

----- GEOMETRIE NON EUCLIDIENNE ET NAISSANCE DE L'AXIOMATIQUE MODERNE -----

Jean-Claude PONT

Les recherches métaphysiques n'ont point à se justifier par leur utilité ni par leur agrément; elles sont comme le sport d'un esprit vigoureux. "Si pénibles et si fatigantes que puissent paraître ces recherches, il en est de certains esprits comme de certains corps qui, pourvus d'une santé vigoureuse et florissante, ont besoin d'exercices violents et trouvent plaisir à des travaux qui paraissent à la généralité des hommes pénibles et accablants." (E. Bréhier, citant Hume, *Histoire de la philosophie*, t.2, p.357)

La philosophie arrive à défaire le travail de l'habitude. Elle rend manifeste la nature volontaire, et l'origine consciente de certaines perceptions passées à l'état d'inconscience et d'automatismes (Maine de Biran).

Note liminaire

J'ai tenu à conserver à cet exposé l'allure d'une conversation détendue, non académique, comme il sied à un cours d'été. Je n'ai pas cherché non plus à éliminer les répétitions qui se présentent naturellement dans un exposé oral et didactique.

Origine du propos

J'aimerais vous entretenir de questions qui ne sont pas, en règle générale, abordées dans la formation du futur professeur de mathématiques et qui me semblent pourtant essentielles; c'est là, à mon sens, le reproche majeur qu'il faut adresser à la corporation. Les observations sur lesquelles se fonde ce propos proviennent de mon passé d'étudiant, de ma pratique de professeur de lycée, de discussions avec des collègues, de mon expérience de père de famille; elles ont aussi leur origine dans mon travail d'historien et d'épistémologue des mathématiques. Il s'agit donc d'un exposé non académique, plutôt égocentrique et lié à un vécu.

Le constat de départ est le suivant : à de rares exceptions près et à quelque niveau qu'ils travaillent, les enseignants ne traitent guère des enjeux et de la finalité de la matière dispensée. Les blocages et difficultés que j'ai éprouvés dans l'acquisition de concepts nouveaux - je m'en suis aperçu plus tard et j'ai fait depuis la même observation chez nombre de mes élèves - résidaient dans un manque d'informations ressortissant précisément à ces catégories. L'analyse de la genèse et du développement des théories mathématiques fournit des indications qui sont susceptibles d'éclairer l'enseignant sur les obstacles rencontrés par ses élèves: les exemples sont multiples et je citerai dans le champ élémentaire : les nombres négatifs, les nombres complexes, le calcul littéral, la géométrie élémentaire.

J'ai choisi de parler de l'axiomatique parce que son histoire est exemplaire pour la perspective dans laquelle je me place ici. La méthode axiomatique, sa genèse et sa place dans l'enseignement permettent de mettre en scène quelques problèmes importants touchant la didactique de cette discipline.

Dans la vie des hommes, lorsque des idées naissent, c'est le plus souvent par nécessité: comme le notait déjà un auteur de la fin du 5e siècle avant JC dans un admirable texte que nous a

conservé le commentateur Diodore de Sicile : la loi générale est que l'homme n'apprend rien que par nécessité. Ayant appris, il oublie en général les conditions qui l'ont contraint d'apprendre: la nécessité qui avait mené vers une certaine théorie a disparu. Si l'analyse des motivations fondatrices n'a pas été envisagée, l'enseignant s'expose au danger de présenter des choses qui ont perdu leur sens. Il arrive aussi que la nécessité historique, qui a présidé à la mise en place d'un corps de doctrine ne coïncide plus avec les raisons de son exploitation pédagogique; c'est flagrant dans le cas de la méthode axiomatique.

Il y a différents ordres de raisons qui justifient l'introduction de concepts et de théories dans l'enseignement :

- pragmatiques, liées à des applications pratiques;
- didactiques, soit que l'on songe à des développements théoriques, soit que l'on ait en vue leur aspect formateur (apprentissage de la pensée déductive etc.);
- historiques: fruits d'une nécessité relative, ils sont parfois maintenus en vie artificiellement, par la seule force de l'habitude. Certains continuent néanmoins à jouer un rôle intéressant dans le cursus. Pour d'autres, c'est de l'acharnement thérapeutique. On enseigne alors dans la joie et l'allégresse des pratiques dont plus personne ne connaît l'origine, la situation historique qui en légitimait l'introduction. Le meilleur exemple est peut-être constitué par les constructions géométriques, monstre sacré de l'enseignement de la géométrie jusque vers les années 1965 (note 1).

Les considérations qui précèdent s'appliquent particulièrement bien à la méthode axiomatique, qui a fécondé - ou envahi, selon le point de vue - toutes les mathématiques. Il convient de noter que notre long commerce avec elle nous fait oublier qu'elle a une histoire, qu'il a fallu quelque cinq millénaires de réflexion et de labeur pour y accéder. Les nécessités à la base de son introduction se sont estompées, elle est devenue une habitude plutôt que le fruit d'un choix délibéré. Les raisons, dispensées avec parcimonie, pour justifier la présence de la méthode axiomatique - qui n'est rien moins que naturelle - dans les programmes et sa place dans la pratique du mathématicien, ont de lointains rapports avec celles qui ont gouverné son émergence, dans l'épaisseur de l'Histoire, et ce qui était alors obligation est devenu norme. Si le jeune se soumet volontiers une nécessité justifiée, il se cabre devant l'arbitraire et le principe d'autorité. De surcroît il est loisible de penser qu'il rencontre dans son apprentissage des difficultés voisines de celles qui ont freiné la marche de l'Humanité. La connaissance de la situation historique peut aider le maître à faire passer le message. Un peu comme si, à l'image de ce que l'on a cru vrai pour le monde animal, l'ontogenèse récapitulait la phylogenèse.

On aurait tort d'imaginer un savant du 19^e, un beau matin se levant et s'exclamant : je suis en forme, le moment est venu, créons l'axiomatique moderne. Non! Les choses se passent d'une manière plus prosaïque! J'aimerais montrer dans cet exposé de quelle façon, pour répondre à quelle nécessité, pour dissiper quels ennuis épistémologiques l'axiomatique moderne est née, entre 1830 et 1900. La pratique de l'axiomatique, familière à tout mathématicien, ne met pas en évidence les problèmes philosophiques sous-jacents, qui sont pourtant à la base même de cette méthode et c'est d'eux que je vous entretiendrai d'abord.

Préalablement, il convient d'indiquer les principales caractéristiques épistémologiques et métaphysiques de l'axiomatique, son objet, sa nature. La méthode axiomatique constitue une manière particulière de parler des entités mathématiques et de leurs relations. Elle fournit une réponse singulière aux deux problèmes centraux de l'épistémologie de la géométrie :

- a) le premier a trait au statut ontologique des entités; celles-ci, au lieu de voir leur existence donnée dans une intuition au contour mal dessiné ou d'être construites selon des règles ad hoc, sont définies implicitement, par l'intermédiaire des propositions qu'elles sont sensées satisfaire;
- b) le second concerne le problème de la vérité : les axiomes sont des propositions arbitraires, assujetties seulement à la consistance logique.

Vérité

On ne le dit guère en nos milieux tant la chose va de soi, mais la condition du travail de scientifique et d'enseignant, la pierre de touche de toutes nos démarches, c'est la vérité. Le

critère le plus immédiat du vrai est l'évidence; est vrai ce qui résulte de l'accord de deux idées, ou de l'accord d'une idée et d'un fait. Quand les idées se rapportent à des êtres et qu'elles expriment certaines de leurs propriétés se pose de suite la question du statut ontologique de ces êtres, de leur mode d'existence. Les modes d'existence ressortissent en gros à deux catégories, avec toutes sortes de nuances :

- la catégorie du sensible, les êtres étant des copies de choses du monde extérieur;
- la catégorie de l'intellect, les êtres étant soit fournis par l'intuition comme des "semences de vérités jetées par la Nature en nos âmes", soit engendrés par une définition formelle.

Pour les représentants des tendances dites constructivistes, les concepts fondamentaux des mathématiques sont créés par les définitions plutôt que donnés en soi (pour plus de détails, voir par exemple Jean Largeault, *L'intuitionisme*, QSJ, PUF, p.23).

L'attitude la plus habituelle devant le problème de la vérité est celle de l'homme d'action : est vrai ce qui nous semble tel. On a de la vérité une vision claire et immédiate; l'adéquation à l'univers est bien la preuve que cela marche, alors, pourquoi se demander pourquoi? Il arrive que l'idée soit une copie conforme, modulo la déformation sensorielle, du phénomène (exemple : pierre qui tombe). Un examen sommaire nous invite à croire qu'il en va de même pour la géométrie. La suite de cet exposé devrait montrer que cela n'est pas si simple.

Pour des raisons de curiosité intellectuelle, mais aussi parce qu'on est d'autant plus à l'aise que l'on comprend l'origine et la nature des objets avec lesquels on travaille, il est bon de dépasser cette douce quiétude. L'analyse profonde des choses qui vont de soi livre souvent des résultats inattendus, parfois désécourants, la croyance dans l'évidence est un oreiller bien agréable. Il sort toujours de ces remises en question une vision plus précise et plus lucide du champ dans lequel on oeuvre. Tout enseignant devrait, me semble-t-il, s'adonner une fois ou l'autre à cette réflexion de saine hygiène.

Notre enquête tourne donc autour de notions telles le vrai ou l'existence, qui appartiennent de plein droit à l'épistémologie et à la métaphysique; on quitte le plan rassurant de la technique mathématique, pour se déplacer vers un domaine devant lequel le mathématicien se sent désarmé.

Existence

L'épistémologie des mathématiques a mis bien du temps à jeter un peu de lumière sur ces questions obscures et décisives. Il n'est pas exagéré d'affirmer que la plupart des grandes révolutions mathématiques ont gravité autour de problèmes épistémologiques, essentiellement des problèmes d'existence, et que les blocages qui ont obstrué pendant longtemps l'accès aux contrées nouvelles sont de type épistémologique. Citons quelques responsables de ces blocages, en vrac : nombres négatifs, nombres complexes, quaternions, théorie des ensembles, géométrie non euclidienne, existence de fonctions continues à nulle part dérivables etc. En ce qui regarde l'existence, on trouve chez les mathématiciens tout le spectre des nuances. J'en donne ici quelques exemples, simplement pour fixer les idées.

Pour les représentants des tendances dites constructivistes, les concepts fondamentaux des mathématiques sont créés par les définitions plutôt que donnés en soi (Largeault p.23).

Pour d'autres, la logique ne peut jamais être un principe d'être, elle ne peut pas servir à créer de objets ni des états de choses mathématiques là où il n'y en a pas. La déduction logique ne contient aucune réalité; du moins si elle en recouvre une, celle-ci est indépendante de la déduction et vient d'une autre source. (Largeault p.31)

Chez Aristote, les objets de la science viennent avant la science. Ils existent en puissance dans le sensibles "dont ils ne sont pas séparables ontologiquement, bien qu'ils puissent en être isolés par l'abstraction et conçus par l'intellect"; ils renvoient donc à une "nature".

L'une des positions extrêmes est celle que l'on qualifie de platonicienne; aux yeux de ses partisans, les entités mathématiques existent en dehors de l'esprit qui les pense, un peu à la manière de la grenouille étudiée par le zoologue.

Une variante de cette attitude est celle de certains néo-platoniciens. Pour Proclus, par exemple, les apparences mathématiques sont des productions originales de l'esprit. Les définitions que le géomètre imagine, il ne les fait pas dériver des objets sensibles; au contraire, ce sont plutôt les objets qui sont créés par ces concepts. Ces objets sont des créations de l'esprit qui, pour ainsi

dire, enfantant les formes, répand sa progéniture immatérielle dans les régions sombres et agitées de la matière.

Dans la première épistémologie de la géométrie, la question de savoir si les entités existent en soi ou seulement en vertu de nos conceptualisations n'occasionnait pas de difficulté : le géomètre tenait en effet vérité et existence pour objectives.

Les deux textes suivants, empruntés à des mathématiciens connus et de la même génération, montrent le contraste entre deux positions extrêmes relativement au problème des fondements.

Béla Kerekjarto, Les Fondements de la géométrie (1937, p.9) :

Tout système, clos et non-contradictoire, prend le caractère géométrique du fait même que les éléments, les relations fondamentales et les axiomes répondent immédiatement aux objets de notre intuition et aux rapports intuitifs existant entre eux. (...). Les axiomes fondamentaux doivent être des "vérités" comprises sans effort par un public dépourvu de formation mathématique.

Henry George Forder, The Foundations of Euclidean Geometry, (1927, p.5) :

In our deductions it is not necessary, though it may be helpful, to have in mind *any* interpretation. We may pretend we are just playing a game, deducing in accordance with logical laws propositions containing terms which do not have assigned definite meanings, from Axioms of the same sort. This is the formalist view. The game will be worth our playing if it has an interpretation which is interesting in itself.

Les brèves citations qui suivent sont de la plume de grands mathématiciens; elles illustrent avec bonheur la variété des réponses à ces questions épistémologiques :

Charles Hermite (1822-1901) : en mathématiques on est davantage serviteur que maître; autrement dit, le géomètre n'a guère de liberté face aux entités que lui fournit l'intuition.

Pour Georg Cantor (1845-1918), l'essence des mathématiques réside dans leur liberté, celle-ci n'étant limitée que par des exigences de cohérence.

L'importante querelle qui, au début de notre siècle, divisa les mathématiciens en deux clans, et que l'on baptisa la crise des fondements, est l'un des meilleurs révélateurs qui soit. La pomme de la discorde - l'axiome du choix - était une proposition d'apparence innocente, utilisée souvent à leur insu par les géomètres. Jacques Hadamard (1865-1963), dans sa préface à un livre de Gonsseth (Les fondements des mathématiques, Paris, 1926, p. VI) notait à ce propos :

Ce n'est pas sans un vif étonnement que plusieurs d'entre nous se sont trouvés sur des points d'évidence, en somme, des opinions complètement divergentes, les uns "idéalistes", pour lesquels "l'axiome du choix" était aussi clair que l'égalité de deux choses égales à une même troisième ou le principe d'identité, les autres "empiristes", pour lesquels la chose était parfaitement claire et immédiatement jugée ... en sens contraire, rien ne leur paraissant imposer à la raison humaine l'axiome en question. Pour ma part, j'ai fait à ce moment-là d'extraordinaires retours sur tout ce que l'on m'avait appris, dans ma jeunesse, de Philosophie et, particulièrement, de Métaphysique.

Géométrie

C'est la géométrie qui est la terre natale de la première axiomatique des Grecs et de l'axiomatique moderne des années 1880.

La technique des harpédonaptes (tendeurs de cordes) des civilisations anciennes est bien connue. Elle nous montre des constructeurs utilisant cordes et pieux pour délimiter l'assiette d'un édifice et pour aider à son érection; ces instruments sont clairement engagés dans des opérations que l'on qualifierait de géométriques : Il s'agit d'une sorte de géométrie physique. Mais ses limites apparaissent dès lors que s'intellectualisent les questions; comment, en effet, y parler de parallèles, comment envisager un théorème relatif à des droites concourantes, à une tangente? La prochaine étape dans la marche de la géométrie exige une révolution intellectuelle qui culminera dans les "Eléments" d'Euclide. Dans la phase que je vient d'évoquer, on ne pose guère que les problèmes qui s'expriment dans la langue physique existante : on explore un

champ lié à certaines pratiques et l'on y est plus ou moins habile. Mais dès qu'on la développe, la géométrie physique demande à ce que l'on travaille avec des entités qui n'existent plus dans la Nature. Par exemple, la notion de parallèle est non seulement incompatible avec le cosmos fini des aristotéliens, mais échappe à toute possibilité de vérification expérimentale, de construction. A strictement parler elle est par essence étrangère à toute géométrie physique.

Pour fixer les idées, examinons les diverses façons qui permettraient d'avoir une quelconque idée intuitive du point. D'ordinaire on imagine une boule dans le monde des choses et on fait tendre son rayon vers zéro : le point est la limite obtenue. Mais qu'est-ce que cette limite? Si on envisage la question en se plaçant sur le territoire du bon sens, la limite est une chose mal définie et vague, qui en fait n'existe pas; si, au contraire, on prend le mot dans son sens mathématique, il faut aussitôt quitter le monde extérieur; on ne peut en effet pas définir une limite sans un appareillage conceptuel élaboré et purement intellectuel. Plaçons-nous ensuite dans le monde mathématique et admettons d'abord - mais sur quelle base? - qu'il existe une sphère dont on ait une idée intuitive; dira-t-on que l'on fait tendre son rayon vers zéro, et l'on définit le point à partir d'un nombre? La seconde possibilité est de faire tendre le segment qui représente le rayon vers ... un point! C'est inextricable.

En d'autres termes: la pratique des harpédonaptes et les *Eléments* d'Euclide appartiennent à deux univers différents réunis par une frêle passerelle; l'image qui convient mieux ici est celle de deux continents, primitivement réunis, qui se détachent l'un de l'autre sous l'action de forces internes à l'oeuvre dans les profondeurs.

Dans les "Eléments", les deux caractéristiques du nouveau monde sont explicitées, en tout cas clairement visibles : les entités géométriques sont de pure raison et le mode de présentation appartient à la famille axiomatique (voir note 2). Ce qu'on lit dans cet ouvrage c'est l'acte de naissance de la cassure; on le lit dans la définition des entités, dans la volonté de ne pas recourir à des arguments qui ressortiraient à la géométrie physique, quand bien même cela aurait été plus simple. On observe, remarquons-le, une évolution semblable dans l'édification de la physique: les idées de base de la mécanique force, vitesse, travail sont au début de grossières copies d'impressions quotidiennes, puis leur intégration à un système déductif nécessite une épuration, une idéalisation, mais cette idéalisation est déformante. C'est cette déformation qui est à l'origine des intuitions fausses que l'apprenti physicien éprouve quand il manipule ces concepts et c'est encore cette déformation qui est responsable des confusions du philosophe quand il parle de physique alors que l'accès à la description mathématique lui est interdite.

Mais Euclide n'a pas la technique de son épistémologie et l'oeuvre pêche principalement, dans la perspective où nous nous plaçons ici, par des recours inconscients à l'intuition spatiale, en fait aux figures.

Chez lui, les deux continents paraissent encore — mais c'est déjà une illusion — assez proches l'un de l'autre pour que des échanges visuels aient lieu. Les habitants de la nouvelle terre garderont à l'esprit les coutumes anciennes, même s'ils croient s'en être libérés. Les objets fondamentaux ne sont pas encore les êtres de raison fixés par une définition implicite comme chez David Hilbert (1862-1943) (voir note 2), tout en n'étant déjà plus les cordes et les pieux des harpédonaptes. On y voit des traits modernes mêlés à un ensemble de caractères archaïques témoins de l'origine matérielle de la géométrie. Dans ces conditions, doit-on s'étonner qu'en l'absence de toute critique épistémologique, de toute étude historico-critique, élevé dans l'esprit des deux continents confondus, le professeur de géométrie soit la victime de l'illusion ancienne où la théorie parle de mondes distincts et la pratique agit dans des univers confondus?

Voici deux images destinées à préciser ce point de vue. Avant l'avènement de l'axiomatique moderne, le géomètre est comparable au nageur débutant, qui flotte par moment, mais qui, l'espace d'un instant, pose son pied sur le fond, juste de quoi restaurer un équilibre devenu précaire. Ou encore à celle du cétacé qui évolue librement sous l'eau à condition de regagner la surface à intervalles réguliers.

Là réside l'ambiguïté fondamentale: faire comme si la géométrie était une construction abstraite tout en recourant, chaque fois que nécessaire, à la géométrie physique, à l'intuition spatiale diraient certains. Cette ambiguïté est omniprésente dans l'enseignement de la géométrie élémentaire et elle empoisonne les relations maître-élève. La situation est rarement rationalisée par l'enseignant; quand il demande une démonstration à ses élèves le niveau de rigueur exigé est arbitraire : il leur refuse ce qu'il se permet par ailleurs. Il pense comme si la géométrie était abstraite et il se comporte comme si c'était une science physique.

L'épistémologue français Robert Blanché a trouvé l'expression juste lorsqu'il écrit dans L'axiomatique (PUF, Paris, 1970, p.14) :

On voit alors se dissocier les deux aspects de la vérité géométrique, jusque-là intimement mêlés dans une union étonnante. Un théorème de géométrie était à la fois un renseignement sur les choses et une construction de l'esprit, une loi physique et une pièce d'un système logique, une vérité de fait et une vérité de raison.

Fondement de la certitude

Pour assurer sa démarche le géomètre doit disposer de propositions garanties comme vraies. Mais où trouver cette garantie? Traditionnellement on a cru la voir dans leur caractère d'évidence : être évident c'était apparaître comme une vrai par une sorte d'intuition immédiate, indiscutable, irrésistible. Cette croyance, qui est d'ordre psychologique et métaphysique, est subordonnée à l'idée d'une intersubjectivité : tous les hommes normaux ont la même intuition spatiale, laquelle s'appliquerait encore aux nouvelles entités de la géométrie abstraite. Lorsqu'il s'agit de géométrie abstraite, à quelle aune mesurer cette évidence. Ces entités n'existant à nulle part, comment parler de leurs propriétés? Admettre que ce sont des "semences de vérités" jetées en nos esprits, que l'âme a un instinct géométrique? Ce cercle que vous supposez exister qu'est-il s'il n'est plus ce cerceau épuré et dépouillé de ses qualités sensibles? Si on considère la géométrie comme réalisée dans le monde des choses on a des ennuis tout aussi graves : affirmer l'égalité des angles droits est un acte de foi fondé sur un malentendu et admettre l'existence de parallèles une absurdité. D'un côté comme de l'autre, c'est mal barré. L'exemple suivant illustre bien ces propos. Il s'agit du théorème 2 du livre 1 des "Eléments" d'Euclide. Après avoir enseigné au théorème 1 la construction (est-il besoin de rappeler que, dans notre langage, les constructions s'exécutent "règle et compas") du triangle équilatéral, l'auteur grec se propose de nous apprendre à reporter des segments; plus précisément, il propose de "placer en un point donné, une droite égale à une droite donnée." Demandons-nous comment on procéderait à cette construction dans la géométrie physique. Voici : ayant adopté une ouverture de compas égale à celle du segment BC, on place la pointe fixe de l'instrument en A et on décrit un cercle dont le rayon est l'ouverture choisie; le point L, intersection du cercle et de la droite donnée est la solution cherchée. Au premier abord, on ne saisit pas pourquoi cette construction ne satisferait pas Euclide et en quoi elle serait en contradiction avec ses canons. Souvenons-nous pourtant que, chez lui, il n'est pas question d'instrument mais d'application de postulats. Les postulats qui, pour l'essentiel décrètent l'existence de la droite et du cercle, ne sont qu'imparfaitement traduits par la règle et le compas; ils en fournissent au mieux une expression métaphorique. Ainsi, il faut fermer le compas avant de le déplacer dans le plan. Comment faire admettre la chose à des élèves qui ignorent ces subtilités épistémologiques? D'autant qu'Euclide a bien eu recours au mouvement (dans la démonstration du théorème I.4 relatif à un cas d'égalité de triangles; de même, la congruence est introduite par un axiome qui nécessite que l'on fasse coïncider deux figures). La solution qu'il propose est tout autre et révèle bien l'esprit des "Eléments". En lisant la succession des opérations il s'agit d'avoir présent à l'esprit que chaque étape, aussi évidente soit-elle, est justifiée minutieusement (pour le détail, voir Vitrac, p.197, réf. en note 2). On construit dans l'ordre : le triangle équilatéral ABD, le cercle de centre B et de rayon BC, qui donne le point G; le cercle de centre D et de rayon DG, qui donne L, point cherché.

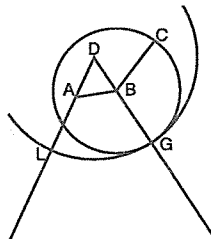


Figure 1

Le passage d'une géométrie à l'autre s'accompagne d'un changement du statut de la vérité, mais cela se fait en catimini et en partie à l'insu des protagonistes. C'est là le lieu du malentendu fondamental et je ne suis pas sûr qu'il soit complètement dissipé aujourd'hui, même chez ceux qui ont charge d'enseigner la géométrie. Leurs exigences de rigueur fluctuent au gré des situations et semblent arbitraires au patient.

En ce qui regarde le problème du statut de la vérité et de l'existence, on rencontre une situation comparable dans d'autres domaines des mathématiques. Considérons par exemple la théorie des groupes et plaçons-nous d'abord dans une perspective purement formelle. Les signes qui fixent les êtres sont vides de réalité objective, ils ne représentent rien au-delà d'eux-mêmes. Quand on écrit : $a \in G$, qu'est-ce que a ? Qu'est-ce à dire : un groupe, ça existe? Ça doit bien exister puisque des livres entiers sont remplis de leurs propriétés! Qu'est-ce à dire, telle propriété est vraie? Existence et vérité : langage de l'être, langage des propositions, on est en pleine métaphysique.

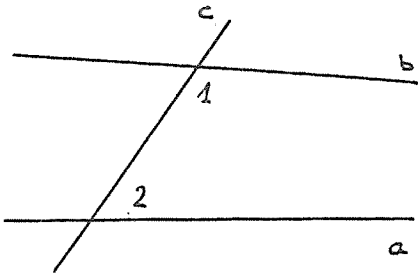
Il arrive aussi qu'un système formel admette une réalisation dans le monde des objets mathématiques. Il semble alors que le degré d'existence des entités qui le forment soit supérieur à celui des simples signes. Pour d'autres, le nombre, l'espace, ont une réalité en soi et sont le produit de notre intuition, leur existence rend vraie les propriétés qu'on leur découvre. C'est la vérité sémantique par opposition à la vérité syntaxique.

La théorie des parallèles

L'histoire de la théorie des parallèles est un excellent révélateur de ces ambiguïtés, de ces confusions et de cette épistémologie débile. Il n'est pas exagéré de dire que si tant de bons ou de très bons mathématiciens se sont achoppés à cette question et si certains d'entre eux ne surent pas reconnaître ce qu'ils avaient si bien découvert (par exemple Saccheri, Lambert, Legendre, Fourier), il faut en chercher la raison dans une approche inadéquate des idées de vérité et d'existence.

Epistémologiquement parlant, la théorie des parallèles est un lieu privilégié; à nulle part on ne ressent aussi bien la nécessité à la fois d'une épistémologie différente et d'une conception nouvelle de l'axiomatique. Je présente ici quelques épisodes de cette histoire; ils ont été choisis parce qu'ils illustrent avec bonheur les considérations précédentes, non pour leur intérêt mathématique intrinsèque.

Voici pour commencer l'énoncé du postulat des parallèles - proposition que je noterai P - tel qu'on le trouve chez Euclide : Et que, si une droite tombant sur deux droites fait les angles intérieurs et du même côté plus petits que deux droits, les deux droites, indéfiniment prolongées, se rencontrent du côté où sont les angles plus petits que deux droits (voir note 2).



P

$$\alpha + \beta < 180^\circ \Rightarrow a \parallel b$$

Fig. 2

Les angles 1 et 2 font ensemble moins de 180° ;
les droites a et b se coupent

Je rappelle que les géomètres ont volontiers substitué à l'énoncé de P la forme équivalente aussi dite axiome de Playfair : par un point extérieur à une droite on peut faire passer exactement une droite qui lui est parallèle.

Dès Euclide, ou en tout cas chez ses successeurs, on tint cette proposition pour insuffisamment évidente, d'où une profusion déraisonnable d'essais de démonstrations; dont la réunion offre le visage d'un authentique bazar. Interrogeons-nous sur le sens de cette phrase : le postulat des

parallèles est évident. Dans le monde des choses, ou, si on préfère, dans la géométrie physique, nous l'avons vu, l'idée de droites parallèles n'a pas de sens : sa vérification défie toute expérience. On se voit mal, à la vérité, chevauchant un rayon de lumière pour examiner si on rencontrera, par hasard et un beau jour, tel autre rayon de lumière, parti dont ne sait où, dirigé par on ne sait qui, peut-être par une autre lancier. Si on les considère ensuite comme des entités abstraites conçues par l'entendement, on peut envisager ces parallèles librement et les doter de propriétés diverses et contradictoires. On saisit bien comment, dans cette perspective, le statut d'évidence perd sa signification. Mais cette simple observation a échappé deux millénaires durant aux meilleurs esprits, qui ont tenté en vain de démontrer la proposition litigieuse, écrivant par la même occasion des pages qui comptent parfois parmi les plus cocasses de l'histoire des mathématiques tout entière. De la crise épistémologique enfantée par cette quête devait sortir la nécessité d'une axiomatisation de la géométrie et en même temps les premières caractérisations précises de l'axiomatique.

On sait que la géométrie non euclidienne (aussi qualifiée d'hyperbolique) est le système de propositions que l'on obtient en raisonnant à partir de la négation du postulat des parallèles et des autres postulats posés par Euclide. Ainsi et curieusement, raisonner par l'absurde pour établir P revient à faire de la géométrie non euclidienne. Toutefois, ceux qui procèdent de la sorte sont à la recherche d'une proposition reconnue comme absurde et qui mettra un terme à la chaîne des déductions. Le point crucial de ce processus réside dans le statut même de l'absurde. Pour la première épistémologie de la géométrie, l'absurdité résidera le plus souvent dans un conflit avec des propositions que l'on considère comme vraies intuitivement, comme vraies par leur évidence même; on se heurte alors aux difficultés évoquées plus haut.

Etant donné que le théorème sur la somme des angles du triangle se démontre d'ordinaire par un recours direct à l'unicité de la parallèle, on s'attend à ce que la négation de cette unicité conduise à une proposition autre. Et en effet, on établit ceci : la négation de P entraîne que, dans chaque triangle, la somme des angles est inférieure à deux droits; il s'ensuit l'existence pour chaque triangle d'un nombre réel, le déficit, défini comme la différence entre deux droits et la somme de ses angles. Il est facile de voir que ce déficit est une fonction additive dans le sens suivant : si on partage un triangle en deux par une ligne passant par l'un de ses sommets, le déficit du triangle donné est égal à la somme des déficits des deux petits triangles (voir figure 3). Un corollaire intuitif immédiat est que le déficit est proportionnel à l'aire du triangle, ce qui à son tour implique l'existence d'un triangle plus grand que tous les autres, le déficit étant borné.

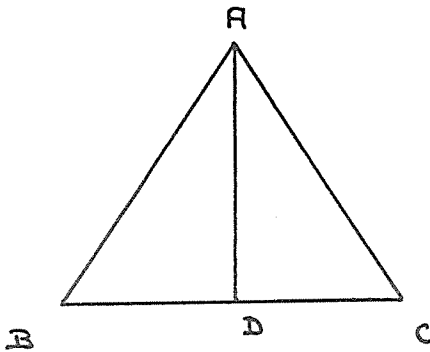


Figure 3

triangle ABD = triangle ADC
 aire (ABC) = 2. aire (ABD)
 $d(ABC) = d(ABD) + d(ADC) = 2.$
 $d(ABD)$

Une telle conséquence a bien sûr été tenue pour absurde et par la même occasion on a cru avoir démontré P. Or où réside cette absurdité? Dans la géométrie physique on n'en sait trop rien, puisque nous habitons un petit canton de l'univers; pareil dans la géométrie abstraite : pourquoi cette proposition qui est vraie sur la sphère ne le serait-elle pas dans le plan conceptuel du géomètre. La meilleure preuve de cette impossibilité où nous sommes de trancher se trouve dans l'ignorance où sont les astronomes aujourd'hui de la structure géométrique de l'univers, respectivement dans la possibilité avérée d'une géométrie hyperbolique cohérente.

Voici un autre exemple du même type, d'ailleurs lié au précédent. La comparaison amorcée tout à l'heure avec la géométrie sphérique laisse déjà entrevoir l'existence, dans l'hypothèse hyperbolique, d'une unité absolue de mesure pour les longueurs, quelque chose de comparable au rayon pour la sphère. Ce pressentiment est confirmé par l'analyse simple de la variation de longueur d'un côté dans un quadrilatère de Lambert (voir figure 4 : les angles vont en décroissant à partir de l'angle 1 et semblablement les côtés).

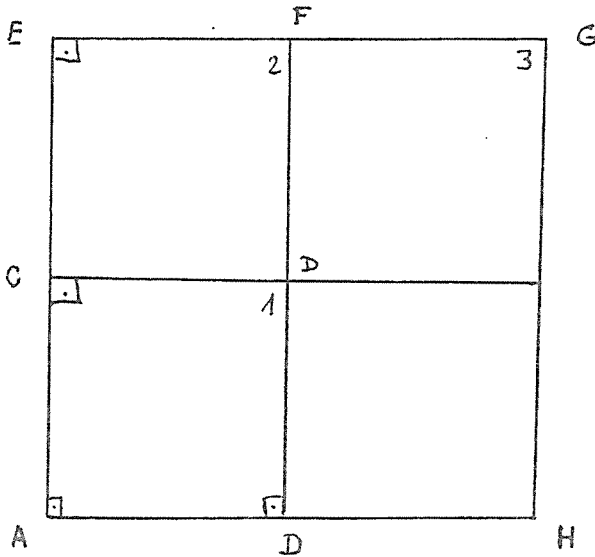


Figure 4

A propos de ces absurdités, l'attitude des savants varie de l'un à l'autre, ce qui apporte la preuve de l'aspect psychologique de la chose. Les plus lucides rechignent à trouver dans ce genre de propositions une absurdité et le plus lucide d'entre eux, Carl Friedrich Gauss (1777-1855), n'hésite pas à les tenir pour possible, mais simplement en désaccord avec nos habitudes; la lettre que Gauss adresse à Wolfgang Bolyai (1775-1856) le 16 décembre 1799 ne laisse pas d'être claire :

Je suis parvenu à plusieurs résultats que d'aucuns auraient tenu pour une démonstration mais qui à mes yeux ne démontre strictement RIEN. Ainsi, si l'on pouvait établir l'existence d'un triangle rectiligne dont l'aire est supérieure à chaque aire donnée, alors je serais en mesure de démontrer toute la géométrie d'une manière complètement rigoureuse. La plupart admettraient cette proposition comme un axiome; moi pas. Il serait bien possible que si distants les sommets soient-ils les uns des autres, l'aire demeure en-deça d'une certaine limite. J'ai plusieurs propositions de ce type, mais je ne trouve en aucune quelque chose de satisfaisant.

Que les meilleurs mathématiciens aient erré en cette matière en dit assez long sur sa complexité et l'on est souvent effaré par le contraste entre la virtuosité de leur technique et la pauvreté de leur épistémologie.

Pour donner une idée de la confusion qui règne, je présente deux démonstrations erronées. La première est du mathématicien genevois Louis Bertrand et remonte aux années 1780; elle a été citée et commentée à maintes reprises. Le grand analyste Adrien Marie Legendre (1752-1833), à qui on doit le traité de géométrie le plus célèbre du 19^e, après l'avoir "améliorée", la prônait encore à la fin de sa carrière. Bertrand compare d'abord du point de vue de l'extension, un angle et une bande. Etant donné qu'un nombre fini d'angles égaux (n si l'angle est de $360 : n$) suffit à paver le plan, alors qu'il faut une infinité de bandes, on en déduit que l'angle est plus grand que la bande. Raisonnons par l'absurde et supposons maintenant que dans la situation de

la figure suivante la droite a ne coupe pas b (il suffit de considérer le cas particulier où l'un des angles est droit) (figure 5). Dans ce cas il faudrait admettre que l'angle 1 soit entièrement contenu dans la bande b, c ; en contradiction avec ce qui a été dit de leur extension respective. Dans la première épistémologie, celle de l'évidence, on est bien emprunté pour évaluer un tel raisonnement. Que tant de bons mathématiciens l'aient présenté comme le nec plus ultra dit assez l'état de confusion auquel je faisais allusion!

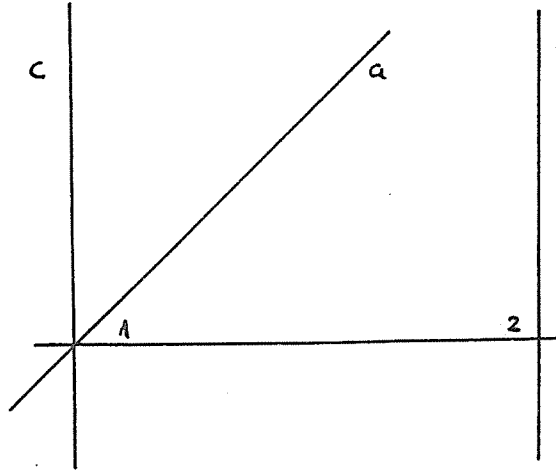


Figure 5

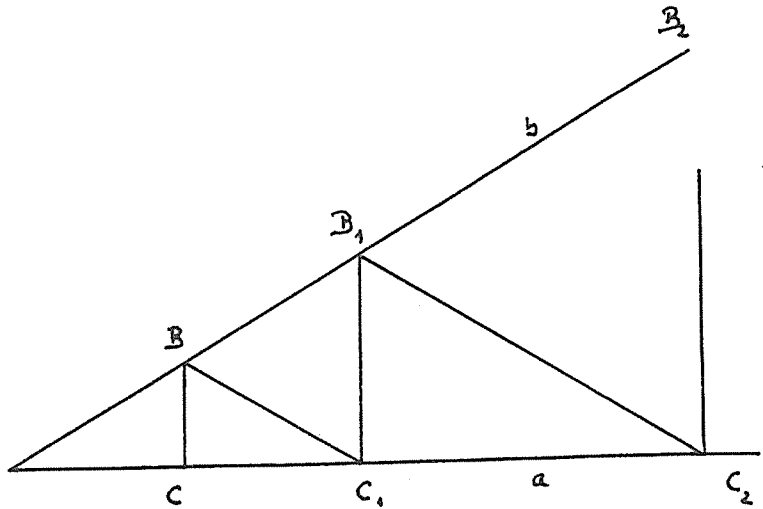


Figure 6

La seconde remonte à Legendre et met parfaitement en lumière les difficultés que l'on a de fonder la géométrie sur une prétendue intuition spatiale. Soit un angle aigu de sommet A (figure 6), de côtés a, b . Sur l'un de ses côtés on prend B , puis la projection C de B sur l'autre côté; puis C_1 tel que $AC = CC_1$; on appelle B_1 l'intersection de la perpendiculaire à a par C_1 avec b . On répète la construction autant de fois que nécessaire. Notons $d(ABC)$ le déficit du triangle ABC et posons $d(ABC) = d$. Grâce à l'égalité des triangles ABC et BCC_1 , et ainsi de suite, et en utilisant le théorème d'additivité du déficit on écrit :

$d(AB1C1) > 2d$; $d(AB2C2) > 4d$ etc. On aboutirait alors, après un nombre suffisant d'étapes et si l'on admet $d = 0$, à un triangle $ABn Cn$ dont le déficit surpasserait deux droits, ce qui est impossible.

L'erreur de la démonstration réside dans la croyance tacite en l'existence, tenue pour évidente, d'un Bn pour chaque Cn . Cette proposition n'étant pas un postulat, il y a lieu de la démontrer; or on peut établir que cette démonstration exige P.

Dès l'instant où, par méthode ou par conviction, les évidences se relativisent il n'y a plus de fondements absolus, même pour une discipline comme la géométrie, modèle de certitude. Y a-t-il moyen de sortir du dilemme? Examinons l'affaire de plus près. Une évidence concerne une propriété dont on peut dire avec certitude qu'elle est vraie d'une certaine entité, point, droite s'il s'agit de la géométrie. Cette certitude suppose une connaissance sûre de l'être concerné, elle suppose aussi l'intersubjectivité : dans tous les esprits normaux, il y a isomorphisme entre les intuitions relatives aux êtres mathématiques. Ce qui a été dit plus haut montre assez, je crois, qu'il y a là un double acte de foi, dont la gratuité étonne. Pour sortir de ce mauvais pas, les mathématiciens de la fin du 19e, parmi eux Giuseppe Peano (1858-1932) (pour l'arithmétique) et Hilbert (pour la géométrie) ont imaginé un moyen original. Puisque c'est la "substance" de l'être qui est à l'origine de l'obstacle, il convient de l'en débarrasser. Solution radicale qui a consisté à dépouiller l'être mathématique de toute intuition, de toute individualité; il se volatilise, se dissout en un tissu de relations. C'est dans ce sens qu'Hilbert commence ses *Grundlagen* par la phrase "Nous pensons trois espèces de choses que nous appellerons point, droite, plan ..." ou que Bachelard écrit : "L'essence est contemporaine de la relation." (*Le nouvel esprit scientifique*, 1934 p.22). Gain considérable : les mêmes propositions s'appliquent à des entités que l'ancienne ontologie aurait tenues pour essentiellement différentes. Henri Poincaré (1854-1912) a admirablement exprimé cette nouvelle manière d'envisager l'être mathématique quand il écrivait : la mathématique c'est l'art de donner le même nom à des choses différentes.

Notes

1. Je n'en conteste pas l'intérêt didactique comme moyen de mieux pénétrer dans l'édifice de la géométrie, mais je m'élève contre leur effet pernicieux au plan psychologique, les élèves ayant l'impression d'interdits rituels, fondés dans le seul arbitraire de l'enseignant, lui-même perdu en conjectures quant à la signification profonde de ces exercices.

2. Les Postulats (ou Demandes) chez Euclide (traduction B. Vitrac, *Euclide, Les Eléments*, Paris (PUF), vol. 1, pp.167-175, 1990

1. Qu'il soit demandé de mener une ligne droite de tout point à tout point.
2. Et de prolonger continûment en ligne droite une ligne droite limitée.
3. Et de décrire un cercle à partir de tout centre et au moyen de tout intervalle.
4. Et que tous les angles droits soient égaux entre eux.
5. (voir énoncé p. 10).

Voici un exemple des axiomes de Hilbert (D. Hilbert, *Les fondements de la géométrie* (trad. P. Rossier), Paris (Dunod), 1971, p.14); il s'agit d'axiomes de l'ordre (groupe II), dont le but est de définir la préposition "entre".

II.1 Si un point B est entre un point A et un point C, les points A, B, C appartiennent à une droite et B est aussi entre C et A.

II.2 Deux points A et C étant donnés, il existe au moins un point B appartenant à la droite AC tel que C soit entre A et B.

En accord avec ce point de vue, l'arithmétique abstraite est entièrement coupée des notions fondamentales issues de l'expérience dans laquelle elle trouve son origine et elle est dès lors réduite à une espèce de jeu mécanique joué d'après un ensemble de règles qui, séparées de leur origine, donnent l'apparence d'être parfaitement arbitraires (Hobson, t.1, p.9)

Idées diverses

Sur les principes, voir Vitrac, pp.117ff

Vitrac p.121 Que faut-il entendre par "existence"?

Par là s'explique le caractère absolument premier des principes, car ils ont l'origine à l'extérieur.

80. Flye Sainte-Marie texte de Voelke, p.5 : "c'est effectivement ce qui a lieu, mais ce n'est qu'avec le secours de la théorie des parallèles qu'on sait le démontrer". p.7 : "Mais ce que je veux prouver, c'est que cette certitude ne peut pas se baser sur le raisonnement."

Quoique les ressources du raisonnement soient impuissantes à établir en toute rigueur la théorie des parallèles, l'exactitude de cette théorie ne fait cependant l'objet d'aucun doute.

Existence : sortir de, naître de; n'appartient pas au vocabulaire du latin classique. Pris dans le sens d'une sortie, d'un au-dehors. Mode d'être d'un être qui reçoit son être d'un autre être que lui. Le mot existence souligne la dépendance dans laquelle se trouve l'existant à l'égard de l'être dont il tire son origine. Les Anciens n'avaient pas de mot pour dire l'existence. Couramment, synonyme d'être (avoir une réalité)

Zeitler

Probématique ABC

A. Système axiomatique = règles désignant la marche des "pièces"

B. Système formel = règles à partir desquelles on peut jouer sans pièces

C. Modèle mathématique = on joue avec des pièces et leur forme est variable.

Système axiomatique autonome : A, B, C, axiomes choisis librement

C, A, B système hétéronome, on part d'objets "réels"

Un autre exemple est fourni par la présentation traditionnelle des nombres complexes avec partie imaginaire et réelle, un signe $+$ dans $a + bi$, dont nul ne pouvait dire la signification.

Commençons par dégager de quelques exemples simples les problèmes épistémologiques sous-jacents et par là vous montrer des aspects inhabituels de choses bien connues.

Or on est droit de penser que l'enfant, dans son apprentissage, rencontre des problèmes voisins de ceux qui ont bloqué la marche de l'Humanité.

Mais toujours on doit faire l'hypothèse de ce que la philosophie des sciences nomme l'intersubjectivité.

La géométrie non euclidienne vers 1825, et avec elle l'axiomatique moderne dans les années 1880, est née en réponse à ces difficultés épistémologiques