

----- À PROPOS DE LA CONTINUITÉ -----

- R. BEBBOUCHI -
Institut de Mathématiques
U.S.T.H.B., Alger - ALGÉRIE

Le mot vient du latin *continuus* (cum avec et tenere tenir), ce qui veut dire "qui n'est pas interrompu dans sa durée" (Encyclopédie Quillet 1983). On y trouve aussi les définitions suivantes :

- une grandeur continue est une grandeur qui peut varier pour une valeur aussi petite qu'on le désire comme les longueurs, les surfaces...

- l'espace géométrique, abstraction de l'espace physique, a contribué à forger la notion abstraite de continuité,

- une ligne continue est formée d'une infinité de points juxtaposés sans discontinuité,

- le continu en géométrie est intuitif,

- les fonctions continues admettent une dérivée.

Les deux phrases soulignées vont retenir notre attention.

1 - La continuité de la droite réelle :

En Algérie, au Collège d'Enseignement Moyen, dans le livre de l'enseignant de 6ème année, la leçon 14 a pour but d'expliquer la droite comme ensemble de points. On met des points colinéaires sur le tableau, ensuite des points entre eux et on utilise la règle.

question : sous une forte loupe, comment apparait une droite ?

question : comment peut-on comprendre que $[0,1]$ et $[1993,1993]$ sont des intervalles homéomorphes ?

Cette définition de droite comme ensemble de points tue la notion de coupure et constitue un obstacle sérieux.

a) La construction des nombres réels :

Dans sa théorie des proportions du livre V, Euclide avait tenté de donner un statut aux grandeurs incommensurables. Sur les nombres entiers, on peut voir un historique dans le livre de G. Flegg [1]. Les Arabes calculaient constamment avec des nombres irrationnels (voir les travaux d'Abu Kâmil, d'Al-Karagî, de Thabit Ibn Qurra,...).

Par exemple, on trouve chez El-Karagî des résultats du type :

$$(54) \quad \frac{1}{3} + 2 \frac{1}{3} = (128) \frac{1}{3}.$$

Les Arabes ont fait des nombres irrationnels un objet d'étude théorique et ont étendu la notion de nombre à l'ensemble des nombres réels positifs comme chez El-Farabi (X^e siècle) qui

introduisait la notion de a^c dad samma, nombre sourd (El-Farabi sera traduit par Gérard de Crémone au XII^e siècle).

La théorie des proportions a soulevé des passions : Omar Khayyam, An Nairizi,...Grégoire de Saint-Vincent..., et même de nos jours (n'oublions pas que cela a donné les fractions continues).

A la fin du XVI^e siècle, Simon Stevin intervenait pour faire connaître aux quantités irrationnelles le statut du nombre. Le mot irrationnel le dérangeait.

On n'a qu'à se rappeler l'histoire "bornée" de la quadrature du cercle qui tentait de donner à π le statut de racine d'une équation algébrique, histoire à laquelle mit fin Lindenman en 1882.

Il a fallu attendre 1863, après une tentative infructueuse en 1835 de Bolzano, pour que Weierstrass proposât une théorie des nombres réels (publiée par Kossak en 1872).

Weierstrass part de l'ensemble des nombres entiers positifs ou nuls dont il admet l'existence. Il considère les "parties exactes de l'unité" $1/n$ et définit les nombres rationnels positifs, combinaisons linéaires finies à coefficients exacts des $1/n$. On a ainsi des agrégats :

$$\{ 1/4, 1/4, 1/4, 1/4 \} = 1 ; \{ 3/10, 1/10, 1/10, 1/10 \} = 3/5, \dots$$

On peut aussi considérer des agrégats ayant un nombre infini d'éléments.

Le nombre réel est alors la classe d'équivalence des agrégats pour la relation égalité, satisfaisant le critère :

"un nombre u a une valeur finie s'il existe un nombre v plus grand que u , v étant composé d'un nombre fini d'éléments".

Et on a $\mathbb{R}^+$ avec sa structure algébrique.

En 1872, deux autres théories apparaissent :

- celle de G. Cantor et E. Heine : on prend des suites fondamentales, suites des nombres rationnels vérifiant le critère de Cauchy. Si (x_n) et (y_n) sont deux telles suites, de limites b et b' , on a :

- a) $\alpha \in \mathbb{Q}^+ \exists N \text{ entier; } \forall n \geq N, y_n - x_n \geq \alpha \text{ alors } b' \geq b.$
- b) $\alpha \in \mathbb{Q}^+ \exists N \text{ entier; } \forall n \geq N, -\alpha \geq y_n - x_n \text{ alors } b \geq b'.$
- c) $\forall \alpha \in \mathbb{Q}^+ \exists N \text{ entier; } \forall n \geq N, |y_n - x_n| \leq \alpha \text{ alors } b \mathfrak{R} b'$

L'ensemble des suites fondamentales quotienté par la relation $\mathfrak{R}$ nous donne les nombres réels.

- celle de R. Dedekind, conçue en 1858 et publiée en 1872 :

c'est avec les coupures (C_1, C_2) de $\mathbb{Q}$, i.e. une partition de $\mathbb{Q}$ en deux classes C_1 et C_2 , non vides et disjointes, telles que tout nombre de C_1 soit strictement inférieur à tout nombre de C_2 .

Si l'une des deux classes admet soit un plus grand élément, soit un plus petit élément, la coupure détermine un nombre rationnel. Mais il existe des coupures n'ayant pas cette propriété et Dedekind exhibe l'exemple : C_1 est l'ensemble des rationnels x tels que x^2 soit inférieur ou égal à 2 et C_2 est l'ensemble des autres rationnels ; $a = \sqrt{2}$ crée la coupure (C_1, C_2) et est irrationnel.

Dedekind définit une relation d'ordre entre les coupures et vérifie que l'ensemble $\mathbb{R}$ des coupures est un corps totalement ordonné.

En 1869, on a aussi une construction de Charles Meray, assez proche de celle de Cantor.

b) Réactions :

On voit qu'avec ces constructions, on touche le domaine de l'infini, oh combien tabou ! En effet, pour le fini, on peut numéroté, repérer, comparer : c'est dénombrable. Pour l'infini, c'est une autre histoire.

Parmi les réactions violentes, on cite celle de Kronecker qui a traité Cantor de charlatan ; il ne voulait même pas entendre parler d'autre chose que les entiers naturels "créés par Dieu" et a déclaré, par provocation : " π n'existe pas" lorsqu'on lui apprit que Lindenman avait prouvé la transcendance de ce nombre.

Même Poincaré considérait la théorie des ensembles comme une "maladie". De nos jours, que d'étudiants n'arrivent pas à comprendre qu'entre deux rationnels, il existera toujours un irrationnel et qu'on ne peut pas exhiber deux rationnels qui se suivent immédiatement.

Par exemple, si on définit une application à valeurs différentes sur les rationnels et les irrationnels, l'étudiant est désarçonné. L'étudiant ne comprend pas qu'il y a encore des irrationnels dont on ne soupçonne pas la forme.

Rosza Peter (3) propose l'exercice suivant (voir aussi (2)) :

supposons que quelqu'un prétende avoir constitué une suite dénombrable qui comporte tous les nombres réels commençant par zéro, par exemple : 1^{er} terme 0,1

2^e terme 0,2020....

3^e terme 0,311311131113....

on peut toujours construire un nombre réel qui n'est pas dedans, par exemple 0,212..., le premier rang différent de celui du premier terme, le deuxième rang différent de sa place au 2^e terme, etc...

En conclusion, la continuité de $\mathbb{R}$ est un des miracles des mathématiques ; elle n'a rien d'intuitif et peut constituer un obstacle insurmontable pour l'étudiant.

2) Les fonctions continues admettent une dérivée :

Cette affirmation, quoique l'on pense, n'est pas rejetée par la majorité des personnes interrogées lors d'un sondage effectué sur des universitaires scientifiques. Il semble donc que cela constitue un obstacle lié au concept de continuité. Il pourrait résulter des faits suivants :

- on confond toujours avec la proposition qui dit qu'une fonction dérivable est continue (l'implication est prise comme équivalence),
- en général, les courbes étudiées sont dérivables et il est rare d'en connaître des contre-exemples,
- il est difficile d'imaginer une courbe continue sans tangente.

a) Définition des objets de l'obstacle :

Une fonction est une relation entre une variable x d'un ensemble donné E et une variable y d'un ensemble donné F telle que, pour tout x dans E , il existe un seul y dans F dans la relation considérée avec x .

La notion de fonction peut constituer un obstacle, surtout si on confond f et $f(x)$ et combien d'auteurs se le permettent impunément (on dit bien l'exponentielle e^x !). Ici nous considérons des fonctions à variable réelle et à valeurs réelles.

Soit f une fonction définie dans une partie de $\mathbb{R}$ contenant l'intervalle $]x_0 - \alpha, x_0 + \alpha[$, $\alpha > 0$. f est continue au point x_0 si :

$\forall \varepsilon > 0 \exists \eta > 0, \forall x, |x - x_0| < \eta < \alpha$, alors $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$.

f est continue sur $]a, b[$ si f est continue en tout point de $]a, b[$.

Cette définition, qui remonte à Weierstrass, est encore sujet de discussion ; c'est didactiquement ingurgitable.

Il suffit pour cela de comparer les manuels en France de 1962 à nos jours : certains parlent d'intervalle pointé, d'autres font intervenir des artifices d'analyse numérique.

Sous les mêmes hypothèses que précédemment, f est dite dérivable en x_0 si :

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = l = f'(x_0).$$

$x \rightarrow x_0$

$x \neq x_0$

f est dérivable sur $]a, b[$ si f est dérivable en tout point de $]a, b[$.

IL EST FAUX DE DIRE QU'UNE FONCTION CONTINUE EN UN POINT ADMET NECESSAIREMENT UNE DÉRIVÉE EN CE POINT.

b) C'est un obstacle épistémologique :

Au XVIII^e siècle, il y avait trois notions de continuité :

- la fonction continue est figurée par une ligne tracée par un mouvement libre de la main (liberus manus dictu),
- la courbe continue est une courbe représentée par une courbe algébrique ou transcendante (Euler, *Introductio in analysis infinitorum*, 1748),
- la fonction continue est une fonction représentée par une série trigonométrique (Fourier, 1777).

D'autre part, il y avait aussi plusieurs notions de différentiabilité :

- limites ou fluxions (Newton, D'Alembert),
- infiniment petits (Leibniz, Carnot) : $f'(x_0)$ est le résultat d'une manipulation habile du quotient dy/dx , dy et dx étant des infiniment petits,
- séries (Lagrange) : la dérivée est un coefficient spécifique du développement en série d'une fonction.

C'est alors qu'André-Marie Ampère, répétiteur à l'Ecole Polytechnique, publie un mémoire en 1806 où il énonce :

"toute fonction continue est différentiable excepté en des points isolés"

En fait, ce résultat a été interprété de la manière suivante par son chef, Sylvestre Lacroix (1810) et rapporté ainsi par Duhamel (1856) et Bertrand (1864). Gilbert (1872) va même essayer d'améliorer une preuve qu'en a donné Lamarle (1855).

Et pourtant, d'après Klauss Volkert ([4], 1988), le "théorème d'Ampère" n'était pas celui qu'on pense, mais une simple conséquence du théorème des accroissements finis.

Les premiers contre-exemples ont apparu au milieu du XIX^e siècle: Riemann (1861), Hankel (1870), Weierstrass (1872), Schwarz (1873), tous analytiques, ce qui n'a pas empêché l'obstacle de perdurer.

Hermite écrit en 1893 à Stieljes :

"Je me détourne avec effroi et horreur de cette plaie lamentable de fonctions qui n'ont pas de dérivée".

Il a fallu des exemples géométriques pour convaincre les plus sceptiques comme celui de Helge von Koch (1904): une courbe continue sans tangente obtenue par construction géométrique.



La courbe limite est l'exemple cherché.

Bolzano remplace dans une ligne polygonale tout segment par une autre ligne polygonale et ainsi de suite, jusqu'à obtenir une courbe continue sans tangente (1830). Cette construction n'a pas été retenue par ses contemporains.

De ces exemples de fonctions continues sans dérivée, les mathématiciens en ont déduit des courbes qui remplissent une surface et qui donneront plus tard des fractals; une recherche active se fait dans cette direction.

Enfin, du point de vue expérimental, le mouvement brownien des particules va donner lieu à une illustration physique de ces "fonctions continues sans dérivée".

3. Bibliographie:

- (1) FLEGG G. numbers trough the ages, ed. MacMillan, 1989.
- (2) LABORDE C. langue naturelle et écriture symbolique, vol. 1 et 2, thèse, Grenoble, 1982.
- (3) ROZSA PETER jeux avec l'infini, Editions du seuil, 1977.
- (4) VOLKERT K. Ampère et la différentiabilité des fonctions continues, Actes de l'université d'été sur l'histoire des mathématiques, la Rochelle, 1988.