$ doit satisfaire à la condition proposée.

Prenons maintenant $a + e$ au lieu de a, on aura pour le solide

$$(a+e)^2(b-e-a) = ba^2 + be^2 + 2bae - a^3 - 3ae^2 - 3a^2e - e^3$$

Je le compare au premier solide; $a^2b - a^3$, comme s'ils étaient égaux, quoiqu'en fait ils ne le soient point. C'est cette comparaison que j'appelle *adégalité*, pour parler comme Diophante, car on peut ainsi traduire le mot grec παρισότης dont il se sert.

Je retranche ensuite de part et d'autre les termes communs, c'est-à-dire $ba^2 - a^3$. Cela fait, dans un membre il ne reste rien, dans l'autre on a $be^2 + 2bae - 3ae^2 - 3a^2e - e^3$. Il faut donc comparer les termes en plus et ceux en moins; on a ainsi une seconde *adégalité* entre $be^2 + 2bae$ d'une part, $3ae^2 + 3a^2e + e^3$ de l'autre. Divisons tous les termes par e, l'*adégalité* aura lieu entre $be + 2ba$ et $3ae + 3a^2 + e^2$. Après cette division, si tous les termes peuvent encore être divisés par e, il faut réitérer la division, jusqu'à ce qu'on ait un terme qui ne se prête plus à cette division par e, ou, pour employer le langage de Viète, qui ne soit plus affecté de e. Mais, dans l'exemple proposé, nous trouvons que la division ne peut être réitérée. Il faut donc s'arrêter là.

Maintenant je supprime tous les termes affectés de e; il me reste d'une part $2ba$, de l'autre $3a^2$, membres entre lesquels il faut établir, non plus comme auparavant, une comparaison feinte ou une *adégalité*, mais bien une véritable équation. Je divise de part et d'autre par a; j'ai donc $2b = 3a$ ou $\frac{b}{a} = \frac{3}{2}$.

DOCUMENT III
Oeuvres de Fermat, tome III, p. 131-132
1640-1642

Soit, par exemple, proposé de *partager la droite b en sorte que le produit de ses segments soit maximum*. Le point satisfaisant à cette question est évidemment le milieu de la droite donnée, et le produit maximum est égal à $\frac{b^2}{4}$; aucune autre division de cette droite ne donnera un produit égal à $\frac{b^2}{4}$.

Mais si l'on propose de partager la même droite b en sorte que le produit des segments soit égal à z'' $\left(\text{cette aire étant d'ailleurs à supposer plus petite que } \frac{b^2}{4}\right)$, on aura deux points satisfaisant à la question, et ils se trouveront situés de part et d'autre du point correspondant au produit maximum.

Soit en effet a un des segments de la droite b, on aura $ba - a^2 = z''$, équation ambiguë, puisque pour la droite a on peut prendre chacune des deux racines. Soit donc l'équation corrélative $be - e^2 = z''$. Comparons ces deux équations d'après la méthode de Viète :

$$ba - be = a^2 - e^2.$$

Divisant de part et d'autre par $a - e$, il viendra

$$b = a + e;$$

les longueurs a et e seront d'ailleurs inégales.

Si, au lieu de l'aire z'', on en prend une autre plus grande, quoique toujours inférieure à $\frac{b^2}{4}$, les droites a et e différeront moins entre elles que les précédentes, les points de division se rapprochant davantage du point constitutif du produit maximum. Plus le produit des segments augmentera, plus au contraire diminuera la différence entre a et e, jusqu'à ce qu'elle s'évanouisse tout à fait pour la division correspondant au produit maximum; dans ce cas, il n'y a qu'une solution unique et singulière, les deux quantités a et e devenant égales.

Or la méthode de Viète, appliquée aux deux équations corrélatives ci-dessus, nous a conduit à l'égalité $b = a + e$; donc, si $e = a$ (ce qui arrivera constamment pour le point constitutif du maximum ou du minimum), on aura, dans le cas proposé, $b = 2a$, c'est-à-dire que, si l'on prend le milieu de la droite b, le produit des segments sera maximum.

Activité proposée aux élèves de 1ère A1

Fermat : Application de la méthode du maximum et du minimum à la tangente à la parabole

I - *Activités préparatoires*

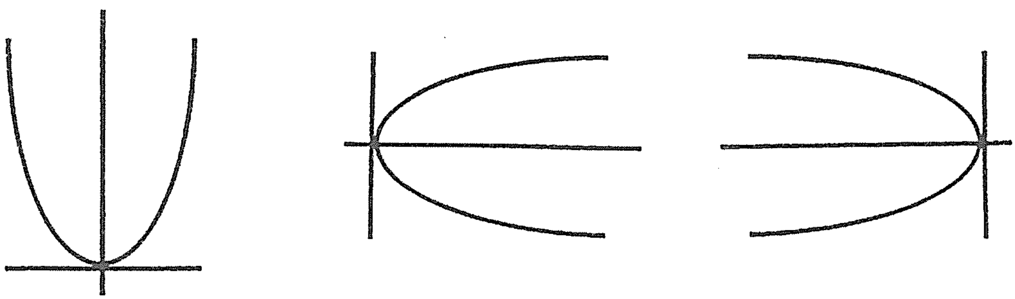
1° - soit f : $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$
$x \to x^2$.

Dans un repère (o, i·, j-), placer des points M (x_0 ; x_0^2) et E (0 ; - x_0^2) en utilisant le plus grand nombre possible de valeurs x_0 de la variable x. Chaque fois, construire la droite (ME).
On fera un tableau en donnant les coordonnées de M et de E correspondant à chacune des valeurs x_0.

Regarder votre graphique de très loin. Que constatez-vous ? Pouvez-vous énoncer une propriété de la tangente à la parabole d'équation $y = x^2$?

2°- On va essayer de démontrer cette propriété. Ecrire l'équation générale de la tangente à la parabole $y = x^2$ au point d'abscisse x_0.
Déterminer le point d'intersection de cette tangente avec (o,j). Que constate-t-on ? Cette propriété est-elle vraie pour toute parabole ?
Considérer g : $x \to ax^2$ et démontrer la propriété dans ce cas.
Lorsque l'on considérera les paraboles correspondants aux fonctions h : $x \to ax^2+bx+c$, la propriété restera-t-elle vraie ? Pourquoi ?

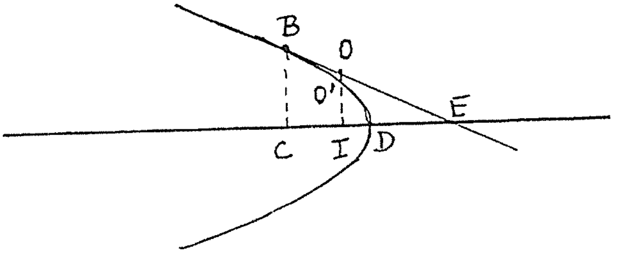
3° - Trouver une relation entre x et y dans chacun des cas suivants :



II - *Lecture du document*

Lire le document en soulignant ce que vous ne comprenez pas.
Comment Fermat définit-il une parabole ? Comment appelons-nous ce que lui appelle "diamètre" ? Quelle explication pouvez-vous en donner ?
Reprendre la démonstration pas à pas.
Déterminer les propriétés géométriques que la figure vous suggère. Ecrire les relations entre les coordonnées des points B et O'situés sur la parabole : CD = ?   DI = ?
Quels sont les propriétés de la relation "<" utilisées au cours du calcul ?

CI = e
CD = d
CE = a
DI = ?
IE = ?



III - *Commentaires*

* Interpréter "l'adégalité" : A quel moment Fermat l'utilise-t-il ? Ceci vous parait-il acceptable ?

* La méthode du maximum et du minimum est-elle utilisée de la même façon que dans les textes vus précédemment ? (Par exemple dans celui où il cherche le point B du segment [AC] tel que $AB^2 \times BC$ soit maximum) ?

* Le résultat démontré par Fermat est-il facilement utilisable ? Pensez-vous vous l'approprier ?

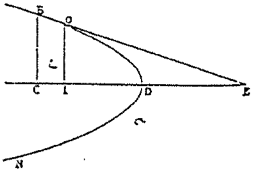
* Peut-on établir un résultat équivalent pour la tangente à la courbe représentative d'une autre fonction ? Pour l'hyperbole ($g : x \rightarrow \frac{1}{x}$) ? pour une autre courbe ?

METHODE POUR LA RECHERCHE DU MAXIMUM ET DU MINIMUM
(suite du document 1)
Oeuvres de fermat, tome III, p. 122-123.

Nous ramenons à la méthode précédente l'invention des tangentes en des points donnés à des courbes quelconques.

Soit donnée, par exemple, la parabole BDN (*fig.* 92), de sommet D,

Fig. 92.



de diamètre DC; soit donné sur elle le point B, par lequel il faut mener la droite BE tangente à la parabole et rencontrant le diamètre en E.

Si l'on prend sur la droite BE un point quelconque O, dont on mène l'ordonnée OI, en même temps que l'ordonnée BC du point B, on aura : $\frac{CD}{DI} > \frac{BC^2}{OI^2}$, puisque le point O est extérieur à la parabole. Mais $\frac{BC^2}{OI^2} = \frac{CE^2}{IE^2}$, à cause de la similitude des triangles. Donc $\frac{CD}{DI} > \frac{CE^2}{IE^2}$.

Or le point B est donné, donc l'ordonnée BC, donc le point C, donc CD. Soit donc $CD = d$, donnée. Posons $CE = a$ et $CI = e$; on aura $\frac{d}{d-e} > \frac{a^2}{a^2+e^2-2ae}$.

Faisons le produit des moyens et des extrêmes :

$$da^2 + de^2 - 2dae > da^2 - a^2e.$$

Adégalons donc, d'après la méthode précédente; on aura, en retranchant les termes communs :

$$de^2 - 2dae \backsim - a^2e,$$

ou, ce qui revient au même :

$$de^2 + a^2e \backsim 2dae.$$

Divisez tous les termes par e :

$$de + a^2 \backsim 2da.$$

Supprimez de : il reste $a^2 = 2da$, donc : $a = 2d$.

Nous prouvons ainsi que CE est double de CD, ce qui est conforme à la vérité.

Cette méthode ne trompe jamais, et peut s'étendre à nombre de questions très belles; grâce à elle, nous avons trouvé les centres de gravité de figures terminées par des lignes droites et courbes, aussi bien que ceux de solides et nombre d'autres choses dont nous pourrons traiter ailleurs, si nous en avons le loisir.

Quant à la quadrature des aires limitées par des lignes courbes et droites, ainsi qu'au rapport que les solides qu'elles engendrent ont aux cônes de même base et même hauteur, nous en avons déjà longuement traité avec M. de Roberval.