L'ÉMERGENCE ET LE DÉVELOPPEMENT CONCEPTUEL DE L'ALGÈBRE[1]

Luis Radford
Université Laurentienne
Ontario, Canada

§1. Introduction

Il nous semble que la nature des concepts mathématiques enseignés à l'école et à l'université peut être mieux saisie à travers une étude didactique de leur dimension épistémologique (cf. à ce sujet Filloy et Rojano, 1984; Barbin, 1993; Thomaidis, 1993, par exemple). Ainsi, la connaissance des circonstances qui ont donné naissance à un concept (par exemple celui d'équation ou celui d'inconnue) peut nous permettre de mieux comprendre l'insertion du concept en question au sein de la théorie correspondante. Dans le même ordre d'idées, la connaissance de l'évolution d'un concept où, de façon plus générale, celle d'une théorie mathématique, peut nous renseigner sur les obstacles rencontrés au long de la formation de la théorie et la façon par laquelle ils ont été franchis. Ces connaissances peuvent donner aux professeurs une idée de la profondeur et de la nature de ces obstacles, et les aider dans la façon de mener l'apprentissage chez leurs élèves.

C'est dans cette perspective historico-didactique que nos recherches s'intéressent à la problématique de l'émergence et le développement des concepts et des méthodes de ce qu'on appelle aujourd'hui l'«algèbre élémentaire», et dans laquelle il y a un certain nombre de questions qu'on peut se poser: qu'est-ce que l'algèbre était au début? Quels problèmes l'algèbre était-elle censée résoudre? Quel était le rapport entre l'arithmétique la géométrie et l'algèbre? Quels étaient les méthodes de résolution de problèmes? Comment justifiait-on ces méthodes? Quelles connaissances a-t-il fallu mobiliser pour faire émerger les concepts algébriques, puis pour les faire évoluer?

Il est hors de la portée de cet article de répondre en détail à toutes ces questions. Nous allons nous limiter à faire certaines considérations sur l'émergence de l'algèbre et aux premiers pas de son développement conceptuel.

[1]Cet article fait partie d'une recherche qui a reçu une subvention FRUL (Fonds de Recherche de l'Université Laurentienne) et une subvention du Bureau de la Vice-rectrice adjointe, Enseignements et Services en français de l'Université Laurentienne.

§2 L'émergence de l'algèbre: le critère d'analycité opératoire

La première chose à faire est d'essayer de clarifier ce que nous entendons par «algèbre». Si on regarde l'histoire des mathématiques, on peut reconnaître au moins deux activités mathématiques qui présentent une certaine ressemblance avec l'«algèbre élémentaire» d'aujourd'hui. On a, d'une part, une activité centrée sur l'étude de certaines propriétés numériques, comme celle que nous écririons en termes modernes par: $(a\pm b)^2 = a^2 + b^2 \pm 2ab$, et dont la présence semble remonter aux environs du 22e siècle av. J.-C. On a, d'autre part, une activité centrée sur la résolution de problèmes en mots (*word problems*). C'est sur l'activité de résolution de problèmes que nous allons nous arrêter ici, laissant de côté l'aspect «propriétés numériques» de l'algèbre[2]

En ce qui concerne la résolution de problèmes, on peut remarquer que dans l'«arithmétique», contrairement à ce qui se passe dans l'«algèbre», on développe des techniques ou des procédures de résolution dans lesquelles les calculs se font sur les chiffres donnés dans l'énoncé du problème; l'*inconnue* (c'est-à-dire, ce qu'on cherche) est le point d'aboutissement: dans une démarche arithmétique, l'inconnue n'est pas opérée. En algèbre, par contre, on développe des procédures de résolution de problèmes dans lesquelles l'inconnue est supposée connue (c'est l'aspect **analytique**) et elle est opérée (c'est l'aspect **opération** de l'inconnue (cf. Filloy et Rojano, 1989)); au cours de la résolution, l'inconnue exprime une égalité (une *équation*) entre termes (non nécessairement exprimés sous forme symbolique) comprenant l'inconnue. De plus, il y a un raisonnement sur l'«équation».

Pour mieux montrer la différence entre la pensée arithmétique et la pensée algébrique, nous allons prendre un exemple. Il s'agit d'un problème tiré des mathématiques babyloniennes provenant de la famille des problèmes contenus dans les tablettes VAT 8389 et VAT 8391, tablettes qui remonteraient à la première dynastie babylonienne (vers 1900 av. J.-C.). Ces problèmes concernent deux champs et leur production de grains. Si nous désignons par a la production (par unité d'aire) du premier champ et par X son aire, et si nous désignons par b la production (par unité d'aire) du deuxième champ et par Y son aire, nous aurons que la plupart des problèmes de ces tablettes peuvent s'énoncer, en utilisant des notations modernes, comme suit:

$aX \pm bY = c$; $X \pm Y = d$ (où a, b, c et d sont des données du problème).

Nous allons nous contenter ici d'analyser un de ces problèmes: le problème 1 de la tablette VAT 8389 (d'après la traduction de Thureau-Dangin, 1938, p. 103-105):

---

[2] Aspect que nous abordons dans «Diophante ou les deux visages de l'algèbre» (à paraître)

"Par *bur*, j'ai perçu 4 *kur*. Par second *bur*, j'ai perçu 3 *kur* de grain. Un grain excède l'autre de 8`20 <*sila*>. J'ai additionné mes champs: 30` <*SAR*> Que sont mes champs?

Solution babylonienne:

Pose 30` <SAR>, le *bur*. Pose 20`, le grain qu'il a perçu. Pose 30` <SAR>, le second *bur*. Pose 15`, le grain qu'il a perçu. Pose 8`20, ce dont un grain excède l'autre. Enfin, pose 30`, la somme de la superficie des champs. Puis fractionne en deux 30`, la somme de la superficie des champs: 15`. Pose 15` et 15` deux fois. Dénoue l'inverse de 30`, le *bur*: 2". Porte 2" à 20`, le grain qu'il a perçu: 40', le grain fa[ux]. Porte à 15`, que tu as posé deux fois: 10`. Que ta tête (le) retienne. Dénoue l'inverse de 30`, le second *bur*: 2". Porte 2" à 15`, le grain qu'il a perçu: 30', le grain faux. Porte à 15` que tu as posé deux fois: 7`30. De quoi 10`, que ta tête retient, excède 7`30? Il excède de 2`30. Soustrais 2`30, ce dont il excède, de 8`20, ce dont un grain excède l'autre: tu laisseras 5`50. Que ta tête retienne 5`50, que tu as laissé. Additionne le coef[ficient ] 40' et [le coef]ficient 30': 1$^o$10'. [Je ne connais pas] l'inverse. Que dois-je poser à 1$^o$10', qui me donne 5`50, que ta tête retient? Pose 5`. Porte 5` à 1^{o}10', cela te donnera 5`50. De 15`, que tu as posé deux fois, soustrais de l'un, ajoute à l'autre, 5`, que tu as posé: le premier est 20`, le sécond 10`. La superficie du premier champ est 20`, la superficie du second champ 10`.

Commentaires

Le *bur* est une unité de mesure de surface. 1 *bur* = 30` SAR (Rappelons que le nombre30`, écrit en base 60, signifie 30x60 en base dix; rappelons aussi que 1 SAR ≈ 12 yds. carrées). Il transforme les *kur* en *sila* : 1 *kur* = 5 *sila*. Donc 4x5=20 *sila* pour le premier champ, et 3x5=15 *sila* pour le deuxième champ. Ensuite, le scribe assume (dans une démarche de fausse position) que les champs ont 15` SAR chacun. Pour calculer la production qui correspond à chaque champ, il calcule l'inverse de 30`: c'est 2", ou $2/(60)^2$, en base 10. Il calcule alors 2"x20` = 40' sila/SAR (donc 40/60 en base 10 ). Alors 40' sila/SAR x 15`SAR = 10` sila pour le premier champ. Un calcul similaire donne 7`30^o sila la production du deuxième champ. On a après: 10` - 7`30=2`30.

Puis: 40'+30'=1^{o}10'. Il arrive à l'«équation»: 1^{o}10'Z=5`50$^o$. Il obtient que Z vaut 5`. La solution est donc 15`+5` et 15`-5`, ie. 20` et 10`.

Si nous revenons aux notations modernes, le problème correspond au système linéaire suivant:

$$aX - bY = c$$
$$X+Y = d.$$

Les calculs précédents montrent que, pour trouver X et Y le scribe prend une solution fausse a priori: il prend comme solution initiale $X_o=Y_o=d/2$ (solution qui vérifie la condition X+Y=d). Ensuite il calcule la production qui correspondrait à chaque champ, s'ils avaient une aire égale à d/2; ces productions sont aX_o et bY_o, respectivement, de sorte que l'excès de la production du premier champ sur le second est $aX_o-bY_o=c_o$. Après il calcule $c-c_o$. Il faudra donc augmenter d'une certaine quantité l'aire du premier champ et de diminuer de cette même quantité celle du deuxième champ. Or, pour chaque unité qu'il augmente X, la production du premier champ augmente de a, et pour chaque unité qu'il diminue Y, la production du deuxième champ diminue de b, de sorte que l'excès de production du premier champ sur le deuxième augmente de a+b. Le scribe arrive alors à une équation:

«Que dois-je poser à 1^o 10', qui me donne 5`50, que ta tête retient?»

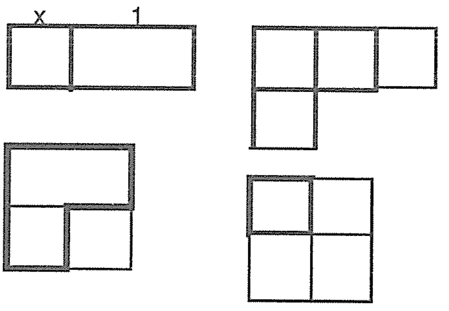
L'équation est, en termes modernes: 1^o 10'Z = 5`50$^o$. Le scribe sait comme résoudre cette équation: il sait qu'il doit multiplier 5`50 par l'inverse de 1^o 10'. Bien que la table d'inverses ne lui fournit pas l'inverse de 1^o 10', il trouve que le nombre cherché est 5`. C'est nombre est, évidemment, la quantité qu'il faut ajouter au premier champ et enlever au deuxième champ.

Quelques remarques s'imposent. En premier lieu, on voit que la méthode est une méthode arithmétique de fausse position: on donne une valeur numérique artificielle, reconnue fausse a priori, aux inconnues du problème. Ces solutions fausses permettent d'*avancer* dans le problème à travers un calcul sur les nombres donnés dans l'énoncé. Ce n'est qu'à la fin des calculs qu'on arrive aux *vraies inconnues* (ie. aux aires exactes des champs) qui jouent ainsi le rôle de point d'arrivé du processus. Dans une démarche algébrique, par contre, on raisonne et on calcule en terme des valeurs exactes (bien que non connues encore) de ces inconnues..., qui se constituent ainsi en un point de départ.
En deuxième lieu, il convient de remarquer que l'équation à laquelle arrive le scribe dans sa démarche de résolution n'est pas une équation au sens algébrique, d'après la caractérisation que nous avons proposé au début du §2: en effet, pour résoudre l'équation, le scribe n'opère point l'inconnue: les calculs se font sur des nombres (l'inverse de 1^{o} 10' est multiplié par 5`50), et l'inconnue reste sans intervenir. C'est donc une **équation arithmétique** (cf. Filloy et Rojano, 1984, 1989).
Une autre remarque qu'on peut faire par rapport aux raisonnements arithmétiques concerne la "charge sémantique" ou *présence* de la signification des nombres et des relations entre ceux-ci tout au long de la résolution. Ce phénomène, qui a été mis en évidence, sous le plan didactique, par Bednarz et al. (1992), apparaît dans le problème précédent comme moteur conducteur de l'organisation des calculs du scribe (on calcule la "production fausse" de chaque champ, on calcule l'excès des productions, ...). Par contre, dans les raisonnements algébriques, la "charge sémantique" diminue voire disparaît, surtout après la mise en équation, comme nous allons le voir au §4, ci-dessous.

§3 La géométrie du collage
Avant d'aller plus loin, il convient de nous arrêter sur une autre dimension des mathématiques babyloniennes. J. Høyrup (1986) a proposé une interprétation très intéressante des procédures de calcul que les tablettes babyloniennes exhibent en termes d'une géométrie de "coupage et collage" (*cut-and-paste-procedures*); il s'agit d'une nouvelle interprétation de ce qu'on appelle l'"«algèbre» babylonienne".Ce qui nous intéresse ici est d'essayer de voir dans quelle mesure l'«algèbre» du collage est conceptuellement liée à l'«algèbre» que nous avons caractérisée par la propriété d'analycité mentionné ci-dessus. Pour ce faire, nous allons prendre un exemple. Il s'agit d'un problème provenant de la tablette BM 13901:

> "The surface and the square-line I have accumulated: 3/4. 1 the projection you put down. The half of 1 you break, 1/2 and 1/2 you make span [a rectangle, here a square], 1/4 to 3/4 you append: 1, makes 1 equilateral. 1/2 which you made span you tear out inside 1: 1/2 the square-line" (Høyrup, 1986, p. 450. *N.B.* Les nombres dans la traduction de Høyrup ont été écrit en base 10 et on utilise le symbole usuel pour désigner les fractions)[3]

[3] La traduction française de ce problème, fournie par Thureau-Dangin (où les nombres apparaissent en base 60) est: "J'ai additionné la surface et le côté de mon carré: 45'. Tu poseras 1, l'unité. Tu fractionneras en deux 1: (30'). Tu croiseras [30'] et 30': 15'. Tu ajouteras 15' à 45': 1. C'est le carré de 1. Tu soustrairas 30', que tu as croisé, de 1: 30', le côté du carré." (Thureau-Dangin, 1938, p.1).



Comme on voit sur le dessin, la procédure telle qu'expliquée par Hoyrup, consiste à découper la figure originale (première figure) en sorte de compléter un carré (quatrième figure): dans un premier temps, le rectangle de dimensions égales à 1 et x est coupé en deux rectangles; la base de ces rectangles devient donc 1/2. Le rectangle à droite est transféré en bas (figure 3). On complète alors le carré (figure 4).

Ce qui nous intéresse ici est de voir de plus près ce que devient l'inconnue dans ces transformations. De façon plus précise, est-ce que l'inconnue est *prise en compte* dans les calculs? Est-ce qu'on *opère* cette inconnue? Une lecture attentive de la traduction de Høyrup laisse voir que l'inconnue est prise en considération (on arrive à l'égalité que nos notations modernes permettraient d'écrire comme $(x+1/2)^2 = 1$) On voit donc que dans cette conceptualisation, l'élément hypothético-déductif propre à la pensée analytique est présent.. Mais on peut remarquer aussi que l'inconnue n'est vraiment pas opérée! Or, ce qui distingue, d'après nous, l'analycité propre à la pensée géométrique de l'analycité propre à la pensée algébrique est justement l'opération de l'inconnue...

En fait la méthode du collage permet d'éviter de faire des véritables calculs sur l'inconnue. L'inconnue reste ainsi un support statique dans la procédure de résolution.

D'après la caractérisation en termes l'analycité opératoire que nous avons proposée pour distinguer les débuts des démarches proprement algébriques, l'«algèbre» babylonienne, sous l'intéressante interprétation de Høyrup en termes de «géométrie naïve» ou «géométrie du collage» ne pourrait pas être considérée comme «algèbre».

Remarquons, enfin, que la conceptualisation qui sous-tend la géométrie du collage demande un recours constant au registre géométrique; ce registre constitue à la fois sa force et sa limite. Ainsi, faire du calcul sur l'inconnue un objet d'étude (ne serait-ce qu'élémentaire), apparaît en dehors du cadre problématique de géométrie du collage. Ce ne sera pas le cas du cadre problématique chez Diophante, dont l'oeuvre commence justement par un certain nombre de considérations sur ce que nous pourrions appeler «les règles de base du calcul sur l'inconnue» (des règles que nos notations modernes nous permettraient d'écrire comme: $(x^2)^2 = x^4$; $x(1/x^2) = 1/x$, etc.).

L'étude de quelques problèmes des *Livres Arithmétiques* de Diophante va nous permettre de préciser d'avantage notre idée d'analycité opératoire et de mieux distinguer la différence entre les trois conceptualisations qui nous concernent: celle des méthodes de fausse position, celle de la géométrie du collage et celle de l'«algèbre».

§4 L'«algèbre» chez Diophante

Nous allons voir maintenant le problème 6 du Livre 1 des *Livres Arithmétiques*, de Diophante d'Alexandrie (vers 250 ap. J.-C.)[4]

Livre 1, problème 6:

«Partager un nombre proposé en deux nombres, de manière qu'une fraction donnée du premier nombre excède d'un nombre donné une fraction donnée du second nombre»

Solution de Diophante:	Traduction moderne:
«Il faut toutefois que le nombre donné soit plus petit que le nombre obtenu lorsque l'on prend la fraction excédente donnée du nombre initial proposé.	Condition de faisabilité de la solution (cf. Radford, 1992a)
Proposons donc de partager 100 en deux nombres, de manière que l'excédent du quart du premier nombre sur le sixième du second nombre soit 20 unités.	Diophante spécifie les constantes du problème, qui devient donc: $x+y=100$; $x/4 - y/6 = 20$
Posons que le sixième du second nombre est 1 arithme; donc, ce nombre sera 6 arithmes. Dès lors, le quart du premier nombre sera 1 arithme plus 20 unités; donc, ce premier nombre sera 4 arithmes plus 80 unités. Nous voulons, du reste, que les deux nombres additionnés forment 100 unités. Or, ces deux nombres additionnés forment 10 arithmes plus 80 unités, lesquels égaleront 100 unités.	$y/6 = 1A$, donc $y = 6A$. $x/4 = 1A + 20$ $x = 4A + 80$. Mais $x + y = 100$. Or $x+y = 10A+80$ $10A+80=100$.
Retranchons les semblables des semblables: il reste 10 arithmes égaux à 20 unités, et l'arithme devient 2 unités.	$10A = 100-80$ $10A = 20$. Donc $A= 2$.
Revenons à nos positions. On a posé que le sixième du second nombre est 1 arithme, c'est-à-dire 2 unités; donc, le second nombre sera 12 unités. D'autre part, le quart du premier nombre étant 1 arithme plus 20 unités, il sera donc 22 unités, et le premier nombre sera donc 88 unités. Dès lors, il est établi que le quart du premier nombre excède le sixième du second nombre de 20 unités, et que les nombres additionnés forment le nombre proposé.»	Vérification des résultats.

(Ver Eecke, 1926, pp. 12-13)

La procédure de Diophante est tout à fait différente, du point de vue conceptuel, des procédures de fausse position et de la géométrie du collage. En effet, ici, une inconnue (désignée par l'arithme, c'est-à-dire le *nombre*) est mise en oeuvre dans les calculs. Cette inconnue n'est pas, comme dans les procédures arithmétiques, le point d'arrivé des calculs; elle n'est pas non plus, comme c'est le cas dans les procédures de la géométrie du collage, un point de référence statique dans le développement du problème, mais bel et bien une quantité qui est opérée comme si c'était un nombre connu: dans le texte cité ci-dessus, Diophante fait le calcul *6 arithmes plus 4 arithmes et 80 unités*, pour arriver à l'équation *10 arithmes et 80 unités égal à 100 unités*. Ce calcul repond à notre critère l'analycité opératoire.

Il convient de noter que cette conceptualisation analytique opératoire, présente dans l'oeuvre de Diophante, débouche sur l'élaboration d'un «nouveau calcul» -un calcul sur l'arithme- que Diophante mène assez loin (dans le problème 6, Livre "VI", il pourra, par exemple, mettre en facteur un polynôme de deuxième degré; dans le problème 11 du même Livre, il développe sans

---

[4]Rappelons qu'au début des *Livres Arithmétiques*, Diophante dit que l'oeuvre est composée de 13 livres. On en connaît seulement 10; les 6 premiers sont désignés par Livre I, Livre II, ... et Livre VI. On ne sait pas exactement la place des autres trois livres connus dans l'ensemble de l'oeuvre; on les désigne alors par Livre"VI", Livre VII" et Livre "VIII"

peine le carré de «6 arithmes plus 1 unité moins 1 carré d'arithme», etc.). Un tel calcul semble impossible d'être envisagé à l'intérieur de la conceptualisation de la géométrie du collage ou à l'intérieur de celle des méthodes de fausse position: dans ces conceptualisations, ce calcul n'a simplement pas de *raison d'être*...

Enfin, on peut voir que dans la procédure de Diophante, la "charge sémantique" des nombres est très vite perdue. Ainsi, on se débarrasse tôt des fractions et les expressions qui en résultent viennent se fusionner à d'autres expressions qui n'auront plus de correspondance sémantique avec l'énoncé du problème[5].. Par contre, dans le cas des méthodes de fausse position et dans les méthodes de la géométrie du collage la sémantique n'est pas évacuée.

§5. D'où vient donc l'algèbre?

Au début du Livre I, Diophante dit: "Il se peut que la matière paraisse plus difficile qu'elle ne l'est, parce qu'elle n'est pas encore connue, et que les débutants désespèrent de réussir." (Ver Eecke, 1926, p. 1. C'est nous qui soulignons)

Prise à la lettre, la phrase précédente indiquerait que c'est Diophante qui introduit pour la première fois cette "matière". En nous en tenant à la phrase, Diophante serait donc le fondateur de l'algèbre. Mais une lecture des *Livres Arithmétiques* qui nous sont parvenus, suggère l'existence d'autres oeuvres et d'autres sources qui seraient à la base de cette "nouvelle matière". Ainsi, on a en particulier un *Porisme* auquel Diophante fait allusion à quelques endroits (cf. problème 3 du livre "V" ou le problème 5 du livre "V", par exemple). D'autre part, Gandz (1938) a mis en évidence certaines traces des mathématiques babyloniennes dans l'oeuvre de Diophante. Bien que nous ne puissions pas adhérer complètement aux arguments de Gandz, en raison que ceux-ci supposent la maîtrise d'un langage algébrique que de toute évidence était hors de la portée de Diophante, l'exemple suivant est néanmoins très suggestif au sujet des sources babyloniennes dans l'algèbre de Diophante.

---

[5]Dans le problème 34 du Livre I, Diophante arrive à l'équation «24 arithmes sont égaux à 8 carrés d'arithme» (Ver Eecke, 1926, pp. 42-43). Serait-il possible de retrouver l'énoncé du problème à la lumière de la seule équation?

Livre I, problème 27:
Trouver deux nombres dont la somme et le produit forment des nombres donnés.

Solution de Diophante	Traduction en langage moderne
«Proposons que la somme des nombres forme 20 unités, et que leur produit forme 96 unités. Que l'excédent des nombres soit 2 arithmes.	$x + y = 20$ $xy = 96$ $x - y = 2A$
Dès lors, puisque la somme des nombres est 20 unités, si nous la divisons en deux parties égales, chacune de ces parties sera la moitié de la somme, ou 10 unités. Donc si nous ajoutons à l'une des parties, et si nous retranchons de l'autre partie, la moitié de l'excédent des nombres, c'est-à-dire 1 arithme, il s'établit à nouveau que la somme des nombres est 20 unités, et que leur excédent est 2 arithmes. En conséquence, posons que le grand nombre est 1 arithme augmenté de 10 unités qui est la moitié de la somme des nombres; donc le plus petit nombre sera 10 unités moins 1 arithme, et il s'établit que la somme des nombres est 20 unités et que leur excédent est 2 arithmes.	$x_0 = y_0 = 20/2 = 10$ $x = x_0 + 1A = 10 + 1A$ $y = y_0 - 1A = 10 - 1A$ On a $x+y = 20$ et $x-y = 2A$. Posons donc $x = 10 + 1A$ $y = 10 - 1A$
Il faut aussi que le produit des nombres forme 96 unités. Or leur produit est 100 unités moins un carré d'arithme, ce que nous égalons à 96 unités, et l'arithme devient 2 unités. En conséquence, le plus grand nombre sera 12 unités et le plus petit sera 8 unités, et ces nombres satisfont la proposition»	$xy = 96$ Or $xy = 100 - 1A^2$ $= 96$ Donc $A=2$ Donc $x=10+2=12$ et $y = 10-2 = 8$.
(Ver Eecke, 1926, pp. 36-38)	

On peut contraster cette solution à la solution donnée par le scribe au problème VAT 8389 mentionné ci-dessus (§2). On voit que l'idée de partager la somme des nombres qu'on cherche est présente dans les deux procédures. Mais à la place de partir avec ces valeurs comme solutions initiales et les ajuster à la fin, comme fait le scribe babylonien, ce que Diophante fait est d'introduire dès le départ cette quantité d'ajustement (l'arithme), qui se voit ainsi impliquée dans les calculs: elle devient solution d'une équation de deuxième degré[6].

La ressemblance étonnante entre les deux procédures suggère que la conceptualisation de la méthode de Diophante est plus proche des méthodes de fausse position que de celles de la géométrie du collage. Cette affirmation semble aussi être appuyée par d'autres textes historiques, en particulier par celui du *Liber Mensurationum* d'Abû Bekr qui aurait été écrit vers le 11e siècle (cf. l'édition de Busard, 1968). En effet, tel que Høyrup (1986) l'a signalé, dans ce livre il est souvent question de résoudre un même problème par deux méthodes différentes, l'une -celle de la géométrie du collage- et l'autre celle qui appartiendrait à l'*al-gabr* (cf. par

---

[6] Le problème 6 du Livre I des *Livres Arithmétiques* (vu au §4) peut aussi être résolu par cette même procédure: Diophante aurait alors pu prendre 50 + 1A pour le premier nombre et 50 - 1A pour le deuxième. Il aurait été alors amené à calculer la différence entre le quart de 50 + 1A et le sixième de 50 - 1A et faire cette différence égale à 20 unités. Mais cela l'aurait amené à un calcul sur des nombres fractionnaires, qu'il évite souvent (c'est pour quoi il prend dans le problème 6 du Livre I le sixième du second nombre égal à 1 arithme et non pas simplement le second nombre égal à 1 arithme; c'est pour quoi aussi dans le problème 27 du Livre I qu'on vient de voir, il prend la différence entre les nombres égale à 2 arithmes et non pas 1 arithme...).

exemple, les problèmes No. 32 ou No.41 du *Liber Mensurationum*). Mais ces méthodes sont perçues comme *étant différentes*, même si parfois, sur le plan des calculs il y a coïncidence.

Avant d'aller plus loin dans l'histoire de l'algèbre, il est important de faire quelques commentaires additionnels sur les deux problèmes de Diophante discutés ci-dessus. D'une part, on remarque qu'*au niveau des calculs* les vraies inconnues du problème ne sont jamais mises en scène : on se réfère à ces nombres comme «le premier nombre», «le deuxième nombre», ... On ne trouvera jamais, *à l'intérieur des calculs algébriques*, une équation dont l'inconnue serait justement «un des nombres» (ie. «le premier nombre» ou «le deuxième nombre», etc.). En effet, les vraies inconnues du problème sont toujours exprimées en fonction d'une seule inconnue, l'*arithme*, qui est l'inconnue qu'on opère au sens analytique. Comme nous l'avons vu précédemment, dans le problème 6 du Livre I, Diophante fait $y/6 = 1A$, de là il obtient $y = 6A$, et compte tenu du fait que $x/4 - y/6 = 20$, il arrive à $x/4 = 1A + 20$. L'arithme (que nous avons désigné par A) apparaît ainsi comme une inconnue auxiliaire à caractère analytique qui sert d'*intermédiaire* entre les vraies inconnues[7]..

Il est clair, par ailleurs, que dans les problèmes que nous venons de voir, on n'augmente guère le coût syntactique si on considère comme *inconnue* analytico-opératoire un des nombres qu'on cherche (ie. «le premier nombre», «le deuxième nombre», ...) En effet, les *calculs* qui sont requis pour résoudre ***directement*** les systèmes d'équations qui correspondent à ces problèmes (c'est-à-dire sans passer par l'arithme, comme ferait un élève de secondaire de nos jours) étaient à la portée de Diophante. Mais dans la conceptualisation de l'algèbre de Diophante il y a une faussée infranchissable entre les inconnues du problème et l'inconnue des calculs (l'arithme): ce sont des objets qui appartiennent à des niveaux conceptuels différents.

L'algèbre chez Diophante apparaît comme un outil pour résoudre des problèmes: elle n'est pas autonome. L'arithme, quand à lui, est un artifice heuristique (Radford, 1992a). L'oeuvre d'Al-Khwarizmi nous montre, par contre, une algèbre constituée en discipline.

§4 Mohammed Ben Musa Al-Khwuarizmi: l'algèbre comme discipline

On situe la vie de Mohammed Ben Musa Al-Khwarizmi entre la deuxième moitié du VIII siècle et la première du IX siècle (cf. Youschkevitch, 1976). L'oeuvre qui nous intéresse ici, *Le Traité concis sur le calcul par al-gabr et l'al-muquabala*, aurait été écrit entre 813 et 833 à Bagdad (cf. Rashed, 1984)[8]

Dans la préface, l'auteur dit qu'il a été encouragé «à écrire un petit travail sur le Calcul par l'al-gabr et l'al-muquabala, en y confinant tout ce qui est le plus facile et le plus utile en arithmétique, comme ce que les hommes requièrent constamment dans le cas d'héritages, de legs, de répartitions, de procès et du commerce, et dans le commerce des uns avec les autres, ou bien dans la mesure de terres, l'excavation de canaux, dans le calcul géométrique, et d'autres objets de plusieurs classes qui s'y rattachent». (Rosen, p. 3).

Ainsi, contrairement à Diophante, le projet d'Al-Khwarizmi se présente comme un projet appliqué, basé sur des règles de calcul qu'on nomme de façon explicite.

Mais qu'est-ce que c'est ce calcul par l'al-gabr et l'al-muquabala? Sur quoi calcule-t-il? «J'ai remarqué, dit Al-Khwarizmi, que les nombres qui sont requis dans le calcul de l'al-gabr et l'al-muquabala sont de trois classes, à savoir, les racines, les carrés et les nombres simples sans relation à la racine ou au carré. La racine est n'importe quelle quantité qui sera multipliée par

---

[7]Ainsi, dans le problème 20 du Livre I, Diophante cherche à partager 100 en trois nombres, tels que le premier, augmenté du second, soit le triple du troisième. Le raisonnement commence ainsi:«Posons que le troisième nombre est un arithme». Puis il aboutit à l'équation: "4 arithmes ègal à 100 unités", qui n'est pas plus compliquée syntactiquement d'obtenir que l'équation: "4 fois le troisième nombre égal à 100 unités".

[8]On dispose d'un certain nombre de traductions du *Traité Concis*; citons les traductions latines (12e siècle) de Gerardo de Cremona (dont une édition critique a été faite par Hughes, 1986) et celle de Robert of Chester (qui a servi de base à la traduction anglaise de Karpinski, 1915) et la traduction anglaise de Rosen.

elle-même, composée d'unités ou de nombres qui augmentent ou des fractions qui diminuent[9]». (Rosen, pp. 5-6; le souligné est nôtre).

Les racines et les carrés sont reliés, bien sûr, par le fait que la multiplication d'une racine par elle-même donne un carré. Mais bien que les racines et les carrés soient des nombres, dans le *Calcul* ce sont des nombres différents aux nombres simples: "un nombre simple est un nombre qui n'est pas connecté à la racine ou au carré par une proportion quelconque." (Karpinski, p. 69). La racine est le carré sont donc impossibles d'exprimer à l'intérieur de la théorie des proportions, la théorie sur les grandeurs la "plus puissante" avant l'algèbre. Ce sont vraiment des objets nouveaux. Ils sont considérés dès le départ comme des objets mathématiques *per se*. Ils ne constituent pas juste un artifice heuristique puissant dans la résolution de problèmes; au contraire, leur statut mathématique fera possible la construction d'une nouvelle théorie, dans laquelle un nouveau calcul (un calcul algébrique) aura lieu. (En fait il s'agira d'un calcul sur des polynômes de deuxième degré).

L'équation algébrique ou **espèce**[10] est le point central de l'organisation de l'oeuvre du *Traité concis*, ce qui marque une différence fondamentale par rapport aux *Livres Arithmétiques* de Diophante, où ce qui prime est le *problème*. L'équation résulte de la possibilité qu'ont les nombres de base du nouveau *Calcul* d'être égaux entre eux:
«Un nombre appartenant à une de ces classes peut être égal à un nombre d'une autre classe; tu peux dire, par exemple, "des carrés sont égaux à des racines" ou "des carrés sont égaux à des nombres" ou "des racines sont égales à des nombres"». (Rosen, p. 6). Cette combinaison de classes définit aussi les **types d'espèces** à étudier. Al-Kwharizmi distingue trois cas simples et trois cas combinés. Les cas simples sont les suivants:
(a) «Des carrés sont égaux à des racines»; (b) «Des carrés sont égaux à des nombres»; (c) «Des racines sont égales à des nombres». Les cas d'espèces combinées sont: (a') «Des racines et des carrés sont égaux à des nombres»; (b') «Des carrés et des nombres sont égaux à des racines»; (c') «Des racines et des nombres sont égaux à des carrés»

Voici quelques exemples donnés par Al-Khwarizmi:
Exemple du (a): «"Un tiers du carré est égal à quatre racines;" donc le carré complet est égal à douze racines, c'est-à-dire à cent quarante-quatre; et sa racine est douze.». Exemple du (c): «"Une racine égale trois en nombres;" donc la racine est trois, et le carré est neuf.». Exemple du (a'): «Par exemple, dit Al-Khwarizmi, "un carré, et dix racines du même font trente-neuf dirhams;" c'est-à-dire, quel doit être le carré qui, quand augmenté de dix de ses propres racines, fait trente-neuf? La solution est celle-ci: tu prends la moitié du nombre des racines, qui dans le cas présent fait cinq. Cela tu le multiplies par lui-même; le produit est vingt-cinq. Ajoute cela à trente-neuf; la somme est soixante-quatre. Maintenant prends la racine de cela, qui est huit, et soustrais-lui la moitié du nombre des racines, qui est cinq; le reste est trois. Cela est la racine du carré cherché; le carré lui-même est neuf.»

Quelques commentaires s'imposent:
(1) Dans les équations chez Al-Khwarizmi[11], les nombres qui y apparaissent (ces nombres que nous appelons aujourd'hui les "coefficients") n'expriment point une multiplication, mais une quantité de nombres: ce sont des **nombres nombrants**: ils indiquent une quantité d'une

---

[9]L'idée de racine apparaît donc reliée à celle de «quantité quelconque»; cette idée est ainsi conceptuellement compatible avec l'idée d'*arithme* diophantien (un arithme est pour Diophante «une quantité indéterminée d'unités»: cf. Radford, 1992a).

[10]Dans la traduction latine de Robert of Chester , le terme *espèces* (que nous avons traduit de *species*, d'après Rosen, p.8) apparaît comme *genera*: c'est ce que nous appelons aujourd'hui *équations*.

[11]Penser à l'équation de l'exemple (a') vu ci-dessus ou a cette autre: «Deux carrés et dix racines sont égaux à quarante-huit dirhams» (Rosen, p. 9)

certaine chose (quantité de racines, quantité de carrés, ...).[12]: C'est pour quoi on ne trouvera pas, dans les problèmes qu'Al-Khwarizmi présente, d'équation à "coefficients" irrationnels...
(2) L'exemple donné ci-dessus de l'espèce (c) permet de mieux comprendre l'idée que se faisait al-Khwarizmi du *Calcul* qu'il était en train de mettre en place: le fait que la résolution de l'équation soit triviale ne nuit en rien à sa nature d'équation. Chez Al-Khwarizmi, l'équation n'est pas seulement un outil -comme c'est le cas chez Diophante- mais elle dévient objet d'étude.

Les règles d'al-gabr et al-muquabala:
Le problème suivant, qui appartient au chapitre *Des six problèmes*, va nous permettre d'avoir un aperçu du type de problèmes qu'on envisage dans le cadre du *Traité Concis*.
Problème cinq:

> «J'ai partagé dix en deux parties; j'ai alors multiplié chacune d'elles par soi-même, et quand j'ai ajouté les produits ensemble, la somme était cinquante-huit dirhams.
>
> Calculs: suppose qu'une des deux parties est une chose, et l'autre dix sans la chose[13]. Multiplie dix sans la chose par lui-même; cela donne cent et un carrés sans vingt choses. Alors multiplie une chose par une chose; c'est un carré. Ajoute les deux ensemble. La somme est cent plus deux carrés sans vingt choses, et cela est égal à cinquante-huit dirhams. Complète maintenant cent et deux carrés sans les vingt choses en ajoutant vingt choses à cinquante-huit; et il vient cent plus deux carrés égaux à cinquante-huit et vingt choses. Réduis ceci à un carré, en prenant la moitié de tout ce que tu as. Cela donne alors: cinquante dirhams et un carré, qui est égal à vingt-neuf dirhams et dix choses. Alors réduit cela, en prenant vingt-neuf de cinquante; il en reste vingt et un et un carré, égal à dix choses. Prends la moitié du nombre des racines, ce qui est cinq; multiplie-le par lui-même, cela donne vingt-cinq; prends de là les vingt et un qui sont connectés avec le carré, le reste est quatre. Extrais la racine, c'est deux. Soustrais cela à la moitié des racines, c'est-à-dire de cinq, il en reste trois. Ceci est une des portions; l'autre est sept. Cette question te réfère à une des six cas, à savoir, "Des carrés et des nombres égal à des racines"» (D'après la traduction de Rosen, p. 39-40)

La solution au problème précédent permet de voir que la procédure de résolution repose sur la propriété d'analycité opératoire que nous nous sommes donnés comme critère pour reconnaître une procédure comme «algébrique»: on suppose qu'une des parties est une *chose*, et on traite la *chose* comme si c'était un nombre connu. D'autre part, on peut voir, dans ce problème, les deux règles sur lesquelles le Calcul d'Al-Khwarizmi est bâti: celle de l'al-gabr et celle de l'al-muquabala. La première -celle de l'al-gabr- permet de se débarrasser des racines et des carrés qui expriment une soustraction[14]. Le terme *al-gabr* signifie compléter, remplir, restaurer. On restaure donc, dans une équation, une certaine combinaison de nombres (nous dirions une certaine expression algébrique) en y ajoutant la quantité de nombres qui manquent. L'autre règle -celle d'*al-muquabala*, qui signifie confronter, mettre en opposition, permet d'opérer les nombres simples entre eux, de sorte de les regrouper dans une même expression (autrement dit, pour utiliser une expression moderne, de les mettre d'un seul côté de l'égalité). Mais l'al-

---

12 Ainsi, «Deux carrés et dix racines sont égaux à quarante-huit dirhams» se traduit mal en langage moderne par: $2x^2 + 10x = 48$, où le coefficient exprime une multiplication: la traduction moderne saisit mal le sens original: «Deux carrés» veut dire un carré et un autre carré, donc plutôt $x^2 + x^2$. Les nombres 2 et 10 (ie. les coefficients), dans l'équation, sont donc des nombres nombrants.

13 C'est-à-dire, dix moins la chose: ce que nous écririons 10-x.

14 Youschkevitch (1976, p.35) dit que la règle d'al-gabr permet de nous débarrasser des termes affectés du signe -. Bien sûr, il n'y a pas de signe "-" chez Al-Khwarizmi: ce qu'il y a ce sont des termes qu'on retranche à d'autres termes...

muquabala concerne aussi les nombres nombrants quand il s'agit de réduire ou d'agrandir la quantité des carrés à un seul carré[15].

Souvent, les traductions d'Al-Khwarizmi ne permettent pas de saisir le sens profond de l'acte qui sous-tend la règle d'al-gabr. En effet, arrêtons-nous sur le passage suivant, pris du problème précédent:

> «Complète maintenant cent et deux carrés sans les vingt choses en ajoutant vingt choses à cinquante-huit; et il vient cent plus deux carrés égaux à cinquante-huit et vingt choses»

Nous avons traduit ce passage du texte de Rosen, qui dit textuellement:

> Take now the twenty negative things from the hundred and the two squares, and add them to fifty-eight; then a hundred, plus two squares, are equal to fifty-eight dirhems and twenty things.

On voit donc que nous n'avons pas suivi Rosen au pied de la lettre (nous n'avons pas traduit littéralement "Take now ... from..."). En effet, on ne peut pas **prendre** les «vingt choses» de «cent et deux carrés sans les vingt choses» et les ajouter à cinquante-huit, comme fait penser la traduction de Rosen, car on ne peut pas prendre les «vingt choses» de la première expression étant donné qu'elles n'y sont pas![16]

Pour pouvoir saisir le sens de la règle de l'al-gabr, il faut se référer au texte latin de Gerardo de Cremona:

> «Restaura ergo centum et duos census per res que fuerunt diminute, et adde eas quinquaginta octo». (Cremona, Édition Hughes, 1986, p. 249)

On voit donc qu'il s'agit, contrairement à ce que suggère la traduction de Rosen, d'une action qui est menée d'abord sur l'expression incomplète, de façon à la **restaurer** , puis sur l'autre expression.

La traduction à l'anglais de L. C. Karpinski (1915), basée sur la traduction au latin de Robert of Chester, dit ceci:

> «Complete the 100 plus $2x^2$ less 20x by adding the 20x to 58. This gives 100 units + $2x^2$ equal to 58 units and 20x.»

La traduction moderne de Karpinski perd le sens du rôle que jouent les vingt racines comme un terme qu'on a enlevé du terme cent et deux carrés et qui rend donc ce terme momentanément incomplet.

---

[15] C'est donc la règle de l'al-gabr celle qui concerne le calcul sur les nouveaux objets (la racine et le carré). C'est possible que ce soit la nouveauté qu'elle représente qui ait donné par la suite son nom à la nouvelle discipline, et que ce ne soit pas juste un hasard que le mot al-muquabala ait été abandonné...

[16] On peut aussi remarquer que dans la traduction de Rosen, le terme «the twenty <u>negative</u> things» n'a de sens qu'à l'intérieur d'un cadre conceptuel dans lequel le nombre négatif aurait été déjà développé. Et, chez Al-Khwarizmi, ce n'est pas le cas.

Les considérations précédentes nous mènent au résultat suivant:

Dans la soustraction algébrique, chez Al-Khwarizmi, le "tout" (c'est-à-dire le terme auquel on retranche ou on enlève une certaine partie) garde encore sa trace originale après la soustraction. C'est pourquoi il peut être restauré. Dans la conceptualisation moderne, quand on enlève 20 x de 100 + x^2, on obtient une expression différente, 100 + x^2 -20x. On dirait une expression sans passé.
On voit donc que l'al-gabr est liée à une conceptualisation particulière de la soustraction: il s'agit d'une soustraction dans laquelle les termes qui interviennent (disons A et B, si nous désignos par A-B la soustraction en question) gardent encore son identité; c'est la permanence du terme A auquel on enlève B et la permanence du terme B qui donnent le sens à la règle d'al-gabr.

L'obtention de l'équation qui traduit l'énoncé d'un problème est une étape du processus de résolution. Cette étape pose des difficultés d'intensité différente. Le type de problème le plus simple serait celui pour lequel l'organisation des données du problème permettant d'arriver à une équation se trouve indiqué dans l'énoncé du problème. Un problème de ce type (dont un exemple le constitue le problème cinq d'Al-Khwarizmi, cité ci-dessus) permet en effet l'économie de la recherche heuristique de l'équation. Ce type de problème est tel que la "distance" entre son énoncé et une équation le traduisant est minimale[17]. Ce sont justement ces problèmes-là les plus répandus au commencement du développement de l'algèbre[18]. Mais, bien sûr, même si l'équation peut être facilement déduite de l'énoncé, il faut encore disposer d'un certain nombre de connaissances permettant de transformer l'équation en une équation de l'un des "six types" canoniques, donnés par Al-Khwarizmi (v.gr. des connaissances syntactiques et des connaissances sémantiques qui vont être à la base des calculs sur les expressions et qui vont évoluer au fur et à mesure que le nouveau langage algébrique et la "nouvelle matière" -pour reprendre l'expression de Diophante- se mettent en place, en passant, en particulier, d'un niveau rhétorique à un niveau symbolique).

§5 Synthèse...

Notre critère analytico-opératoire pour qu'une procédure de résolution de problèmes soit considérée comme relevant de l'«algèbre», nous a amené à classifier les procédures arithmétiques de fausse position qu'on trouve dans les tablettes babyloniennes VAT 8389 et VAT 8391 comme non-algébriques. De plus, les procédures qui relèvent de la géométrie du collage seraient aussi, d'après notre critère, des procédures non-algébriques. Cependant, nous avons vu que la méthode babylonienne de fausse position mentionnée au §2 (bien qu'il y aussi d'autres exemples: cf. Thureau-Dangin, 1938; Radford 1993a) semble avoir été historiquement un préalable conceptuel de la méthode analytico-opératoire de Diophante. La géométrie du collage apparaît plutôt comme relevant d'une "tradition" parallèle à celle de l'algèbre et qui n'arrive vraiment à se fondre avec celle-ci que dans l'oeuvre de Al-Khwarizmi, avec ses preuves géométriques (Cf. Høyrup, 1986).
Avec le *Traité Concis*, un nouveau programme de recherche commence: la recherche de nouveaux problèmes, des nouvelles méthodes, des nouveaux concepts. L'impossibilité

---

[17]Cette propriété qu'ont certains problèmes d'induire l'équation à partir de leur énoncé, a été mis en évidence dans (Radford, 1992b), où elle est désignée par la propriété de la direction vectorielle: la direction (énonciative ou pragmatique) de l'énoncé est la même que celle de l'équation. Énoncé et équation sont *parallèles*.

[18]Voici quelques autres exemples: «Il y a deux nombres, dont la différence est deux dirhams. J'ai divisé le petit par le grand et le quotient était la moitié d'un dirham.» (Rosen, p. 50) [En notations modernes: $x/(x+2) = 1/2$]. «J'ai partagé dix en deux parties; j'ai multiplié une de ces parties par dix et l'autre par soi-même, et les produits étaient les mêmes.» (Rosen, p. 51) [En notations modernes: $10x = (10 - x)^2$]

d'intégrer plus d'une inconnue analytique opératoire dans les calculs forcera pendant long temps les mathématiciens à se trouver des moyens pour résoudre des problèmes qui concernent plusieurs inconnues (c'est le cas des mathématiciens abbaquistes, c'est-à-dire des mathématiciens italiens du Haut Moyen Age). La géométrie fournira un vaste ensemble de représentations qui permettront (à travers en particulier la théorie des proportions) de pallier les limitations qu'impose l'algèbre à une inconnue: c'est le cas notamment de Fibonacci (cf. Radford, 1993b). L'étude de la résolution des équations de degré supérieur prendra ensuite la relève, avec Bombelli et Cardan, entre autres. Viète, à son tour, fournira une organisation de l'algèbre sur des nouvelles bases (Rojano & Sutherland, 1993; Charbonneau et Lefebvre, 1991), où la géométrie sera encore omniprésente. Au fur et à mesure que le langage algébrique se peuple de représentations symboliques propres, l'évacuation des représentations géométriques sera possible, ce qui donnera comme résultat, au temps d'Euler, une algèbre «arithmétisée», en donnant ainsi l'impression (fausse) que l'algèbre n'*est* qu'une arithmétique généralisée...

Références:

Barbin, E. 1993. La pensée mathématique dans l'histoire et dans la classe. *Bulletin de l'Association des Professeurs de Mathématique de l'Enseignement Public de France*. 388: 136-156.

Bednarz, N., Radford, L., Janvier, B., Lepage, A. 1992. Arithmetical and Algebraic Thinking in problem-solving. Proceedings of the Sixteenth Conference of the international group for the Psychology of Mathematics Education (PME), New Hampshire, Vol. 1, pp. 65-72.

Busard, H.L. 1968. L'algèbre au moyen âge: Le «Liber Mensurationum» d'Abû Bekr. *Journal des Savants*, Avril, -juin, 65-125.

Charbonneau, L., Lefebvre, J. 1991. Une lecture de Viète. Introduction à l'art analytique. Cinq Livres des Zététiques. CIRADE, Université du Québec à Montréal. 72 pages.

Filloy, E.; Rojano, T. 1984. "La aparición del lenguaje Aritmético-Algebraico". *L'Educazione Matematica*. Anno V. 3: 278-306.

Filloy, E.; Rojano, T. 1989. Solving equations: The transition from the arithmetic to Algebra. *For the Learning of Mathematics*, 9, 2, pp. 19-25.

Gandz, S. 1938. The origin and development of the quadratic equations in Babylonian, Greek and early Arabic algebra. *Osiris*, Vol. 3, pp. 405-557.

Høyrup, J.1986. Al-Kharizmi, Ibn Turk, and the Liber mensurationum: on the origins of Islamic Algebra. *Erdem* 2, pp. 445-484

Hughes, B. 1986. Gerard of Cremona's Translation of Al-Khwarizmi Al-jabr: A Critical Edition.. Vol XLVIII, pp. 211- 263

Karpinski, L.C. 1915. *Robert of Chester's Latin Translation of the Algebra of Al-Khowarizmi*. New York: The Macmillan company.

Radford, L. 1992a "Diophante et l'Algèbre pré-symbolique. *Bulletin de l'Association Mathématique du Québec*, 31/32 (4/1), pp. 73-80. Reprint: *L'Ouvert*. IREM de Strasbourg, No. 68, pp. 1-13.

Radford, L. 1992b. Le raisonnement algébrique dans la résolution de problèmes écrits: un modèle d'interaction de représentations. *Actes du Colloque portant sur l'émergence de l'algèbre*. CIRADE, Université du Québec à Montréal, pp. 45-64.

Radford, L. 1993a. Le raisonnement algébrique. Une réflexion épistémologique. *Actes de Colloque "Eleve, école, Société."* Radford, L. et Mesquita, A. (Eds.) CIRADE. Université du Québec à Montréal. 33-45.

Radford, L. 1993b. *L'évolution des idées algébriques. Une étude historico-didactique.* Ecole des sciences de l'éducation. Université Laurentienne, 32 pages.

Rashed, R. 1985. *Entre l'Arithmétique et l'algèbre. Recherches sur l'histoire des mathématiques arabes.* Les belles letres. Paris

Rojano, T., Southerland, R. 1993. La sintaxis Algebraica en el Proyecto Viético. *In*: *Memorias del Tercer Simposio Internacional sobre Investigación en Educación Matemática. Historia de las Ideas Algebráicas.* E. Filloy, L. Puig (eds.).Mexico: CINVESTAV, pp. 117-130.

Rosen, F. (éd.) 1831. *The algebra of Mohammed Ben Musa.* London: Oriental translation Fund.

Thomaidis, Y. 1993. Negative Numbers in the early 17th Century: An Approach for Didactic Reasons. *Science & Education.* Vol. 2, No. 1, pp. 69-86.

Thureau-Dangin, F. 1938a. *Textes mathématiques babyloniens.* Leyde, Brill. Ex Oriente Lux, I.

Thureau-Dangin, F. 1938b. La méthode de fausse position et l'origine de l'algèbre. *Revue d'assyriologie et d'archéologie orientale*, Vol. 35, pp. 71-77.

Ver Eeck, P. 1926. *Diophante d'Alexandrie. Les six livres arithmétiques et le Livre des nombres polygones.* Desclée de Brouwer. Liege. (Réimpressión: Albert Blanchard, Paris 1959).

Youschkevitch, A. 1976. *Les mathématiques arabes* (VIIIe - XVe siècles). Paris: Vrin.