LA MÉTHODE DES AIRES CHEZ EUCLIDE

Philippe BRIN, Martine BÜHLER
Groupe M:A.T.H. IREM Paris VII

L'atelier présentait , aussi simultanément que possible, la méthodes des aires chez Euclide et l'exploitation en classe de certains extraits des *Eléments*. La traduction utilisée est celle de Peyrard (réédition Blanchard) car nous avions besoin, non seulement d'extraits des livres I et II, mais aussi des livres V et VI et la traduction de B. Vitrac aux PUF n'est actuellement parue que pour les quatre premiers livres.

Pour une présentation globale des Eléments, nous renvoyons au compte-rendu de l'atelier de J.P. Friedelmeyer.

Dans le livre I des *Eléments*, Euclide développe la méthode des aires: pour démontrer l'égalité de deux triangles ou deux parallélogrammes, on découpe mentalement les deux figures en morceaux superposables ou on rajoute des morceaux superposables pour obtenir des figures identiques. Il n'y a aucune numérisation dans le livre I des *Eléménts*, Euclide ne mesure pas les aires, il les compare. Il utilise les résultats de base qu'il a démontré au début du livre I: La proposition 4 et la proposition 26 énoncent ce que nous appelons communément les deux premiers cas d'égalité des triangles. Rappelons à ce propos qu'il existe deux notions concernant l'égalité de figures chez Euclide: l'une correspond à la superposabilité (c'est le cas des propositions 4 et 26), l'autre est l'égalité des aires de ces figures. La proposition 29 donne les résultats d'égalité d'angles dues au parallèlisme. En voici l'énoncé: "*Une droite qui tombe sur deux droites parallèles, fait les angles alternes égaux entr'eux, l'angle extérieur égal à l'angle intérieur opposé et placé du même côté, et les angles intérieurs placés du même côté égaux à deux droits*".

La méthode des aires proprement dite débute à la proposition 33: "*Les droites qui joignent, des mêmes côtés, des droites égales et parallèles, sont elles-mêmes égales et parallèles*".

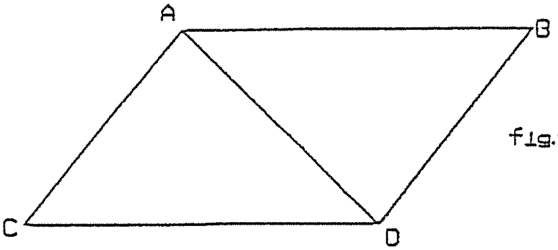


fig.1

La démonstration est une utilisation classique des résultats ci-dessus: (AB) est parallèle à (CD) donc les angles (BAD) et (ADC) sont égaux. Les triangles ABD et ADC ont donc un côté commun, AD, un côté "égal", AB=CD, l'angle compris entre deux côtés "égaux" égal $\angle BAD = \angle ADC \angle BAD = \angle ADC$..Les deux triangles sont donc superposables et l'on a AC =BD ainsi que l'égalité des angles (CAD) et (ADB), d'où l'on tire le parallèlisme des droites (AC) et (BD).

La proposition 34 se démontre de façon analogue: "*Les côtés et les angles opposés des parallélogrammes sont égaux entre eux, et la diagonale les partage en deux parties égales*".

La proposition 35 est la première à utiliser réellement la méthode du "puzzle mental" décrite en introduction. C'est l'une de celles qu'il nous a paru intéressant de faire étudier aux élèves.

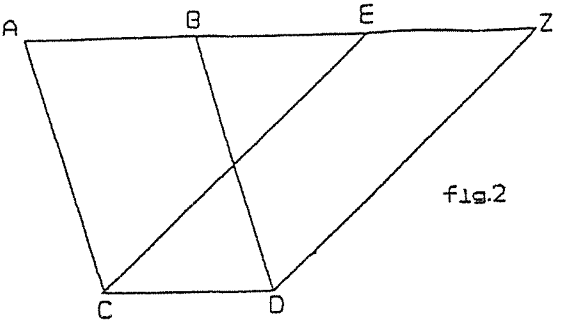


fig.2

Activités avec des élèves.

Nous avons tout d'abord proposé aux élèves de lire la proposition suivante:

Proposition 35: "*Les parallèlogrammes, construits sur la même base et entre les mêmes parallèles, sont égaux entr'eux*".

Le premier travail demandé aux élèves était de type oral. En effet, il nous semblait important, à l'occasion de cette lecture, de dégager les notions mise en oeuvre par Euclide et de lever dès le premier texte, les ambiguïtés générées par celui-ci. La première demande qui leur était faite était donc la lecture de la proposition 35, puis la réalisation d'une figure illustrant cette proposition. Cette étape a fait l'objet d'une vive discussion à propos des expressions "*même base*", et "*égaux entr'eux*". Les élèves ont en général facilement accepté les définitions qui leur étaient proposées, mais l'introduction de l'égalité d'aires associée à l'égalité de 'hauteur" a soulevé un second problème: "Pourquoi démontrer ceci puisque l'aire d'un parallèlogramme est égale au produit de la base par la hauteur?". Cette question a, bien-sûr, été au centre des débats tout au long du travail avec les élèves: comment faire abstraction de connaissances acquises par les élèves au cours de leur scolarité? Heureusement, un grand nombre d'élèves a admis l'intérêt d'un travail sur les aires sans numérisation pour en trouver l'aspect ludique.

La seconde étape a été la lecture de la démonstration d'Euclide. Nous leur avons demandé de dégager les propriétés utilisées ainsi que les notions communes: "*les grandeurs égales à une même grandeur, sont égales entre elles;*" et "*si à des grandeurs égales, des grandeurs égales sont ajoutées, les touts seront égaux*".

Ce travail a permis de reécrire la démonstration d'Euclide en termes modernes. Les élèves ont dans leur ensemble bien cité les propriétés utilisées. L'égalité des angles correspondants leur était familière et le deuxième cas d'égalité des triangles, bien qu'ignoré, leur a semblé "évident" compte tenu de la possibilité qu'ils avaient d'utiliser la translation (voir texte en annexe).

Le second travail qui leur a été demandé portait sur la proposition 36 dont voici l'énoncé:

Proposition 36: "*Les parallèlogrammes, construits sur des bases égales et entre les mêmes parallèles, son égaux entr'eux*".

Le texte de la proposition ainsi que sa démonstration (voir annexe) leur étant fourni, les élèves devaient:

a) Lire la proposition 36 et sa démonstration puis dégager l'architecture de la démonstration.

b) Réécrire la démonstration en citant chaque notion ou théorème utilisés.

Un grand nombre d'élèves a réussi à mettre en évidence les différentes étapes de celle-ci, mais la rédaction a créé beaucoup de difficultés à la plupart d'entre-eux. Ces difficultés portaient en général sur une mauvaise utilisation des mots-clés du raisonnement.

Prop. 37: "*Les triangles construits sur la même base entre les mêmes parallèles sont égaux*".

Prop. 38: "*Des triangles construits sur des bases égales sont égaux entr'eux*".

Les propositions 37 et 38 ont fait l'objet d'un travail plus superficiel, l'accent étant surtout porté sur l'utilisation répétée des propositions précédentes. Les élèves ont tout de même été invités à relever les étapes successives de la proposition 37.

Il est à noter que l'on peut dès à présent démontrer la proposition 41: "*Si un parallèlogramme a la même base qu'un triangle, et s'il est entre les mêmes parallèles, le parallélogramme est double du triangle*".

L'étude de cette proposition n'a pas été effectuée avec les élèves et nous avons donc utilisé les propositions précédentes à chaque fois que cela était nécessaire.

Après l'étude de ces propositions, il était possible de s'intéresser à la proposition 47 du livre I, "Le théorème de Pythagore". Cette fois ci, le travail demandé était moins dirigé puisque les élèves étaient en possession de l'énoncé de la proposition, de sa démonstation par Euclide et d'un plan de travail (voir document annexe). En ce qui concerne le travail effectué par les élèves, nous pouvons signaler que l'exercice a été assez bien compris. Les élèves ont traité correctement les questions 1 à 6 qui n'envisageaient qu'un seul problème à la fois. Par contre, ils ont éprouvé de grosses difficultés à conduire le raisonnement de bout en bout dans la 7e question.

D'autres propositions du livre I.

Nous venons de voir que les 41 premières propositions sont suffisantes pour démontrer la proposition 47, point culminant du livre I. Pourquoi, alors, insérer les autres propositions ? L'intérêt est conforter la théorie: la méthode des puzzles permet toujours de découper une figure polygonale en un rectangle de même aire ayant une base donnée.

Proposition 42: "*Construire, dans un angle rectiligne donné, un parallèlogramme égal à un triangle donné*".

Proposition 44: "*A une droite donnée, et dans un triangle rectiligne donné, appliquer un parallélogramme égal à un triangle donné*".

Tout polygone peut se décomposer en triangles. Donnons-nous un angle (droit par exemple) et une longueur AB. Alors on sait construire, pour chaque triangle intervenant dans le découpage, un rectangle de base AB ayant même aire que le triangle. En "empilant" les rectangles, on obtient un rectangle de base donnée dont l'aire est celle du polygone de départ (voir figure). On peut donc toujours comparer deux polygones.

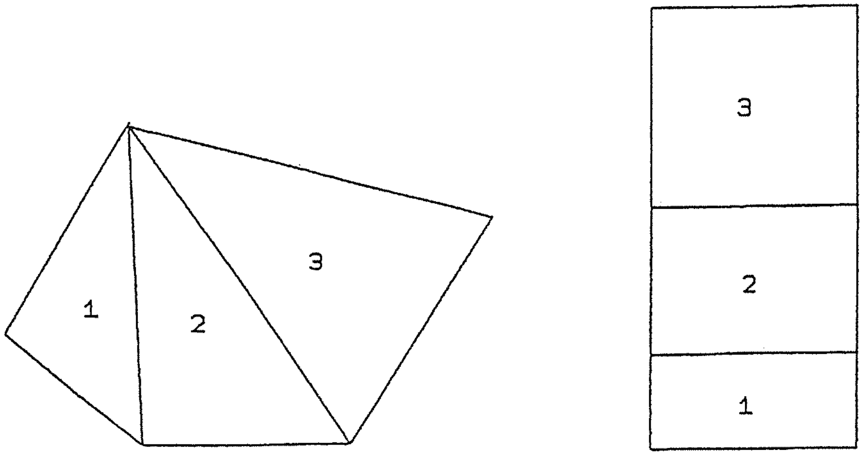


fig.3

Le livre II est une application de la méthode des aires: cette méthode permet de démontrer des égalités d'aires de polygones qui, numérisées et traduites en langage algébrique, sont équivalentes à nos identités remarquables. (Voir à ce sujet les notes de la traduction de Vitrac). Euclide résout également dans ce livre des problèmes de construction. Pour avoir une idée du type de résultats énoncés et démontrés, voici la proposition I du livre II: "*Si l'on a deux droites, et si l'une d'elle est coupée en tant de parties qu'on voudra, le rectangle contenu sous ces deux droites est égal aux rectangles contenus sous la droite qui n'a point été coupée, et sous chacun des segments de l'autre*".

Il est tentant d'algébriser un tel résultat et d'y reconnaître la distrivutivité de la multiplication par rapport à l'addition: $\lambda(a+b+c+d)=\lambda a+\lambda b+\lambda c+\lambda d$

Nous avons avec nos élèves, étudié la proposition II qui résout un problème de construction qu'on peut, à notre époque, ramener à la résolution d'une équation du second degré (voir Mnémosyne n°1).

La méthode des aires permet donc de démontrer des résultats importants (thm de Pythagore) et de résoudre des problèmes du "second degré". Cependant, elle se révèle insuffisante dès que l'on considère des rapports: on voit bien ce que peut signifier: "telle figure (n°1) est à telle autre (n°2) comme 2 est à 3" (si j'assemble trois figures n°1 et deux figures n°2, alors les figures obtenues ont même aire). <u>Mais quel sens donner à une telle comparaison si les aires sont incommensurables</u> (le problème est d'ailleurs le même pour les longueurs)?

Le livre V répond à cette question par la théorie des proportions, probablement due à Eudoxe. Euclide se préoccupe de raisons de grandeurs: ("*une raison, est certaine manière d'être de deux grandeurs homogènes entr'elles, suivant la quantité*") et définit de façon abstraite, mais néanmoins opératoire, l'égalité de raisons.

Définition 6: "*Des grandeurs sont dites être en en même raison, la première à la seconde, et la troisième à la quatrième, lorsque les équimultiples quelconques de la première et de la troisième, et d'autres équimultiples quelconques de la seconde et de la quatrième sont tels que les premiers équimultiples surpassent, chacun à chacun, les seconds équimultiples, ou leur sont égaux à la fois, ou plus petits à la fois*".

<u>Comment dirions-nous la même chose?</u> Soient A,B,C,D, quatre grandeurs. A et B ont même raison que C et D si la condition suivante est respectée: pour m et n dans $\mathbb{N}$, on est toujours dans l'une de situations suivantes:

1) mA>nB et mC > nD
2) mA=nB et mC = nD
3) mA<nB et mC < nD.

Le second cas ne se rencontre que lorsque A et B (donc C et D) sont commensurables. Sinon on est toujours dans l'un des cas 1) ou 2) que l'on peut traduire par:

$$1)\ \frac{m}{n}>\frac{B}{A}\ et\ \frac{m}{n}>\frac{D}{C}\ ou 2)\frac{m}{n}<\frac{B}{A}\ et\ \frac{m}{n}<\frac{D}{C}.$$

On reconnait qu'on a la même raison lorsque, dans les deux cas, le partage des rationnels en rationnels plus petits et rationnels plus grands que la raison donnée est le même. On a envie de parler de coupures.

<u>Comment une définition si abstraite peut-elle s'utiliser pratiquement?</u> On la voit très bien fonctionner dans la proposition 1 du livre VI des éléments.

Proposition 1: "*Les triangles et parallélogrammes qui ont la même hauteur sont entr'eux comme leurs bases*".

Paraphasons Euclide: Soient deux triangles ABC et ACD ayant même hauteur. Prolongeons le segment $[BD]$de part et d'autre, de telle sorte que, d'une part, BC=BE=EF=FG=... et d'autre part, CD=DM=ML=...

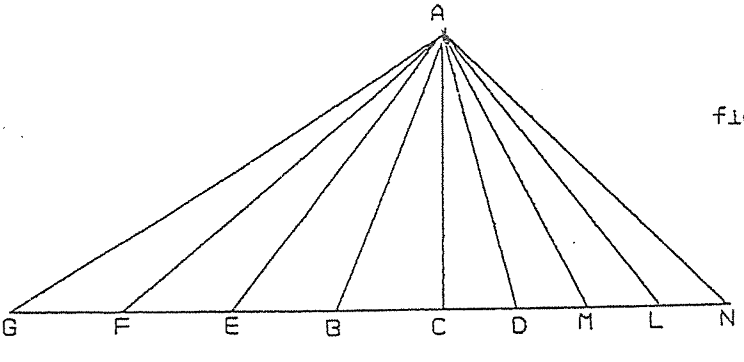


fig.4

Les triangles ABC, ABE, AEF, AFG,... sont égaux puisqu'ils ont même hauteur et que leurs bases sont égales (prop 38 Livre I). Il en est de même des triangles ACD, ADM, AML,.... Donc le triangle ACG et la base CG sont des équimultiples du triangle ABC et de la base BC. De même le triangle ACL et la base CL sont des equimultiples du triangle ACD et de la base CD. Les triangles ayant tous la même hauteur, d'après la proposition 38 du livre I, si la base CG est égale à CL, le triangle ACG est égal au triangle ACL, si la base CG surpasse CL, le triangle ACG surpasse ACL et enfin si la base CG est plus petite que CL alors le triangle ACG est plus petit que le triangle ACL. Nous sommes donc en présence de quatre grandeurs, ABC, ACD, BC, CD, qui vérifient les conditions de la définition 6 du livre V. On peut donc en déduire que les grandeurs ABC et ACD ont même raison que les grandeurs BC et CD. C'est à dire que "ABC est à ACD comme BC est à CD".

Cette propostion (sans sa démonstration) a permis d'étudier, avec les élèves d'une classe de seconde, la démonstration de la proposition 2 du livre VI, appelée "théorème de Thalès": "*Si l'on mène une droite parallèle à un des côtés d'un triangle, cette droite coupera proportionnellement les côtés de ce triangle; et si les côtés d'un triangle sont coupés proportionnellement, la droite qui joindra les sections sera parallèle au côté restant du triangle*".

Nous n'avons étudié avec les élèves que la démonstration dans le sens direct et non sa réciproque en raison du nombre de renvois nécessaires et de la difficulté du raisonnement d'Euclide. Au préalable, nous avions donné la proposition1 sans la démontrer mais en veillant à expliquer le vocabulaire et les expressions utilisées. La notion de proportionnalité avait déjà soulevé de nombreuses questions. Il avait été nécessaire de faire référence à leurs connaissances concernant le calcul de l'aire d'un triangle pour "convaincre" l'ensemble de la classe. Voici donc la façon dont nous avons procédé pour étudier la proposition 2 du livre VI avec les élèves.

Nous leur avons fourni le texte de la proposition ainsi que la traduction que nous leur demandions de lire. Ces textes étaient accompagnés d'un questionnaire que voici:

1) Ecrire en langage moderne les lignes 5 et 6.

2) Montrer l'égalité des aires des triangles $E\Delta\Gamma$ *et* $E\Delta B$ (lignes 8 et 9).

3) Ecrire à l'aide de rapports, l'égalité énoncée lignes 11 et 12.

4) Ecrire à l'aide de rapports, les égalités énoncées ligne 12 et ligne 15 puis les justifier.

5) Ecrire la conclusion à laquelle vous êtes arrivés.

Ce travail était proposé en travaux dirigés et a été l'occasion de nombreuses discussions. Un certain nombre de commentaires s'imposent.

- L'absence de numérisation a été un obstacle pour beaucoup d'élèves.

- La configuration étudiée n'était pas toujours placée "dans le bon sens" (les élèves sont en général habitués à avoir la base "en bas" du triangle et donc la hauteur "verticale") ce qui entraînait une difficulté de compréhension de l'expression: "compris entre les mêmes parallèles".

- L'idée de démontrer ce théorème, maintes fois utilisé mais rarement compris, a paralysé de nombreux élèves, focalisés sur le résultat.

- Enfin, il faut préciser que nous n'avons pas abordé la réciproque du théorème en raison de la lourdeur des pré-requis nécessaires à sa démonstration.

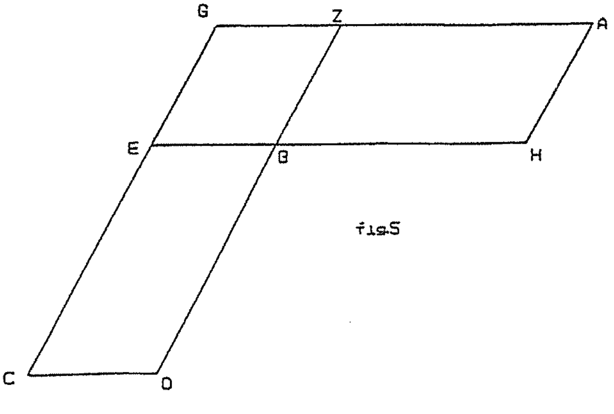
Certains élèves (les meilleurs) ont bien senti l'intérêt de la démarche et ont "joué le jeu" de la démonstration euclidienne. En ce qui concerne les autres élèves, il nous a semblé que seuls quelques élèves en grande difficulté ont su profiter d'une nouvelle façon de présenter ce théorème. Ils s'en sont trouvés valorisés, car ils n'étaient plus en échec par rapport à l'ensemble de la classe. Les élèves "moyens" ont souvent considéré cet exercice comme une "bizarrerie" de leur professeur. Pour autant, on peut considérer que l'ensemble de la classe a admis cette démonstration, même si tous n'ont pas été convaincus par son utilité.

Pour achever notre propos, nous nous intéresserons aux propositions 12, 14 et 23 du livre VI qui illustrent bien les possibilités de la méthode des aires.

Proposition 12: "*Trois droites étant données, trouver une quatrième proportionnelle*".

AB, BC, AD étant des longueurs données, telles que A,B,C soient alignés et D ne soit pas sur la droite (AB), on trace la parallèle à BD passant par C. Elle coupe (AD) au point E. Alors, d'après la proposition VI2, AB est à BC comme AD est à DE. On a ainsi construit la quatrième proportionnelle.

Proposition 14: "*Deux parallélogrammes étant égaux et équiangles, les côtés autour des angles égaux sont réciproquement proportionnels; et les parallélogrammes équiangles dont les côtés autour des angles sont réciproquement proportionnels, sont égaux entr'eux*".



Comme dans les *Eléments*, les parallélogrammes seront notés par une de leurs diagonales.

Le parallélogramme AB est au parallélogramme ZE comme le parallélogramme BC est au parallélogramme ZE (puisque #AB = #BC). Mais le parallélogramme AB est au parallélogramme ZE comme BD est à BE (Prop.VI 1). De même le parallélogramme BC est au parallélogramme ZE comme BH est à BZ. Donc BD est à BE comme BH est à BZ (nous dirons :

$\frac{BD}{BE}=\frac{BH}{BZ}$,c'est à dire que les côtés autour des angles sont réciproquement proportionnels).

La réciproque s'obtient de la même façon.

Proposition 23: "Les parallélogrammes ont entr'eux une raison composée[1] des côtés".

Soit K une longueur quelconque et L une longueur telle que BC est à CH comme K est à L. Soit de plus d'une longueur M telle que DC est à CE comme L est à M. L'existence d'une quatrième proportionnelle, assurée par la proposition VI 12, permet d'assurer l'existence de L, puis celle de M, donc de parler de la raison de K à M, composée des raisons de K à L et de L à M, c'est à dire composée des raisons de BC à CH et de DC à CE (raison composée des côtés[2]). Le parallélogramme BD est au parallélogramme CG comme BC est à CH, i.e. comme K est à L. Le parallélogramme CG est au parallélogramme CZ comme DC est à CE, i.e. comme L est à M, donc le parallélogramme BD est au parallélogramme CZ comme K est à M, i.e. comme la raison composée des côtés. Un mathématicien moderne transcrira la raison des rapports de réels et écrira $\frac{a_1}{a_2}=\frac{l_1L_1}{l_2L_2}$: l'aires des parallélogrammes équiangles est proportionnelle au produit des côtés. Evidence ou pas?

La méthode des puzzles fonctionne bien lorsque les côtés sont rationnels, mais sinon? On peut toujours remplir un rectangle avec un quadrillage de plus en plus fin, puis effectuer un passage à la limite.

Ce que prouve le livre VI, c'est que le résultat de base sur l'aire des rectangles ne nécessite aucun passage à la limite, qu'il ne relève pas du calcul infinitésimal et peut se démontrer avec comme seuls outils la méthode des aires et, bien sûr, la théorie des proportions.

Qu'en est-il dans l'espace? La "pièce" de base est alors la pyramide et on ne peut pas concevoir de méthode équivalente à la méthode des aires pour en calculer le volume. Euclide, lui-même, utilise la méthode dite d'exhaustion qui s'apparente à un calcul infinitésimal sans avoir recours à l'infini. (Pour plus d'informations à ce propos, voir "Histoires de pyramides" de Michèle Grégoire, Mnémosyne Numéro spécial I, édité par l'IREM de Paris VII).

---

[1] Précisons ce qu'est une raison composée: soit trois grandeurs homogènes A, B, C. La raison composée des raisons de A à B et de B à C est la raison de A à C. On ne peut donc composer des raisons que par l'intermédiaire de raisons ayant un terme commun, ce qui explique la lourdeur de la démonstration.

[2] Euclide a d'ailleurs montré au livre V que cette notion de raison composée a bien un sens. Si on choisit K'#K, alors on peut définir L' et M' comme L et M et il montre que la raison de K' à M' est égale à celle de K à M.

LE PREMIER LIVRE

DES ELEMENTS D'EUCLIDE

DEFINITIONS

1. Le point est ce dont la partie est nulle.
2. Une ligne est une longueur sans largeur.
3. Les extrémités d'une ligne sont des points.
4. La ligne droite est celle qui est également placée entre ses points.

30. Parmi les figures quadrilatères, le quarré est celle qui est équilatérale et rectangulaire.
31. Le rectangle, celle qui est rectangulaire, et non équilatérale.
32. La rhombe, celle qui est équilatérale, et non rectangulaire.
33. Le rhomboïde, celle qui a ses côtés et ses angles opposés égaux entre eux, et qui n'est ni équilatérale ni rectangulaire.
34. Les autres quadrilatères, ceux-là exceptés, se nomment trapèzes.
35. Les parallèles sont des droites, qui, étant situées dans un même plan, et étant prolongées à l'infini de part et d'autre, ne se rencontrent ni d'un côté ni de l'autre.

DEMANDES

1. Conduire une droite d'un point quelconque à un point quelconque.
2. Prolonger indéfiniment, selon sa direction, une droite finie.
3. D'un point quelconque, et avec un intervalle quelconque, décrire une circonférence de cercle.
4. Tous les angles droits sont égaux entre eux.
5. Si une droite, tombant sur deux droites, fait les angles intérieurs du même côté plus petits que deux droits, ces droites, prolongées à l'infini, se rencontreront du côté où les angles sont plus petits que deux droits.
6. Deux droites ne renferment point un espace.

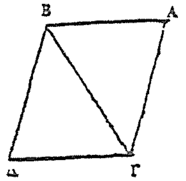
NOTIONS COMMUNES

1. Les grandeurs égales à une même grandeur, sont égales entre elles.
2. Si à des grandeurs égales, on ajoute des grandeurs égales, les touts seront égaux.
3. Si de grandeurs égales, on retranche des grandeurs égales, les restes seront inégaux.
4. Si à des grandeurs inégales, on ajoute des grandeurs égales, les touts seront inégaux.
5. Si de grandeurs inégales, on retranche des grandeurs égales, les restes seront inégaux.
6. Les grandeurs, qui sont doubles d'une même grandeur, sont égales entre elles.
7. Les grandeurs, qui sont les moitiés d'une même grandeur, sont égales entre elles.
8. Les grandeurs, qui s'adaptent entre elles, sont égales entre elles.
9. Le tout est plus grand que la partie.

PROPOSITION XXXIII

Les droites qui joignent, des mêmes côtés, des droites égales et parallèles, sont elles-mêmes égales et parallèles.

Soient AB, ΓΔ deux droites égales et parallèles; que les droites AΓ, BΔ les joignent des mêmes côtés; je dis que les droites AΓ, BΔ sont égales et parallèles.
Joignons BΓ.



Puisque AB est parallèle à ΓΔ, et que BΓ tombe sur ces droites, les angles alternes ABΓ, BΓΔ sont égaux entr'eux (29). De plus, puisque AB est égale à ΓΔ, et que la droite BΓ est commune, les deux droites AB, BΓ sont égales aux deux droites ΓΔ, BG; mais l'angle ABΓ est égal à l'angle BΓΔ; donc la base AΓ est égale à la base BΔ, le triangle ABΓ est égal au triangle BΓΔ, et les angles restants, opposés à des côtés égaux, seront égaux, chacun à chacun (4); donc l'angle AΓB est égal à l'angle ΓBΔ. Mais la droite BΓ tombant sur les deux droites AΓ, BΔ fait les angles alternes AΓB, ΓBΔ égaux entr'eux; donc la droite AΓ est parallèle à la droite BΔ (27). Mais on a démontré qu'elle lui est égale; donc, etc.

PROPOSITION XXXIV

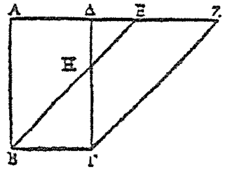
Les côtés et les angles opposés des parallélogrammes sont égaux entr'eux, et la diagonale les partage en deux parties égales.

Soit le parallélogramme AΓΔB, et que BΓ soit sa diagonale; je dis que les côtés et les angles opposés du parallélogramme AΓΔB sont égaux entr'eux, et que la diagonale BΓ le partage en deux parties égales.

PROPOSITION XXXV

Les parallélogrammes, construits sur la même base et entre les mêmes parallèles, sont égaux entr'eux.

Que les parallélogrammes ABΓΔ, EBΓZ soient construits sur la même base BΓ, et entre les mêmes parallèles AZ, BΓ; je dis que le parallélogramme ABΓΔ est égal au parallélogramme EBΓZ.

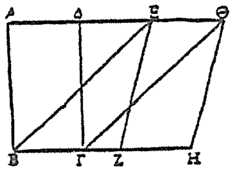


Car puisque ABΓΔ est un parallélogramme, AΔ est égal à BΓ (34); par la même raison, EZ est égale à BΓ; donc AΔ est égal à EZ; mais la droite ΔE est commune; donc la droite totale AE est égale à la droite totale ΔZ (not. 2); mais AB est égal à ΔΓ (34); donc les deux droites EA, AB sont égales aux deux droites ZΔ, ΔΓ, chacune à chacune; mais l'angle extérieur ZΔΓ est égal à l'angle intérieur EAB (29); donc la base EB est égale à la base ZΓ (4); donc le triangle EAB sera égal au triangle ΔΓZ. Retranchons la partie commune ΔHE; le trapèze restant ABHΔ sera égal au trapèze restant EHΓZ (not. 3); ajoutons le triangle commun HBΓ, le parallélogramme total ABΓΔ sera égal au parallélogramme total EBΓZ. Donc, etc.

PROPOSITION XXXVI

Les parallélogrammes, construits sur des bases égales et entre les mêmes parallèles, sont égaux entr'eux.

Que les parallélogrammes ABΓΔ, EZHΘ soient construits sur des bases égales BΓ, ZH, et entre les mêmes parallèles AΘ, BH; je dis que le parallélogramme ABΓΔ est égal au parallélogramme EZHΘ.



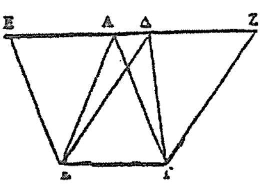
Joignons BE, ΓΘ.

Puisque BΓ est égal à ZH, et ZH égal à EΘ, la droite BΓ est égale à EΘ; mais les droites BE, ΓΘ joignent ces droites qui sont parallèles, et les droites qui joignent des mêmes côtés deux droites égales et parallèles, sont égales et parallèles (35); donc les droites EB, ΓΘ sont égales et parallèles; donc EBΓΘ est un parallélogramme, et ce parallélogramme est égal au parallélogramme ABΓΔ (35); car il a la même base BΓ que lui, et il est construit entre les mêmes parallèles. Par la même raison le parallélogramme EZHΘ est égal au parallélogramme EBΓΘ; donc le parallélogramme ABΓΔ est égal au parallélogramme EZHΘ. Donc, etc.

PROPOSITION XXXVII

Les triangles, construits sur la même base et entre les mêmes parallèles, sont égaux.

Que les triangles ABΓ, ΔBΓ soient sur la même base BΓ et entre les mêmes parallèles AΔ, BΓ; je dis que le triangle ABΓ est égal au triangle ΔBΓ.



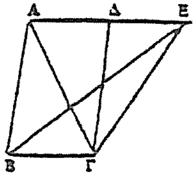
PROPOSITION XXXVIII

Des triangles, construits sur des bases égales et entre les mêmes parallèles, sont égaux entr'eux.

Que les triangles ΑΒΓ, ΔΕΖ soient construits sur des bases égales ΒΓ, ΕΖ et entre les mêmes parallèles ΒΖ, ΑΔ; je dis que le triangle ΑΒΓ est égal au triangle ΔΕΖ.

PROPOSITION XLI

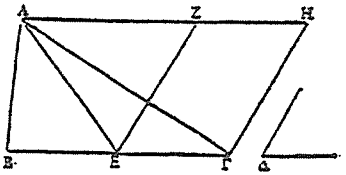
Si un parallélogramme a la même base qu'un triangle, et s'il est dans les mêmes parallèles, le parallélogramme est double du triangle.



PROPOSITION XLII

Construire, dans un angle rectiligne donné, un parallélogramme égal à un triangle donné.

Soit ΑΒΓ le triangle donné, et Δ l'angle rectiligne donné; il faut construire un parallélogramme égal au triangle ΑΒΓ dans l'angle rectiligne Δ.



Coupons la droite ΒΓ en deux parties égales en Ε (10), joignons ΑΕ, sur la droite ΕΓ, et au point Ε de cette droite construisons un angle ΓΕΖ égal à l'angle Δ (25), par le point Α conduisons ΑΗ parallèle à ΕΓ (31), et par le point Γ conduisons ΓΗ parallèle à ΕΖ; la figure ΖΕΓΗ sera un parallélogramme.

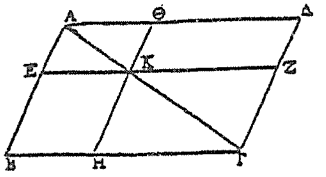
Puisque ΒΕ est égal à ΕΓ, le triangle ΑΒΕ est égal au triangle ΑΕΓ (38), car ils sont sur des bases égales ΒΕ, ΕΓ, et entre les mêmes parallèles ΒΓ, ΑΗ; donc le triangle ΑΒΓ est double du triangle ΑΕΓ. Mais le parallélogramme ΖΕΓΗ est double du triangle ΑΕΓ (41), car il a la même base que lui, et il est dans les mêmes parallèles; donc le parallélogramme ΖΕΓΗ est égal au triangle ΑΒΓ (not.6), et il a l'angle ΓΕΖ égal à l'angle donné Δ.

Donc le parallélogramme ΖΕΓΗ a été construit égal au triangle ΑΒΓ dans un angle qui est ΓΕΖ égal à l'angle donné Δ; ce qu'il fallait faire.

PROPOSITION XLIII

Dans tout parallélogramme, les compléments des parallélogrammes, autour de la diagonale, sont égaux entr'eux.

Suit le parallélogramme ΑΒΓΔ, que ΑΓ soit sa diagonale, qu'autour de ΑΓ soient les parallélogrammes ΕΘ, ΖΗ, et les parallélogrammes ΒΚ, ΚΔ qu'on appelle compléments; je dis que le complément ΒΚ est égal au complément ΚΔ.



Car puisque ΑΒΓΔ est un parallélogramme, et que ΑΓ est sa diagonale, le triangle ΑΒΓ est égal au triangle ΑΓΔ (34). De plus, puisque ΕΚΘΑ est un parallélogramme, et que ΑΚ est sa diagonale, le triangle ΑΕΚ est égal au triangle ΑΘΚ; le triangle ΚΖΓ est égal au triangle ΚΗΓ, par la même raison; donc puisque le triangle ΑΕΚ est égal au triangle ΑΘΚ, et le triangle ΚΖΓ égal au triangle ΚΗΓ, le triangle ΑΕΚ, avec le triangle ΚΗΓ, est égal au triangle ΑΘΚ avec le triangle ΚΖΓ; mais le triangle entier ΑΒΓ est égal au triangle entier ΑΔΓ; donc le complément restant ΒΚ est égal au complément restant ΗΔ (not. 3). Donc, etc.

PROPOSITION XLIV

A une droite donnée, et dans un angle rectiligne donné, appliquer un parallélogramme égal à un triangle donné.

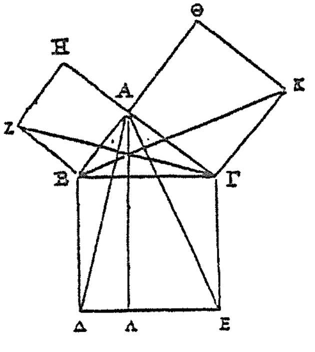
Que ΑΒ soit la droite donnée, Γ le triangle donné, et Δ l'angle rectiligne donné; il faut sur la droite ΑΒ et dans un angle égal à Δ, appliquer un parallélogramme égal au triangle donné Γ.

PROPOSITION XLVII

Dans les triangles rectangles, le quarré du côté opposé à l'angle droit est égal aux quarrés des côtés qui comprennent l'angle droit.

Soit ΑΒΓ un triangle rectangle, que ΒΑΓ soit l'angle droit; je dis que le quarré du côté ΒΓ est égal aux quarrés des côtés ΒΑ, ΑΓ.

Décrivons avec ΒΓ le quarré ΒΔΕΤ, et avec ΒΑ, ΑΓ les quarrés ΗΒ, ΔΓ; et par le point Α conduisons ΑΛ parallèle à l'une ou l'autre des droites ΒΔ, ΓΕ; et joignons ΑΔ, ΖΓ.



Puisque chacun des angles BAΓ, BAH est droit, les deux droites AΓ, AH, non placées du même côté, font avec la droite BA au point A de cette droite, deux angles de suite égaux à deux droits; donc la droite ΓA est dans la direction de AH; la droite BA est dans la direction AΘ, par la même raison. Et puisque l'angle ΔBΓ est égal à l'angle ZBA, étant droits l'un et l'autre, si nous leur ajoutons l'angle commun ABΓ, l'angle entier ΔBA sera égal à l'angle entier ZBΓ (not. 4). Et puisque ΔB est égal à BΓ, et ZB à BA, les deux droites ΔB, ΔA sont égales aux deux droites ΓB, BZ, chacune à chacune; mais l'angle ΔBA est égal à l'angle ZBΓ; donc la base AΔ est égale à la base ZΓ, et le triangle ABΔ égal au triangle ZBΓ (4). Mais le parallélogramme BΔ est double du triangle ABΔ (41), car ils ont la même base BΔ et ils sont entre les mêmes parallèles BΔ, AΛ; le quarré BH est double du triangle ZBΓ, car ils ont la même base BZ et ils sont entre les mêmes parallèles ZB, HΓ; et les grandeurs qui sont doubles de grandeurs égales, sont égales entr'elles; donc le parallélogramme BΛ est égal au quarré HB. Ayant joint AE, BK, nous démontrerons semblablement que le parallélogramme ΓΛ est égal au quarré ΘΓ; donc le quarré entier BΔEΓ est égal aux deux quarrés HB, ΘΓ. Mais le carré BΔEΓ est décrit avec BA, AΓ; BA, AΓ; donc le quarré du côté BΓ est égal aux quarrés des côtés BA, AΓ. Donc dans les triangles, etc.

LE DEUXIEME LIVRE

DES ELEMENTS D'EUCLIDE

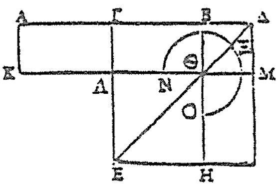
PROPOSITION VI

Si une ligne droite est coupée en deux parties égales, et si on lui ajoute directement une droite, le rectangle compris sous la droite entière avec la droite ajoutée, et sous la droite ajoutée, avec le quarré de la moitié de la droite entière, est égal au quarré décrit avec la droite composée de la moitié de la droite entière et de la droite ajoutée, comme avec une seule droite.

Qu'une ligne droite AB soit coupée en deux parties égales au point Γ; qu'on lui ajoute directement une autre droite BΔ; je dis que le rectangle compris sous AΔ, ΔB, avec le quarré de ΓB, est égal au quarré de ΓΔ.

Avec la droite ΓΔ décrivons le quarré ΓΕΖΔ (46.I); joignons ΔΕ; par le point B conduisons BH parallèle à l'une ou à l'autre des droites ΓΕ, ΔΖ (3I. I); par le point Θ, conduisons KM parallèle à l'une ou à l'autre des droites AΔ, EZ, et enfin par le point A conduisons AK parallèle à l'une ou à l'autre des droites ΓΛ, ΔM.

Puisque AΓ est égal à ΓB, le rectangle AΛ est égal au rectangle ΓΘ (56.I). Mais le rectangle ΓΘ est égal au rectangle ΘZ (43.I); donc le rectangle ΛA est égal au rectangle ΘZ; ajoutons le rectangle commun ΓM, le rectangle entier AM sera égal au gnomon NΞO. Mais AM est le rectangle sous AΔ, ΔB, car ΔM est égal à ΔB (4.2); donc le gnomon NΞO est égal au rectangle compris sous AΔ, ΔB. Ajoutons le quarré ΛH qui est égal au quarré de ΓB, le rectangle compris sous AΔ, ΔB avec le quarré de ΓB sera égal au gnomon NΞO et au



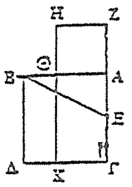
quarré ΛH. Mais le gnomon NΞO, et le quarré ΛH sont le quarré entier ΓΕΖΔ, qui est le quarré de ΓΔ; donc le rectangle compris sous AΔ, ΔB avec le quarré de ΓB est égal au quarré de ΓΔ. Donc, etc.

PROPOSITION XI

Couper une droite donnée, de manière que le rectangle compris sous la droite entière et l'un des segments, soit égal au quarré du segment restant.

Soit AB la droite donnée; il faut couper AB de manière que le rectangle compris sous la droite entière et l'un des segments, soit égal au quarré du segment restant.

Avec la droite AB décrivons le quarré ABΔΓ (46.I); coupons AΓ en deux parties égales au point E (10.I); joignons BE, prolongeons ΓA vers Z; faisons EZ égal à BE (3.I); décrivons avec AZ le quarré ZΘ; et prolongeons HΘ vers K; je dis que la droite AB est coupée en Θ, de manière que le rectangle compris sous AB, BΘ est égal au quarré de AΘ.

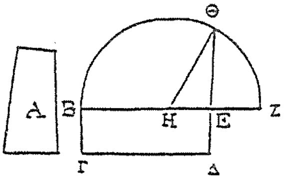


Puisque la droite AΓ est coupée en deux parties égales en E, que AZ lui est ajoutée; le rectangle compris sous les droites ΓZ, ZA avec le quarré de AE est égal au quarré de EZ (6.2). Mais EZ est égal à EB; donc le rectangle compris sous ΓZ, ZA avec le quarré de AE, est égal au quarré de EB. Mais les quarrés des droites BA, AE sont égaux au quarré de EB (47.I), car l'angle en A est droit; donc le rectangle sous ΓZ, ZA avec le quarré de AE est égal aux quarrés des droites BA, AE. Retranchons le quarré de AE; le rectangle restant compris sous ΓZ, ZA sera égal au quarré de AB. Mais le rectangle sous les droites ΓZ, ZA est le rectangle ZK, parce que AZ est égal à ZH, et le quarré de AB est le quarré AΔ; donc le rectangle ZK est égal au quarré AΔ. Retranchons le rectangle commun AK; le quarré restant ZΘ sera égal au rectangle GΔ. Mais ZΘ est le quarré de AΘ, et ΘΔ est le rectangle sous AB, BΘ; donc le rectangle compris sous AB, BΘ est égal au quarré de ΘA.

Donc la droite AB est coupée en Θ, de manière que le rectangle compris sous AB, BΘ est égal au quarré de ΘA; ce qu'il fallait faire.

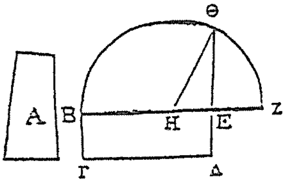
PROPOSITION XIV

Construire un quarré égal à une figure rectiligne donnée.
Soit A la figure rectiligne donnée; il faut construire un quarré égal à cette figure rectiligne.



Construisons un parallélogramme rectangle BΔ égal à la figure rectiligne donnée A (45.I). Si BE était égal à EΔ, on aurait fait ce qui était proposé; car le quarré BΔ aurait été construit égal à la figure rectiligne A. Si cela n'est pont, l'un des côtés BE, EΔ est plus grand que l'autre. Que BE soit le plus grand, prolongeons-le vers Z, et faisons EZ égal à EΔ (3.I); coupons BZ en deux parties égales au point H; du centre H et d'un intervalle égal à l'une des droites HB, HZ, décrivons la demi-circonférence BΘZ (dem.3); prolongeons ΔE vers Θ, et joingons HΘ.

Puisque BZ est partagé en deux parties égales au point H, et en deux parties inégales au point E; le rectangle compris sous BE, EZ avec le quarré de HE, est égal au quarré de HZ (5.2). Mais HZ est égal à HΘ; donc le rectangle compris sous BE, EZ avec le quarré de HE est égal au quarré de HΘ. Mais les quarrés des droites ΘE, EH sont égaux au quarré de HΘ (47.I); donc le



rectangle compris sous BE, EZ avec le quarré de HE, est égal aux quarrés de droites ΘE, EH. Retranchons le quarré commun de HE; le rectangle restant compris sous BE, EZ sera égal au quarré de EΘ. Mais le rectangle compris sous BE, EZ est le rectangle compris sous BE, EΔ, puisque la droite EZ est égale à la droite EΔ; donc le parallélogramme BΔ est égal au quarré de ΘE. Mais BΔ est égal à la figure rectiligne A; donc la figure rectiligne A est égale au quarré de EΘ.

Donc le quarré décrit avec EΘ a été construit égal à la figure rectiligne donnée A; ce qu'il fallait faire.

FIN DU DEUXIEME LIVRE

LE CINQUIEME LIVRE

DES ELEMENTS D'EUCLIDE

DEFINITIONS

1. Une grandeur est partie d'une grandeur, la plus petite de la plus grande, quand la plus petite mesure la plus grande.

2. Une grandeur plus grande est multiple d'une grandeur plus petite, quand la plus grande est mesurée par la plus petite.

3. Une raison, est certaine manière d'être de deux grandeurs homogènes entr'elles, suivant la quantité.

4. Une proportion est une identité de raisons.

5. Des grandeurs sont dites avoir une raison entr'elles, lorsque ces grandeurs, étant multipliées, peuvent se surpasser mutuellement.

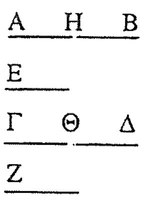
6. Des grandeurs sont dites être en même raison, la première à la seconde, et la troisième à la quatrième, lorsque des équimultiples quelconques de la première et de la troisième, et d'autres équimultiples quelconques de la seconde et de la quatrième sont tels, que les premiers équimultiples surpassent, chacun à chacun, les seconds équimultiples, ou leur sont égaux à la fois, ou plus petits à la fois.

7. Les grandeurs qui ont la même raison sont dites proportionnelles.

PROPOSITION PREMIERE

Si l'on a tant de grandeurs que l'on voudra, égales en nombre à d'autres grandeurs, chacune des premières étant le même équimultiple de chacune des secondes, une des premières grandeurs sera le même multiple d'une des secondes que la somme des premières l'est de la somme des secondes.

Soient AB, ΓΔ (245), tant de grandeurs qu'on voudra égales en nombre à d'autres grandeurs E, Z, chacune étant le même multiple de chacune; je dis que AB est le même multiple de E, que la somme de AB et de ΓΔ l'est de la somme de E et de Z.



Puisque AB est multiple de E, que ΓΔ l'est de Z, il y aura dans AB autant de grandeurs égales à E, qu'il y a de grandeurs égales à Z. Partageons AB en grandeurs égales à E, et que ces grandeurs soient AH, HB; partageons aussi ΓΔ en grandeurs égales à Z, et que ces grandeurs soient ΓΘ, ΘΔ. Le nombre des parties ΓΘ, ΘΔ sera égal au nombre des parties AH, HB. Mais AH est égal à E, et ΓΘ égal à Z; donc la somme de AH et de ΓΘ sera égale à la somme de E et de Z. Par la même raison, HB est égal à E, et ΘΔ à Z; donc la somme de HB et de ΘΔ est égale à la somme de E et de Z. Il y a donc dans AB autant de grandeurs égales à E, qu'il y a dans la somme de AB et de ΓΔ de grandeurs égales à la somme de E et de Z. Donc AB est le même multiple de E que la somme de AB et ΓΔ l'est de la somme de E et de Z. Donc, etc.

PROPOSITION VII

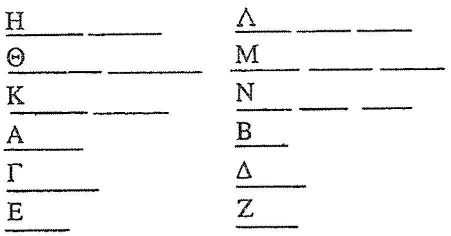
Des grandeurs égales ont la même raison avec une même grandeur, et une même grandeur a la même raison avec des grandeurs égales.

Soient les grandeurs égales A, B, et Γ une autre grandeur quelconque; je dis que chacune des grandeurs A, B a la même raison avec Γ, et que Γ a la même raison avec chacune des grandeurs A, B.

PROPOSITION XII

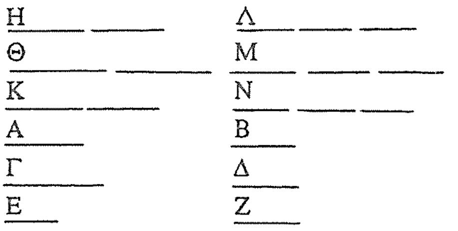
Si tant de grandeurs qu'on voudra sont proportionnelles, un des antécédents sera à un des conséquents comme la somme des antécédents est à la somme des conséquents.

Soient A, B, Γ, Δ, E, Z tant de grandeurs proportionnelles qu'on voudra; que A soit à B comme Γ est à Δ et comme E est à Z; je dis que A est à B comme la somme des antécédents A, Γ, E est à la somme des grandeurs B, Δ, Z.



Prenons des équimultiples quelconques H, Θ, K des grandeurs A, Γ, E, et d'autres équimultiples quelconques Λ, M, N des grandeurs B, Δ, Z.

Puisque A est à B comme Γ est à Δ, et comme E est à Z; que l'on a pris des équimultiples quelconques H, Θ, K des grandeurs A, Γ, E, et d'autres équimultiples quelconques Λ, M, N des grandeurs B, Δ, Z; si H surpasse Λ, Θ surpasse M, et K surpasse N; si H est égal à Λ, Θ est égal à M, et K égal à N; et si H est plus petit que Λ, Θ est plus petit que N, et K plus petit que N (déf. 6. 5). Donc, si H surpasse Λ, la somme des grandeurs H, Θ, K surpasse la somme des grandeurs Λ, M, N; si H est égal à Λ, la somme des grandeurs H, Θ, K est égale à la somme des grandeurs Λ, M, N; et si H est plus petit que Λ, la somme des grandeurs H, Θ, K est plus petite que la somme des grandeurs Λ, M, N. Mais la grandeur H et la somme des grandeurs H, Θ, K sont des équimultiples de la grandeur A et des grandeurs A, Γ, E, parce que si tant de grandeurs qu'on voudra sont les mêmes multiples d'autres grandeurs égales en



nombre, chacune de chacune, la somme des premières grandeurs est le même multiple de la somme des secondes, qu'une de ces grandeurs l'est d'une de ces grandeurs (I.5). Par la même raison, la grandeur Λ et la somme des grandeurs Λ, Μ, Ν sont des équimultiples de la grandeur Β et de la somme des grandeurs Β, Δ, Ζ; donc Α est à Β comme la somme des grandeurs Α, Γ, Ε est à la somme des grandeurs Β, Δ, Ζ (déf. 6. 5). Donc, etc.

PROPOSITION XVI

Si quatre grandeurs sont proportionnelles, elles seront proportionnelles par permutation.

Soient les quatre grandeurs proportionnelles Α, Β, Γ, Δ, c'est à dire que Α soit à Β comme Γ est à Δ; je dis que ces grandeurs sont proportionnelles par permutation, c'est-à-dire que Α est à Γ comme Β est à Δ.

LE SIXIEME LIVRE

DES ELEMENTS D'EUCLIDE

DEFINITIONS

1. Les figures rectilignes semblables sont celles qui ont les angles égaux chacun à chacun, et dont les côtés autour des angles égaux sont proportionnels.

2. Les figures sont réciproques, lorsque les antécédents et les conséquents des raisons se trouvent dans l'une et l'autre figure.

3. Une droite est dite coupée en extrême et moyenne raison, lorsque la droite entière est au plus grand segment comme le plus grand segment est au plus petit.

4. La hauteur d'une figure est la perpendiculaire menée du sommet sur la base.

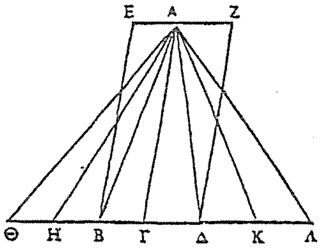
PROPOSITION PREMIERE

Les triangles et les parallélogrammes qui ont la même hauteur sont entr'eux comme leurs bases.

Soient les triangles ΑΒΓ, ΑΓΔ, et les parallélogrammes ΕΓ, ΓΖ, ayant la même hauteur, savoir, la perpendiculaire menée du point Α sur ΒΔ; je dis que la base ΒΓ est à la base ΓΔ comme le triangle ΑΒΓ est au triangle ΑΓΔ, et comme le parallélogramme ΕΓ est au parallélogramme ΓΖ.

Prolongeons la droite ΒΔ de part et d'autre vers les points Θ, Λ; prenons tant de droites qu'on voudra ΒΗ, ΗΘ égales chacune à la base ΒΓ, et tant de droites qu'on voudra ΔΚ, ΚΛ, égales chacune à la base ΓΔ; joignons ΑΗ, ΑΘ, ΑΚ, ΑΛ.

Puisque les droites ΓΒ, ΒΗ, ΗΘ sont égales entr'elles, les triangles ΑΘΗ, ΑΗΒ, ΑΒΓ sont égaux entr'eux (38. I); donc le triangle ΑΘΓ est le même multiple du triangle ΑΒΓ que la base ΘΓ l'est de la base ΒΓ. Par la même raison, le triangle ΑΛΓ est le même multiple du triangle ΑΓΔ que la base ΓΛ l'est de la base ΓΔ. Donc si la base ΘΓ est égale à la base ΓΛ, le triangle ΑΘΓ est égal au triangle ΑΛΓ; si la base ΘΓ surpasse la base ΓΔ, le triangle ΑΘΓ surpasse le triangle ΑΛΓ (38. I); et si la base ΘΓ est plus petite que la base ΓΛ, le triangle ΑΘΓ est plus petit que le triangle ΑΛΓ. Ayant donc quatre grandeurs, les deux bases ΒΓ, ΓΔ ; et les deux triangles ΑΒΓ, ΑΓΔ, on a pris des équimultiples quelconques de la base ΒΓ, et du triangle ΑΒΓ, savoir, la base ΘΓ et le triangle ΑΘΓ; on a pris aussi d'autres équimultiples quelconques de la base ΓΔ et du triangle ΑΓΔ, savoir, la base ΓΛ et le triangle ΑΛΓ; et l'on a démontré que si la base ΘΓ surpasse la base ΓΛ, le triangle ΑΘΓ surpasse le triangle ΑΛΓ; que si la base ΘΓ est égale à la base ΓΛ, le triangle ΑΘΓ est égal au triangle ΑΛΓ, et que si la base ΘΓ est plus petite que la base ΓΛ, le triangle ΑΘΓ est plus petit que le triangle ΑΛΓ; donc la base ΒΓ est à la base ΓΔ comme le triangle ΑΒΓ est au triangle ΑΓΔ (déf. 6. 5.).



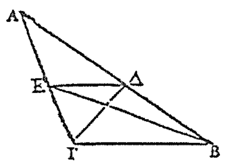
Puisque le parallélogramme EΓ est double du triangle ABΓ, que le parallélogramme ZΓ est double aussi du triangle AΓΔ (prop. 41. I), et que les parties ont entr'elles la même raison que leurs équimultiples (prop. 15 5), le triangle ABΓ est au triangle AΓΔ comme le parallélogramme EΓ est au parallélogramme ZΓ. Puisqu'on a démontré que la base BΓ est à la base ΓΔ comme le triangle ABΓ est au triangle AΓΔ, et puisque le triangle ABΓ est au triangle AΓΔ comme le parallélogramme EΓ est au parallélogramme ZΓ, la base BΓ est à la base ΓΔ comme le parallélogramme EΓ est au parallélogramme ZΓ (II.5). Donc, etc.

PROPOSITION II

Si l'on mène une droite parallèle à un des côtés d'un triangle, cette droite coupera proportionnellement les côtés de ce triangle; et si les côtés d'un triangle sont coupés proportionnellement, la droite qui joindra les sections sera parallèle au côté restant du triangle.

Menons ΔE parallèle à un des côtés BΓ du triangle ABΓ; je dis que BΔ et à ΔA comme ΓE est à EA.

Joignons BE, ΓΔ.



Le triangle BΔE sera égal au triangle ΓΔE (37.1), parce qu'ils ont la même base ΔE, et qu'ils sont compris entre les mêmes parallèles ΔE, BΓ. Mais AΔE est un autre triangle; et des grandeurs égales ont la même raison avec une même grandeur (7.5); donc le triangle BΔE est au triangle AΔE comme le triangle ΓΔE est au triangle AΔE. Mais le triangle BΔE est au triangle AΔE comme BΔ est à ΔA; car ces deux triangles, qui ont la même hauteur, savoir, la perpendiculaire menée du point E sur la droite AB, sont entr'eux comme leurs bases (I.6). Par la même raison le triangle ΓΔE est au triangle AΔE comme ΓE est à EA; donc BΔ est à ΔA comme ΓE est à EA (II.3).

Mais que les côtés AB, AΓ du triangle ABΓ soient coupés proportionnellement aux points Δ, E, c'est à dire que BΔ soit à ΔA comme ΓE est à EA, et joignons ΔE; je dis que ΔE est parallèle à BΓ.

Faisons la même construction. Puisque BΔ est à ΔA comme ΓE est à EA, que BΔ est à ΔA comme le triangle BΔE est au triangle AΔE (I.6), et que ΓE est à EA comme le triangle ΓΔE est au triangle AΔE, le triangle BΔE est au triangle AΔE comme le triangle ΓΔE est au triangle AΔE (II.5). Donc chacun des triangles BΔE, ΓΔE a la même raison avec le triangle AΔE. Donc le triangle BΔE est égal au triangle ΓΔE (9.5); et ils sont sur la même base ΔE. Mais les triangles égaux et construits sur la même base sont entre les mêmes parallèles (39.I). Donc ΔE est parallèle à BΓ. Donc, etc.

PROPOSITION III

Si un angle d'un triangle est partagé en deux parties égales, et si la droite qui partage cet angle coupe la base, les segments de la base auront la même raison que les côtés restants de ce triangle; et si les segments de la base ont la même raison que les autres côtés du triangle, la droite menée du sommet à la section, partagera l'angle de ce triangle en deux parties égales.

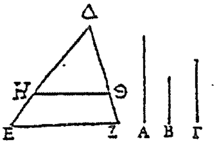
Soit le triangle ABΓ, que l'angle BAΓ soit partagé en deux parties égales par la droite AΔ; je dis que BΔ est à ΔΓ comme BA est à AΓ.

PROPOSITION XII

Trois droites étant données, trouver une quatrième proportionnelle.

Soient A, B, Γ les droites données; il faut trouver une quatrième proportionnelle aux droites A, B, Γ.

Soient les deux droites ΔE, ΔZ, comprenant un angle quelconque EΔZ; faisons la droite ΔH égale à A, la droite HE égale à B, et la droite ΔΘ égale à Γ; et ayant joint HΘ, par le point E menons EZ parallèle à HΘ.



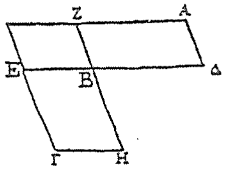
Puisque la droite HΘ est parallèle à un des côtés EZ du triangle ΔEZ, la droite ΔH est à HE comme ΔΘ est à ΘZ (2.6). Mais ΔH est égal à A, la droite HE égale à B, et la droite ΔΘ égale à Γ; donc A est à B comme Γ est à ΘZ.

Donc trois droites A, B, Γ étant données, on a trouvé une quatrième proportionnelle ΘZ. Ce qu'il fallait faire.

PROPOSITION XIV

Deux parallélogrammes étant égaux et équiangles, les côtés autour des angles égaux sont réciproquement proportionnels; et les parallélogrammes équiangles dont les côtés autour des angles égaux sont réciproquement proportionnels, sont égaux entr'eux.

Soient AB, BΓ deux parallélogrammes égaux et équiangles, ayant deux angles égaux en B, plaçons BE dans la direction de ΔB, la droite BH sera dans la direction de ZB (14.I); je dis



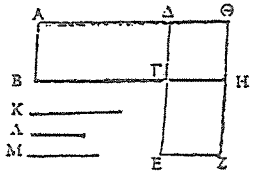
que les côtés des parallélogrammes AB, BΓ autour des angles égaux sont réciproquement proportionnels, c'est à dire que AB est à BE comme HB est à BZ.

PROPOSITION XXIII

Les parallélogrammes équiangles ont entr'eux une raison composée des côtés.

Soient les parallélogrammes équiangles AΓ, ΓZ, ayant l'angle BΓΔ égal à l'angle EΓH; je dis que le parallélogramme AΓ a avec le parallélogramme ΓZ une raison composée des côtés, c'est à dire de celle que BΓ a avec ΓH, et de celle que ΔΓ a avec ΓE.

Plaçons ces parallélogrammes de manière que la droite BΓ soit dans la direction de la droite ΓH; la droite ΓH sera dans la direction de ΓE (14.1). Achevons le parallélogramme ΔH; prenons une droite quelconque K; faisons en sorte que BΓ soit à ΓH comme K est à Λ, et que ΔΓ soit à ΓE comme Λ est à M (12.6).



Les raisons de K à Λ et de Λ à M seront les mêmes que les raisons des côtés, c'est à dire que celle de BΓ à ΓH et que celle de ΔΓ à ΓE. Mais la raison de K à M est composée de celle de K à Λ, et de celle de Λ à M; donc la droite K a avec la droite M une raison composée des côtés. Et puisque BΓ est à ΓH comme le parallélogramme AΓ est au parallélogramme ΓΘ (1.6), et que BΓ est à ΓH comme K est à Λ, K est à Λ comme le parallélogramme AΓ est au parallélogramme ΓΘ (11.5). De plus, puisque ΔΓ est à ΓE comme le parallélogramme ΓΘ est au parallélogramme ΓZ, et que ΔΓ est à ΓE comme Λ est à M (I.6), Λ est à M comme le parallélogramme ΓΘ est au parallélogramme ΓZ (11.5). Mais on a démontré que K est à Λ comme le parallélogramme ΑΓ est au parallélogramme ΓΘ, et Λ est à M comme le parallélogramme ΓΘ est au parallélogramme ΓΖ; donc, par égalité, K est à M comme le parallélogramme ΑΓ est au parallélogramme ΓΖ (22.5). Mais la droite K a avec la droite M une raison composée des côtés; donc le parallélogramme ΑΓ a avec le parallélogramme ΓΖ une raison composée des côtés. Donc, etc.