INTRODUCTION AUX AIRES ET VOLUMES DANS UNE PERSPECTIVE HISTORIQUE

Anne Chevalier (GEM-Louvain la Neuve)

L'atelier présentait une des propositions du groupe A.H.A.[1], dont l'objectif est de construire pour les élèves des deux dernières années de l'enseignement secondaire de toutes sections une Approche Heuritique de l'Analyse, c'est-à-dire un enseignement basé sur des situations-problèmes qui amènent à théoriser.

Nous avons choisi de subdiviser l'approche du calcul intégral en deux parties. La première, présentée ci-dessous, suit un parcours inspiré de l'histoire et s'attarde à quelques questions-clé de la problématique des aires et des volumes ainsi qu'aux avantages et inconvénients de différentes méthodes. La seconde, qui n'est pas décrite dans cet article, propose trois approches du théorème fondamental. Il nous semble important d'amener nos élèves à réaliser que ce théorème, qui permet de résoudre de façon relativement simple une quantité extraordinaire de problèmes les plus divers, est l'aboutissement de vingt siècles de recherche sur des cas d'espèce.

Faire travailler nos élèves sur des calculs d'aire de surfaces à contour curviligne ou de volume de solides quelconques à partir des moyens familiers dont ils disposent nous donne l'occasion de les confronter à des problèmes qui ont été au coeur de l'évolution de l'analyse parce qu'ils ont posé de façon pertinente les questions relatives au comportement des suites infinies et au traitement des quantités infiniment petites.

Introduction : les méthodes de calcul d'aires et de volumes rencontrées dans l'histoire

On ne compte pas les différentes approches qui ont été proposées depuis l'antiquité pour calculer l'aire d'une surface à contour curviligne ou le volume d'un cône. En particulier l'aire du disque a suscité un nombre considérable de traités. Cet objet tout à fait exceptionnel par sa simplicité et sa symétrie pose en plus de la question de la méthode d'approche de l'aire celle de la nature du résultat. C'est toute la problématique des nombres irrationnels qui surgit parallèlement au problème géométrique.

Les approches sont nombreuses et pourtant la méthodologie mise en oeuvre se ramène toujours à deux principes.

a) Remplissage par des surfaces (ou des volumes)

On décompose la figure en figures rectilignes de manière à pouvoir s'approcher d'aussi près qu'on veut de la figure étudiée, et cela généralement de l'une des deux façons suivantes :

1 dont les membres sont Pierre Bolly, Anne Chevalier, Mariza Grand Henri, Christiane Hauchart, Dany Legrand, Nicolas Rouche, Maggy Schneider.

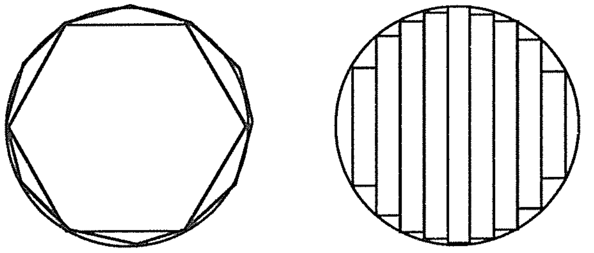

fig.1

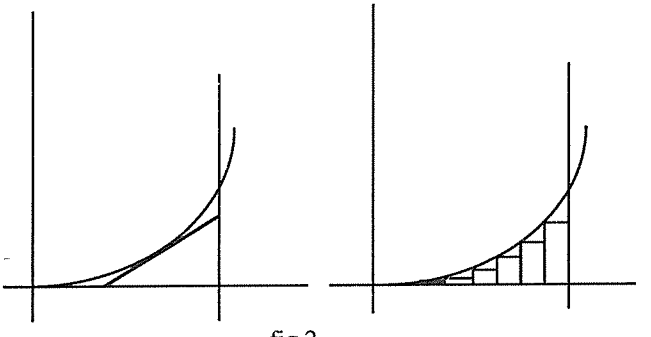

fig.2

Dans les situations présentées à gauche des figures 1 et 2, on commence par remplir la figure par le plus gros polygone facile d'accès et de configuration proche de la figure étudiée. Ensuite, on cherche à remplir les morceaux restants. Le processus se répète à l'infini et les morceaux ajoutés sont de plus en plus petits mais restent, à toutes les étapes, des surfaces[1]. Il s'agira pour calculer l'aire d'étudier la convergence de la série obtenue en faisant la somme des aires des polygones ainsi inscrits à la figure. Un inconvénient de ce procédé de remplissage est qu'il est spécifique à chaque figure. Il arrive, comme pour le disque, que le processus itératif présente certaines régularités et se prête facilement aux calculs. Mais c'est loin d'être une généralité.

Par contre, le remplissage par des rectangles, moins naturel à première vue pour le disque, facilite grandement les calculs lorsqu'on travaille dans un repère cartésien et permet une plus grande généralisation des procédés de calcul pour certaines familles de courbes[2].

Remarquons que l'approche de l'aire par des rectangles ne pose pas les mêmes questions que l'approche par des polygones. En effet, il ne s'agit pas ici de remplir les morceaux restants par des petits rectangles (ce qui est imaginable techniquement mais rendrait les calculs très compliqués) mais bien d'envisager un remplissage par un nombre de plus en plus grand de rectangles. Cela signifie qu'à chaque étape on efface le découpage précédent et on recommence avec un autre plus dense. La limite envisagée n'est plus celle d'une série mais celle d'une suite. Quel sens peut-on donner à la limite de cette suite ? La seule chose qu'on puisse affirmer est qu'avec un nombre très élevé de rectangles on doit faire la somme des aires d'un très grand nombre de rectangles très minces ?

---

1 contrairement à ce que les élèves imaginent régulièrement, à savoir que les rectangles deviennent des segments.

2 voir également p.6

b) Découpage d'une surface en indivisibles

La méthode du calcul des aires et des volumes par les indivisibles est liée au nom de Cavalieri (1598 - 1647), sans pour autant qu'il soit le premier à avoir utilisé les indivisibles dans des raisonnements. Déjà Archimède avait mis au point une méthode pour calculer l'aire d'un segment de parabole à partir de la considération des segments qu'on peut y découper.

Bonaventura Cavalieri propose dans sa "Geometria indivisibilibus ...", publiée en 1635, une nouvelle décomposition des surfaces et des volumes, qui se définit ainsi :

"Si, par les tangentes opposées d'une figure plane sont menés deux plans parallèles soit perpendiculaires, soit inclinés par rapport au plan de la figure, et si l'un d'eux glisse vers l'autre, en restant toujours parallèle à celui-ci jusqu'à ce qu'il coïncide avec celui-ci, toutes les lignes qui, prises l'une après l'autre, forment l'intersection entre le plan mobile et la figure donnée, prises toutes ensemble, sont appelées "toutes les lignes de la figure, prises avec l'une d'elles comme règle..."[1]

On peut obtenir "tous les plans d'un solide" par une construction analogue. Il est important de signaler que Cavalieri n'identifie pas les figures planes ou solides aux agrégats (ou collection) de leurs lignes ou de leurs plans. Il introduit un outil dont il a besoin pour étudier les aires des surfaces et les volumes des solides. Ainsi donc, on peut comparer des collections de lignes, les additionner ou les soustraire, les multiplier par un entier et exprimer des rapports entre elles. Voici comment il exprime la relation fondamentale entre les surfaces et les collections de lignes : si deux figures sont comprises entre deux mêmes tangentes parallèles et si les sections faites de lignes ou de plans parallèles aux bases et à égale distance de celles-ci sont toujours dans le même rapport, alors les figures sont aussi dans ce rapport. (figure 3)

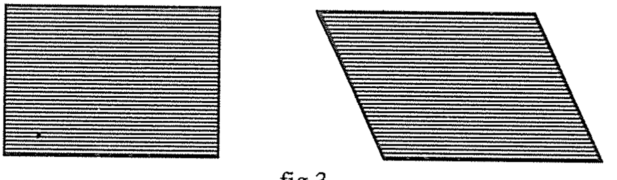

fig.3

On peut résumer la pensée de Cavalieri à l'aide d'un extrait de lettre adressée à Galilée : *"Je n'ai pas osé dire que le continu est composé d'indivisibles mais j'ai montré qu'il y a entre les continus la même proportion qu'entre les collections d'indivisibles."*

Dans la progression proposée aux élèves, nous avons voulu les confronter à ces deux méthodes de calcul d'aires et de volumes. Nous vous proposons ci-dessous quelques problèmes tels que nous les abordons avec les élèves.[2]

1 . Des surfaces courbes approchées par des surfaces rectilignes

1.1 L'aire d'un segment de parabole à la manière d'Archimède

Les paraboles sont bien connues. On les obtient, entre autres, comme graphes d'une fonction du deuxième degré. La figure 4 montre la parabole d'équation $y = x^2$.

1 Cavalieri, Geometria, livre II, déf.1.

2 Nous avons extrait les questions et les solutions du chapitre 7 du document AHA.

Elles admettent un axe de symétrie orthogonale ou *diamètre* de la parabole. Lorsqu'une droite coupe une parabole en deux points, on délimite ainsi une surface appelée *segment de parabole* (figure 5).

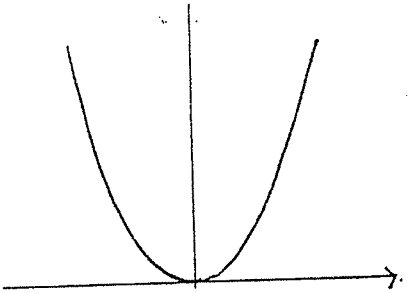

fig.4

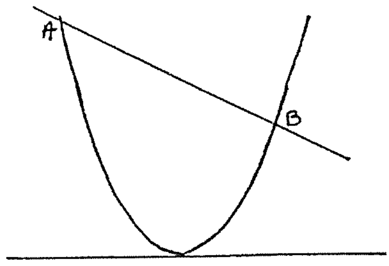

fig.5

Comment déterminer l'aire d'une telle surface ?

Nous exposons ci-dessous un procédé de remplissage du segment de parabole comme celui mis en oeuvre par Archimède (III^e siècle avant Jésus-Christ) dans une des démonstrations de son traité intitulé "La quadrature de la parabole" (Le terme quadrature est utilisé pour exprimer le rapport entre l'aire de deux surfaces. Ici, il s'agit de comparer l'aire du segment de parabole à celle d'un triangle particulier inscrit à celui-ci)

Si on trace la tangente à la parabole parallèle à la droite sécante AB qui délimite le segment de parabole, le point de tangence C est le point de la courbe le plus éloigné de la droite (expliquez pourquoi) et est appelé *sommet* du segment de parabole (figure 6). La hauteur du segment de parabole est le segment de droite issu du sommet et perpendiculaire à la base. Le triangle ABC est le plus grand triangle qu'on peut inscrire au segment de parabole et il a même base et même hauteur que celui-ci. Il détermine deux nouveaux segments de parabole de base AC et BC et dans lesquels on peut inscrire deux triangles ADC et CEB en suivant le même principe.

Si on poursuit ainsi cette construction, on remplit de mieux en mieux le segment de parabole initial.

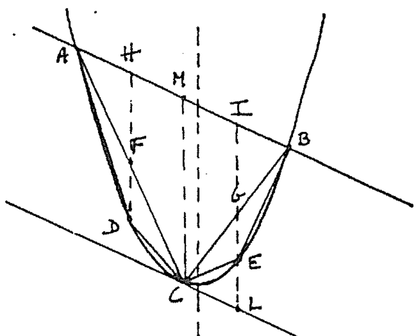

fig.6

Vers quoi tend la somme des aires de tous ces triangles ?

Si on travaille à partir de la parabole d'équation $y = x^2$ sectionnée par une droite AB passant par le point A de coordonnées (a, a^2) et le point B de coordonnées (b, b^2), on détermine aisément que le point C de la parabole qui admet comme tangente une droite parallèle à AB a pour coordonnées $(\frac{a+b}{2}, (\frac{a+b}{2})^2)$.

L'abscisse du point C est à mi-chemin entre l'abscisse *a* et l'abscisse *b*. Et donc, par le théorème de Thalès, le point M est à mi-chemin entre A et B.

Ce que nous venons de démontrer est une propriété générale. Appelons AB la *base* du segment de parabole et C son *sommet* : c'est le point de l'arc de parabole le plus éloigné de la base. Nous venons de démontrer ceci : *toute parallèle au diamètre d'une parabole, issue d'un sommet d'un segment de cette parabole, coupe la base du segment en son milieu.*

En fait, nous n'avons démontré cela que pour la parabole $y = x^2$, mais l'extension à toutes les paraboles ne pose pas de problème.

De cette propriété générale résulte que F est le milieu de AC et que G est le milieu de CB. Par le théorème de Thalès, on déduit de là que H est le milieu de AM et I le milieu de MB.

Ensuite G est le milieu de LI. Cela résulte de l'isométrie des deux triangles GIB et GCL.

A partir des coordonnées de G et de L, on montre que E est le milieu de GL. Nous pouvons maintenant comparer le triangle BEC au triangle BMC. La figure 7 reproduit une partie de la figure 6.

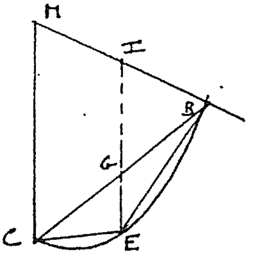

fig.7

Joignons les points C et I. Le triangle CIB vaut deux fois CEB (entendez : l'aire de CIB vaut deux fois celle de CEB) : en effet, CIB se décompose en CIG qui vaut deux fois CEG et IGB qui vaut deux fois GEB. Et puisque CMB vaut deux fois CIB, on a bien que CEB vaut le quart de MCB.

On conclut de même, en retournant à la figure 6, que ADC vaut le quart de AMC. Donc ADC et CEB valent ensemble le quart de ACB. Le polygone ADCEB vaut $1 + \frac{1}{4}$ de ACB.

Lorsqu'on inscrit un triangle dans chacun des quatre segments de parabole déterminés par le polygone ADCEB, on reproduit le phénomène qui vient d'être décrit. Les deux triangles de bases CE et EB valent le quart de CEB. Les deux triangles de bases AD et DC valent le quart de ADC. Les quatre triangles ajoutés pris ensemble valent le quart de deux triangles ajoutés à l'étape précédente. L'aire du nouveau polygone ainsi décrit vaut

$$\left(1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{16}\right) \times \text{aire ACB.}$$

Si on poursuit le procédé jusqu'à la $n^{\text{ème}}$ étape, on obtient pour l'aire du polygone

$$\left(1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{16} + \dots + \frac{1}{4^{n-1}}\right) \times \text{aire ACB.}$$

Le terme entre parenthèses est le début d'une série géométrique dont le premier terme vaut 1 et la raison $\frac{1}{4}$. Il vaut

$$\frac{1\left(1-\frac{1}{4^n}\right)}{1-\frac{1}{4}}=\frac{4}{3}\left(1-\frac{1}{4^n}\right).$$

Et maintenant, revenons à l'aire du segment de parabole. Elle est inférieure à 4/3 de l'aire de ACB et la différence avec 4/3 sera d'autant moins grande que le nombre de triangles ajoutés sera élevé. Peut-on en conclure pour autant que l'aire du segment vaut exactement 4/3? Nous reviendrons sur cette question un peu plus loin.

1.2 L'aire d'un segment de cubique

Après avoir travaillé les problèmes d'aires liés à la courbe $y = x^2$, il est assez naturel d'étudier les problèmes analogues pour $y = x^3$, $y = x^4$, etc. Commençons par une situation assez simple.

1.2.1 *La figure* 8 *montre la surface délimitée par la courbe* $y = |x|^3$ *(les courbes du troisième degré sont appelées* cubiques) *et la droite* $y = 1$. *Comment évaluer l'aire de ce segment de cubique?*

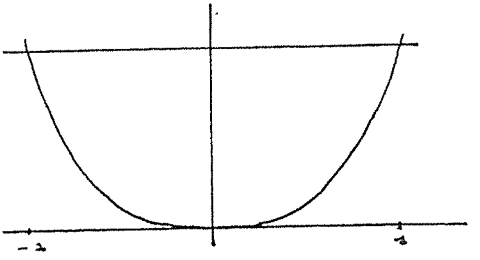

fig.8

On peut essayer d'imiter la quadrature de la parabole. Mais déjà celle-ci n'était pas simple à traiter et si on s'y risque on peut se rendre compte rapidement que le succès du procédé décrit plus haut est tout à fait spécifique à la parabole. En effet, toutes les propriétés des milieux rencontrées ne se retrouvent plus pour les autres courbes. L'histoire du calcul des aires et des volumes montre que les méthodes qui ont fait du chemin sont celles qui sont généralisables à une classe d'objets la plus large possible. Mais que faire d'autre pour la cubique ?

Repartons en quelque sorte à zéro. Mesurer une aire, c'est voir en quelque sorte combien de fois l'unité de surface est contenue dans la surface. Dans ce qui suit, nous allons rencontrer une autre méthode de calcul d'aire d'une surface, approchée par des sommes d'aires de rectangles, qui a pris naissance en même temps que la géométrie analytique, c'est-à-dire la description des courbes par leur équation et leur représentation dans un système d'axes. Les coordonnées (x,y) de chacun des points de la courbe amènent à privilièger naturellement les directions des axes et donc à remplir de rectangles si les axes sont perpendiculaires. Dans une telle situation, on est amené à s'intéresser à l'aire de la surface délimitée par les axes, la courbe et une droite quelconque parallèle à l'axe oy, c'est-à-dire à l'aire sous une courbe.

Notre problème est ainsi ramené à trouver l'aire de la surface OAB.

Inscrivons à cette surface n rectangles (figure 9) (on peut commencer par choisir n = 10 par exemple). La somme des aires de ces rectangles nous fournira une valeur approchée par défaut de l'aire recherchée. Si de plus, on circonscrit n rectangles à cette surface (figure 10), la somme des aires de ceux-ci nous fournira une valeur approchée par excès. Cette façon de faire aura pour avantage de nous donner un encadrement de l'aire cherchée.

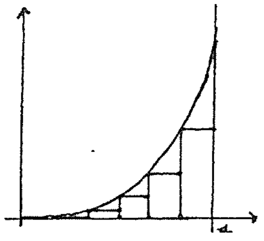

fig.9

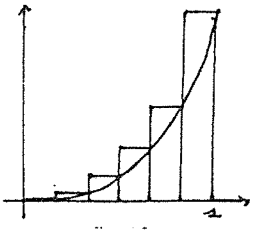

fig.10

Calculons ces deux valeurs. La somme des aires s'écrit pour les n rectangles inscrits

$$S_i = \frac{1}{n}\left[\left(\frac{1}{n}\right)^3 + \left(\frac{2}{n}\right)^3 + \left(\frac{3}{n}\right)^3 + \ldots + \left(\frac{n-1}{n}\right)^3\right]$$

$$= \frac{1}{n^4}(1^3 + 2^3 + 3^3 + \ldots + (n-1)^3),$$

et

$$S_c = \frac{1}{n^4}(1^3 + 2^3 + 3^3 + \ldots + (n-1)^3 + n^3).$$

Pour calculer S_i et S_c, le plus simple est de se souvenir de la formule

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + \ldots + n^3 = (1 + 2 + 3 + \ldots + n)^2 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}.$$

$$S_i = \frac{1}{n^4}\frac{(n-1)^2 n^2}{4} = \frac{(n-1)^2}{4n^2} = \frac{1}{4} - \frac{1}{2n} + \frac{1}{4n^2},$$

et

$$S_c = \frac{1}{4} + \frac{1}{2n} + \frac{1}{4n^2}.$$

On a donc, pour l'aire S cherchée

$$\frac{1}{4} + \frac{1}{4n^2} - \frac{1}{2n} < S < \frac{1}{4} + \frac{1}{4n^2} + \frac{1}{2n}.$$

1.2.2 *Quelle est la valeur exacte de l'aire S?*

On conçoit qu'il puisse y avoir plusieurs opinions quant à l'aire exacte de S.

On peut par exemple penser qu'elle vaut 1/4, parce que les termes $\frac{1}{4n^2} - \frac{1}{2n}$ et $\frac{1}{4n^2} + \frac{1}{2n}$ tendent vers 0 quand n tend vers l'infini ; ou encore parce que les rectangles inscrits deviennent si fins qu'ils se changent en segments et que ces segments remplissent toute la surface.

On peut aussi remarquer que la différence entre la valeur approchée par excès et la valeur approchée par défaut correspond exactement au plus grand rectangle circonscrit. L'aire de celui-ci peut être rendue aussi petite qu'on veut puisque la base de longueur 1/n peut être choisie aussi petite qu'on veut.

On peut aussi penser que 1/4 est une valeur approximative de l'aire, puisque quelque grand que soit n, les termes $\frac{1}{4n^2}-\frac{1}{2n}$ et $\frac{1}{4n^2}+\frac{1}{2n}$ ne sont jamais nuls. Quant aux rectangles, ils ne se réduisent jamais à des segments, puisque pour cela, il faudrait que chaque intervalle de subdivision se réduise à un point, ce qui n'arrive jamais.

On peut aussi croire que l'aire vaut 1/4 plus ou moins une toute petite quantité incalculable.

Toutes ces considérations sont plausibles, mais seulement plausibles. Pour trancher, il nous faut un raisonnement convaincant.

Si l'aire n'est pas égale à 1/4, peut-elle être strictement inférieure à 1/4, par exemple égale à

$$0{,}2499=\frac{1}{4}-\frac{1}{10^4}\,?$$

Si nous subdivisons l'intervalle en 5 000 segments, la somme des aires des rectangles inscrits à la surface vaut

$$\frac{1}{4}-\frac{1}{10\,000}+\frac{1}{10^8}>\frac{1}{4}-\frac{1}{10\,000}.$$

Donc l'aire ne peut être égale à 0,2499.

Ceci nous inspire un raisonnement général.

1) Supposons que l'aire S soit plus petite que 1/4 et que la différence soit plus grande que $1/10^m$ (avec m aussi grand qu'on veut) ($1/4 - S > 1/10^m$ ou encore $S < 1/4 - 1/10^m$) . Ce n'est pas possible car la somme des rectangles inscrits, si on en prend $\frac{10^m}{2}$, vaut

$$\frac{1}{4}-\frac{1}{10^m}+\frac{1}{10^{2m}}>\frac{1}{4}-\frac{1}{10^m}>S.$$

2) Supposons que l'aire S soit plus grande que 1/4 et que la différence soit plus grande que $1/10^m$ ($S - 1/4 > 1/10^m$ ou $1/4 + 1/10^m < S$). Ce n'est pas possible, car la somme des rectangles circonscrits, si on en prend $\frac{1}{10^{2m}}$, vaut

$$\frac{1}{4}+\frac{1}{10^{2m}}+\frac{1}{10^{4m}}<\frac{1}{4}+\frac{1}{10^m}<S.$$

Et puisque l'aire en question ne peut être ni strictement plus petite que 1/4, ni strictement plus grande, il faut bien qu'elle soit égale à 1/4.

On a convenu de noter ce résultat ainsi :

$$\begin{aligned} S &= \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left[\left(\frac{1}{n}\right)^3+\left(\frac{2}{n}\right)^3+\left(\frac{3}{n}\right)^3+\ldots+\left(\frac{n-1}{n}\right)^3\right]= \lim_{n\to\infty}\left[\frac{1}{4}+\frac{1}{4n^2}-\frac{1}{2n}\right] \\ &= \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left[\left(\frac{1}{n}\right)^3+\left(\frac{2}{n}\right)^3+\left(\frac{3}{n}\right)^3+\ldots+\left(\frac{n}{n}\right)^3\right]= \lim_{n\to\infty}\left[\frac{1}{4}+\frac{1}{4n^2}+\frac{1}{2n}\right] \\ &= \frac{1}{4}. \end{aligned}$$

On peut noter ce calcul = $\int_0^1 x^3 dx$. Cette notation est due à Leibniz ; elle représente ici la limite des sommes des aires des rectangles. Cette limite s'appelle l'intégrale de x^3 sur l'intervalle [0,1].

1.3 Retour à la quadrature de la parabole

Dans l'exercice précédent, nous avons encadré l'aire de la surface recherchée par une suite de valeurs approchées par défaut et une suite de valeurs approchées par excès. Et nous avons constaté que ces deux suites admettent la même limite, à savoir l'aire recherchée.

En ce qui concerne l'aire du segment de parabole, nous avons construit une suite de valeurs approchées par défaut

$$\frac{4}{3}\left(1-\frac{1}{4^n}\right)$$

L'aire du segment de parabole ne peut donc pas être supérieure à 4/3 de l'aire du triangle ABC. Peut-elle être inférieure ? Supposons $S = 4/3 - \varepsilon$. On peut toujours choisir le nombre d'étapes n de remplissage du segment de parabole tel que

$$\frac{4}{3}\left(1-\frac{1}{4^n}\right)>\frac{4}{3}-\varepsilon$$

et donc le polygone inscrit a une aire supérieure à celle du segment de parabole, ce qui est impossible. L'aire du segment de parabole ne peut être ni supérieure, ni inférieure aux 4/3 de l'aire du triangle ABC. Elle vaut donc exactement 4/3 de l'aire du triangle ABC.

Tout comme pour l'aire de la surface sous x^3, on peut observer qu'en faisant un passage à la limite sur la suite des aires des polygones inscrits, on obtient

$$\lim_{n\to\infty}\frac{4}{3}\left(1-\frac{1}{4^n}\right)=\frac{4}{3}.$$

qui correspond exactement à l'aire recherchée.

2. Découpage de solides en surfaces

2.1 Le volume d'un prisme

Le volume d'un prisme droit vaut le produit de sa base par sa hauteur. Cette formule reste-t-elle vraie pour un prisme penché, ...vraiment penché ?

Examinons cette question à la lumière d'un raisonnement décrit par Alexis-Claude Clairaut (1713-1765), mathématicien français connu du grand public surtout pour ses précisions relatives au retour de la comète de Halley en 1759 et qui exprime, dans un langage simple, une règle qui permet de comparer des volumes, déjà énoncée et mise à l'épreuve par le mathématicien italien Cavalieri au XVII^e siècle.

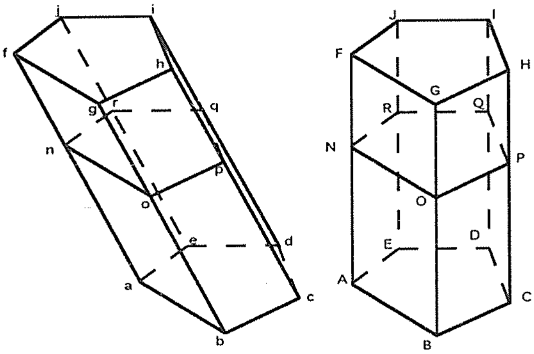

fig.11

"*Formation des prismes obliques.*

On conçoit les prismes obliques formés par une base abcde, qui se meut parallèlement à elle-même, et de telle façon que ses angles suivent des lignes parallèles af, bg, ch, etc., qui s'élèvent hors du plan de base, et qui ne lui sont point perpendiculaires.

Les prismes obliques sont égaux aux prismes droits lorsqu'ils ont même base et même hauteur.

L'analogie qu'il y a entre cette formation et la formation des prismes droits, dont nous avons parlé, (...) donne facilement la mesure de la solidité[1] des prismes obliques; car si on imagine à côté d'un prisme oblique abcdefghij (Fig.7), un prisme droit ABCDEFGHIJ, qui ait la même base, et que ces deux prismes soient renfermés entre deux plans parallèles, on verra que la solidité de ces deux corps sera absolument la même.

Car, si par un point quelconque P de la hauteur, on fait passer un plan parallèle à la base, les sections NOPQR, nopqr, que ce plan formera dans chacun des deux prismes, pourront être regardées comme les bases égales ABCDE, abcde, arrivées en NOPQR, nopqr, par le mouvement qui forme ces deux prismes; et ainsi, ces deux sections seront des polygones égaux.

Or, si toutes les tranches imaginables qu'on peut former dans ces deux prismes par des mêmes plans coupants sont égales, il faudra que les assemblages de ces tranches, c'est-à-dire les prismes, soient égaux aussi.

On énonce ordinairement ainsi cette proprosition : les prismes obliques sont égaux aux prismes droits lorsqu'ils ont même base et même hauteur. On appelle la hauteur d'un prisme la perpendiculaire abaissée du plan supérieur sur l'inférieur ou son prolongement."[2]

2.2 <u>D'une pyramide à toutes les autres et au cône.</u>

Venons-en maintenant aux pyramides.

a) On peut décomposer un cube en six pyramides identiques. Comment ? Déduisez-en le volume d'une de ces pyramides.

b) Exploitez cette situation pour trouver le volume d'une pyramide quelconque, en utilisant le principe de Cavalieri décrit par Clairaut.

Pour cela, imaginez la juxtaposition de deux pyramides, l'une quelconque et l'autre, une pyramide droite, de même hauteur que la première, et semblable à une des six pyramides

---

1 Le terme solidité signifie volume (d'un solide). (Note ajoutée au texte de Clairaut).

2 A.C. Clairaut, Eléments de Géométrie, tome II, p.56 et 57.

logées dans un cube. Placez-les de telle façon que leurs bases soient dans un même plan et sectionnez ensuite ces deux pyramides par un plan parallèle aux bases. Comparez les aires des surfaces ainsi obtenues. Que peut-on en déduire à propos des volumes ?

c) Utilisez un procédé analogue pour calculer le volume d'un cône quelconque (en le comparant avec une pyramide de même hauteur) .

En joignant le centre O d'un cube de côté c à chacun de ses sommets, on détermine six pyramides de même sommet O et dont les bases respectives sont les six faces du cube (voir figure 12).

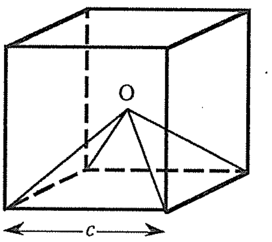

fig.12

Etant identiques, elles ont toutes un volume V égal au sixième de celui du cube, c'est-à-dire égal au tiers du produit de leur base c^2 par leur hauteur $c/2$:

$$V = \frac{c^3}{6} = \frac{1}{3}c^2\frac{c}{2} = \frac{1}{3}c^2\,h.$$

Considérons à présent une pyramide quelconque de hauteur h et de base B'. Posons à côté d'elle , sur un plan, une des six pyramides extraites d'un cube de côté $c = 2h$. Appelons B la base de cette pyramide.

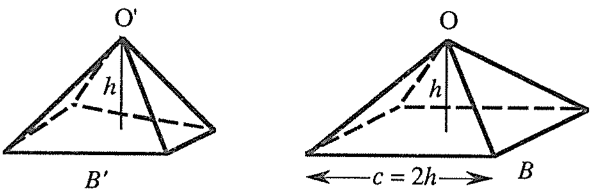

fig.13

Coupons les deux pyramides, à une hauteur quelconque, par un plan parallèle au plan de leurs bases. On détermine ainsi les sections d'aires S' et S. Ces aires sont entre elles comme celles de B et B' des bases des pyramides : elles ont entre elles un rapport constant indépendant de la hauteur .

Par conséquent, en vertu du principe de Cavalieri, les volumes V et V' de ces pyramides sont dans ce même rapport constant, qui est celui de leurs bases :

$$\frac{V'}{V} = \frac{B'}{B} = \frac{B'}{c^2}.$$

D'où le volume V' de la nouvelle pyramide vaut

$$V' = \frac{VB'}{c^2} = \frac{1}{3}\frac{c^2\,h\mathrm{B}'}{c^2} = \frac{1}{3}hB'.$$

Remarquons que, dans ce raisonnement, on n'a pas besoin que la base B' soit carrée, ni que la pyramide de volume V' soit droite : seuls comptent l'aire de cette base et la distance h du sommet O au plan de la base.

D'où la propriété : *Une pyramide quelconque a pour volume le tiers du produit de sa base par sa hauteur.*

Un cône droit ou oblique se distingue d'une pyramide par sa base circulaire. Cela mis à part, on peut comparer un cône, à une pyramide quelconque de même hauteur h et dont la base a même aire B. En effet, sectionnons ces deux solides à une hauteur quelconque par un plan parallèle au plan de leurs bases : les sections obtenues ont même aire S. Par conséquent, en vertu du principe de Cavalieri, le volume du cône égale celui de la pyramide, soit le tiers du produit de sa base par sa hauteur.

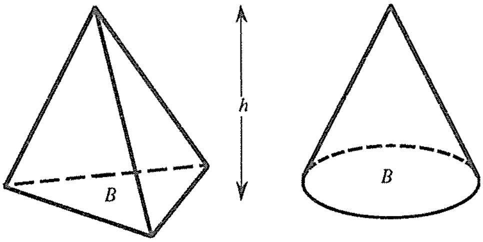

fig.14

En guise de conclusion

Donner un sens à la notion de limite

Il est relativement aisé de donner une idée intuitive de limite en s'intéressant au comportement de suites ou de fonctions. Par contre il y un pas à franchir si nous voulons faire réfléchir nos élèves sur la nature des limites et plus encore sur la formalisation nécessaire à son utilisation dans la construction de la théorie en analyse.

Les deux problèmes décrits plus haut vont dans ce sens. En effet, l'existence de l'aire de chacune des deux surfaces envisagées ne fait de doute pour personne. De plus, la nature des figures nécessite un processus infini pour en approcher l'aire. Il est donc naturel de se poser la question de la limite de la suite ou de la série ainsi construite dont le terme général fournit dans les deux cas une idée approximative de l'aire. Comment démontrer que cette estimation est bien l'aire de la figure ? Nous démontrons alors que l'aire ne peut être ni supérieure, ni inférieure à la valeur estimée S. Il s'agit en fait de montrer que si on se donne une valeur quelconque inférieure (S - ε) ou supérieure (S + ε) à la valeur estimée, il est toujours possible de trouver dans la suite des aires des surfaces inscrites ou circonscrites, une valeur qui vient s'intercaler entre S et S - ε ou S et S + ε. Autrement dit, il n'est pas possible de venir intercaler un nombre entre les éléments de la suite et S ou encore on peut s'approcher de S à l'aide des éléments de la suite d'aussi près qu'on veut.

La question des dimensions

Les problèmes posés ci-dessus nous donnent également l'occasion de poser la question de la nature des objets qu'on fabrique et qu'on manipule. Que deviennent les triangles ou les rectangles quand on poursuit le processus à l'infini ? Se réduisent-ils à un point ou un segment ou bien restent-ils de la même nature que les objets de départ, à savoir des surfaces ? Et les découpages dans les prismes à la manière de Cavalieri, fournissent-ils des surfaces ou des volumes ? Comment recomposer ensuite le volume ? Peut-on imaginer qu'il s'agisse d'un empilement au sens où on voit une pile de feuilles ? Ou bien s'agit-il d'objets d'une autre nature ? Le procédé de comptage est-il encore valide ? Ou faut-il le contourner ? Toutes ces des questions ramènent à celle qui a fait l'objet de nombreux débats dans l'histoire : la droite est-elle constituée de points ?

L'idée n'est pas de résoudre ces questions au niveau de l'enseignement secondaire mais bien d'animer dans les classes des débats qui donnent du sens au concept de limite.

Bibliographie

A.H.A, dix chapitres sur l'enseignement de l'analyse proposés dans une version photocopiée, édition expérimentale diponible sur demande au secrétariat du Département de Mathématique, 2 chemin du cyclotron , 1348 Louvain-la -Neuve.

ANDERSEN K., *Cavalieri's Method of Indivisibles*, Archive for History of Exact Sciences, volume 31 n°4, 1985.

ARCHIMEDE, *La quadrature de la parabole, La méthode*, traduction CH. Mugler, Les Belles Lettres, Paris, 1971.

BOYER C.B., *The History of the Calculus and its conceptual Development*, Dover, N.Y., 1949.

HEATH T.L., *The Work of Archimedes*, Dover, New York, 1912.

Adresse de l'auteur : Anne Chevalier
rue de l'Eau Vive, 15
B. 1420 Braine-l'Alleud