

----- PAYSAGES DIFFERENTIELS CHEZ LEIBNIZ -----

Dominique BENARD et Monique NOUET
I.R.E.M. Pays de la Loire - Centre du Mans

*La perception est l'expression
d'une multitude dans l'unité.*
G.W. LEIBNIZ

Paysages différentiels...

Pour dire le parcours de quelques textes mathématiques, avec la seule intention de se rendre disponible et attentif à une pensée tout à la fois systématique et chaotique, se laisser toucher par un travail foisonnant où ne manquent ni ombres ni lumières, ni détours pénibles ni raccourcis fulgurants.

Paysage à réinventer, reconstruire et retravailler, plus qu'à en contempler le déploiement.

Chantier différentiel plutôt, dont le propos n'est pas la défense -illustration- promotion d'une quelconque thèse, nouvelle ou ancienne.

Dans quel but alors ?

Emouvoir, "émoustiller" l'intelligence d'abord, en lui faisant préférer la question à la réponse ; rendre actif, ensuite, un souci concernant la formation, plus particulièrement continue, des enseignants de mathématiques ; souci de s'engager ensemble sur des sentiers où le savoir n'est pas déjà donné, où l'exposé systématique des réponses ne vient plus masquer les questions qui les ont suscitées, où la construction mathématique participe à celle d'un rapport au monde qu'il soit d'intelligibilité ou d'action. Et ouvrir ainsi à tout enseignant, à quelque niveau du système éducatif qu'il intervienne, un terrain où il puisse encore et toujours mettre en chantier son propre rapport aux mathématiques, en se frottant à du problème, à de la question, à de l'invention, qui pourront constituer autant d'occasions pour une mise en perspective parfois surprenante et souvent joyeuse des nécessités pédagogiques.

Le début de notre parcours ne coïncidera pas avec celui du travail mathématique de Leibniz sur le calcul différentiel, mais avec le moment où ce travail sort de la seule relation épistolaire pour s'offrir à un débat plus large, au travers des publications dans les *Acta Eruditorum* de Leipzig (1).

De là -le premier article publié par Leibniz date de Février 1682- nous remonterons d'abord vers les "origines", du moins celles dont Leibniz lui-même fera le récit beaucoup plus tard- 1714 (2), puis nous en pisterons les développements grâce à quelques unes des publications ultérieures dans la revue de Leipzig....

Février 1682 : Le bâteleur du calcul des séries (l'un et le multiple)

Le tout premier article mathématique donné par Leibniz dans la revue de Leipzig, renvoie par son titre⁽³⁾ au très célèbre problème de la quadrature du cercle, ou comment

(1) Textes qui nous sont offerts dans la traduction, richement commentée, de Marc Parmentier, parue aux Editions Vrin, sous le titre *Naissance du calcul différentiel*. Référencé M P.

(2) *Histoire et origine du Calcul différentiel*, traduction de R. Szeftel-Zylberbaum, in Les Cahiers de Fontenay - I - 1975. Référencé HOCD.

"convertir un cercle en un carré égal, ou en une autre figure rectiligne dépendant du rapport entre le cercle et le carré construit sur le diamètre".

Là, première surprise... si ce problème déjà tant exploré ne trouve toujours pas de solution, c'est sans doute, avertit Leibniz, qu'on ne sait pas exactement ce que l'on cherche. Et de distinguer quatre "manières" de comprendre le problème et donc de le résoudre ou d'en démontrer l'impossibilité, ce qui, dira-t-il ailleurs, est équivalent à le résoudre : *"On voit que l'Analyse d'un problème est achevée quand on peut soit le résoudre, soit montrer qu'il est impossible"* ⁽⁴⁾.

On doit donc distinguer le "calcul" du "tracé" et dans chacun de ces cas la solution "rigoureuse" de la "manière approchée". Et s'intéressant plus particulièrement au calcul rigoureux, que Leibniz appelle quadrature analytique, il importe d'en distinguer trois : la transcendantale, l'algébrique et l'arithmétique.

Ce sera l'un des apports de Leibniz (entre autres !) de dégager explicitement la notion d'expression ou de solution "transcendant" toute expression ou solution algébrique, c'est à dire de degré déterminé, et, s'appuyant sur cette distinction, de montrer "sans calcul" l'impossibilité d'une quadrature exacte du cercle ou de l'hyperbole par une expression algébrique ⁽⁵⁾. De plus, il verra dans le calcul différentiel qu'il invente la possibilité d'étendre aux expressions transcendantes, si utiles à la géométrie, la puissance de l'analyse révélée par le traitement algébrique opéré par Descartes sur la géométrie et dont il déplore la limitation.

Distinction féconde par conséquent, tant par rapport à la solution d'un problème particulier et célèbre que dans son appel à une nouvelle généralité, réalisée, dans cet article de 1682, par l'intervention non pas d'objets nouveaux mais de points de vue nouveaux. Déplacement caractéristique du travail mathématique leibnizien.

On est d'ailleurs frappé de la conformité de cette attitude avec le travail métaphysique tel qu'il s'exprime par exemple dans La Monadologie :

57. Et, comme une même ville regardée de différents côtés paraît toute autre, et est comme multipliée perspectivement ; il arrive de même, que par la multitude infinie des substances simples, il y a comme autant de différents univers, qui ne sont pourtant que les perspectives d'un seul selon les différents points de vue de chaque Monade.

58. Et c'est le moyen d'obtenir autant de variété qu'il est possible, mais avec le plus grand ordre, qui se puisse, c'est à dire, c'est le moyen d'obtenir autant de perfection qu'il se peut ⁽⁶⁾.

Ici, la métaphysique, dont il a pu parfois paraître juste de dire qu'elle est première chez Leibniz, n'est jamais dominatrice, gardienne ou garante de la vérité ontologique des manipulations mathématiques. Elle semble au contraire libératrice, se faisant trait opératoire inspirant le geste mathématique. On pourrait affirmer aussi, qu'en retour, le travail mathématique fournit une image exemplaire et quasi adéquate d'une aptitude opératoire

⁽³⁾ Expression en nombres rationnels, de la proportion exacte entre un cercle et son carré circonscrit, Acta Eruditorum, Février 1682, MP p. 71-81.

⁽⁴⁾ M P, p. 88, in Calcul des mesures des figures, A.E. mai 1684.

⁽⁵⁾ Sur la géométrie profonde et l'analyse des indivisibles et des infinis, A.E. juin 1686, M P p. 134.

Leibniz y montre en fait l'impossibilité d'une quadrature quelconque ou indéterminée, c'est à dire de n'importe quel secteur circulaire (intégrale indéfinie), par une expression algébrique ; ce qui n'implique pas a priori l'impossibilité de la quadrature du cercle dans son entier ou d'un secteur particulier (intégrale définie). Là aussi Leibniz prendra soin de distinguer entre "quadratures indéfinies" et "quadratures particulières", l'indistinction des deux problèmes étant source d'erreurs (cf. Calcul des mesures des figures M P p. 88-95).

⁽⁶⁾ La Monadologie de Leibniz est disponible en Livre de Poche.

inspirante pour le geste métaphysique... jeux d'ombre et de lumière où mathématique et métaphysique changent tour à tour de rôle, dans une relation de mutuelle inspiration.

Mais c'est une autre histoire. Sortons de la caverne et revenons à l'article de Leibniz où nous lisons que le cercle, dont le carré circonscrit a l'unité pour surface, s'exprime par la série :

$$1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \frac{1}{11} + \dots$$

Ce résultat, ici simplement énoncé sans démonstration, n'est pas vraiment une nouveauté pour l'époque, ni même l'idée d'exprimer une quadrature par une série. Ce qui est nouveau, là encore, c'est le point de vue adopté par Leibniz. Non seulement en effet la série "*renferme*" un ensemble d'approximations dont l'erreur va toujours s'amenuisant, mais "*prise dans sa totalité [elle] exprime [] la valeur exacte*". Une telle affirmation repose sur la loi de progression unique de la série (nous dirions maintenant série alternée des inverses des entiers impairs) qui permet à l'esprit de la "*concevoir convenablement tout entière*", "*bien qu'on n'en puisse pas écrire la somme en un seul et unique nombre*". Sort heureux partagé entre autres par la "*Diagonale du carré, la section par moyenne et extrême raison que d'aucuns appellent divine*". Mais qui manque à la suite des décimales de ce que nous nommons le nombre p , connue à l'époque où écrit Leibniz jusqu'à la trente-cinquième, grâce au labeur du hollandais L. Van Ceulen. Ce dernier réutilise jusqu'à épuisement du calculateur la méthode d'exhaustion qui fournit à Archimède ses encadrements de la mesure du cercle. A l'inverse de la série, telle que lue par Leibniz, la loi de progression des décimales de p n'est pas lisible, ni même accessible, et la connaissance des 35 premières décimales n'est d'aucune utilité pour la détermination de la trente-sixième.

Voilà donc la nouveauté de la lecture leibnizienne : la série n'est plus le résumé de procédures d'approximations dont notre finitude n'épuisera jamais l'infinitude ; mais la lisibilité de sa loi de progression la rassemble en une quadrature arithmétique exacte du cercle.

La suite de l'article paraît tenir du tour de passe-passe.

Leibniz remarque qu'en regroupant les termes deux à deux la série exprimant le cercle devient :

$$\left(1 - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{5} - \frac{1}{7}\right) + \dots = 2 \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{35} + \frac{1}{99} + \dots\right)$$

ce qui s'énonce ainsi :

le carré inscrit dans le cercle étant $\frac{1}{4}$ ⁽⁷⁾, le cercle s'exprimera par

$$\frac{1}{3} + \frac{1}{35} + \frac{1}{99} + \dots$$

Cette série est extraite, en prenant un terme sur quatre, de la série des inverses des carrés diminués d'une unité (inverse de $n^2 - 1$), soit

(7) Leibniz passe d'un cercle de diamètre 1 (dont le carré circonscrit est l'unité), à un cercle de diamètre $\frac{1}{\sqrt{2}}$ (dont le carré circonscrit est $\frac{1}{2}$, ou encore dont le carré inscrit est $\frac{1}{4}$).

$$\frac{1}{3} + \frac{1}{8} + \frac{1}{15} + \frac{1}{24} + \frac{1}{35} + \frac{1}{48} + \frac{1}{63} + \frac{1}{80} + \frac{1}{99} + \dots$$

et dont Leibniz affirme qu'elle a pour somme $\frac{3}{4}$.

Si, à partir de cette série, on saute un terme sur deux on obtient d'une part la série

$$\frac{1}{3} + \frac{1}{15} + \frac{1}{35} + \dots$$

dont la somme est $\frac{1}{2}$ (dixit Leibniz - pour le comment voir plus loin), et d'autre part, la série complémentaire

$$\frac{1}{8} + \frac{1}{24} + \frac{1}{48} + \dots$$

dont la somme sera donc $\frac{3}{4} - \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$.

A partir de ces deux nouvelles séries, et prenant à nouveau un terme sur deux, la première produira, comme nous l'avons déjà vu, l'expression de la quadrature arithmétique du cercle dont le carré inscrit est $\frac{1}{4}$, la seconde

$$\frac{1}{8} + \frac{1}{48} + \dots$$

nous apportant une quadrature arithmétique exacte de l'hyperbole de carré $\frac{1}{4}$, c'est à dire, en termes du vingtième siècle, l'aire comprise sous l'hyperbole d'équation $xy = \frac{1}{4}$ et entre les segments d'abscisse $\frac{1}{2}$ et 1.

Ici marquons une pause, pour laisser au lecteur mathématicien le plaisir de vérifier tous ces résultats avec les outils mathématiques dont nous disposons maintenant ...

Et avant de voir de quelle manière Leibniz y parvenait, attardons-nous sur les mots employés ici lorsqu'il se livre au jeu des séries que nous venons d'exposer.

"Or, puisqu'on obtient, sans aucun travail supplémentaire, une quadrature arithmétique de l'Hyperbole, je voudrais donc faire admirer cette harmonie dans sa totalité" ⁽⁸⁾.

L'harmonie est là qui réunit deux quadratures célèbres sous une même série, d'où elles resurgissent par mises en lumière successives de certains termes.

⁽⁸⁾ Expressions en nombres..., MP p. 80.

Soit donc la série justement appelée harmonique et qui est une expression même de l'infini :

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots = \infty.$$

Laissons d'abord dans l'obscurité tout terme qui n'est pas inverse d'un carré diminué d'une unité (inverse d'un entier de la forme $n^2 - 1$).

Puis sautant de deux en deux à partir du premier terme, puis à nouveau de deux en deux sur la série ainsi obtenue, et "éteignant" chaque fois les termes dans l'intervalle, ne reste à la lumière que l'expression du cercle.

Reprenant enfin le même procédé mais décalé d'un terme, nous voyons alors briller la quadrature de l'hyperbole.

Mais nous devons comprendre, avec Leibniz, que la totalité est toujours là présente, et que chaque point de vue différent ne nous en fait percevoir distinctement qu'une partie.

Nous avons donc là, dans ce petit théâtre de la série harmonique, une image mathématique forte du déploiement des multiplicités diverses comme expressions partielles, par éclairages successifs, d'un seul et même univers. Où l'on ne peut pas démêler qui inspire qui, du mathématicien ou du métaphysicien.

1714 Le magicien dévoile ses tours...

Deux ans avant sa mort, l'essai *Historia et Origo Calculus Differentialis* ⁽⁹⁾ permet d'abord à Leibniz de faire une mise au point sur ce que l'on appellerait maintenant la question de la priorité dans l'invention du calcul différentiel. On sait les polémiques qui se développèrent à l'époque sur ce sujet. L'article de Leibniz est donc une contribution à ce genre littéraire un peu spécial.

Nous laisserons de côté cet aspect des choses. Car l'essai de 1714 est aussi l'occasion pour Leibniz de rappeler l'importance de l'histoire des questions, des méthodes, des inventions pour la compréhension même, le partage et le développement des dites questions, méthodes, inventions : "*Il est très utile de connaître les véritables origines des inventions fameuses, surtout si leur découverte n'est pas due au hasard, mais au pouvoir de la pensée [...] de plus c'est utile au développement de l'art d'inventer, car la méthode en est connue sur des exemples remarquables*" ⁽¹⁰⁾.

Nous venons de voir comment, parlant en 1682 du problème de la quadrature du cercle, il s'attache à redéfinir la question, nous faisant apercevoir que derrière l'expression unifiante de "quadrature du cercle", se cachaient des questions diverses, appelant donc des réponses diverses. Il faut ajouter maintenant que, dans le cours de cette redéfinition, Leibniz replace à l'intérieur du point de vue nouveau qu'il expose, les contributions de ses prédécesseurs ou contemporains, d'Archimède à Viète et Huygens en passant par N. de Cuse et T. Hobbes.

Ce souci aura été constant tout au long de son travail mathématique. Ainsi, dans un article des *Acta* de mai 1697⁽¹¹⁾, dont le titre annonce une communication sur la courbe brachystochrone (le toboggan le plus rapide), il n'accorde à l'exposé véritablement mathématique de sa solution que le dernier quart de son écrit. Le reste, Leibniz le consacre majoritairement à l'histoire, de cette courbe et de questions connexes comme la courbe isochrone ou la chaînette. Au-delà de rendre à chacun son dû, l'histoire permet à Leibniz

(9) Histoire et origine du Calcul Différentiel, traduction de R. Szeftel-Zylberbaum, in *Les Cahiers de Fontenay* - I - 1975. Référencé HOCD.

(10) HOCD p. 58.

(11) "*Communication de ma solution au problème de la courbe de plus brève descente que M. Jean Bernoulli a proposé à tous les Géomètres, et des solutions que M. Jean Bernoulli, puis M. le Marquis de l'Hôpital, m'ont chargé de publier, accompagnées de ma solution à un autre problème que M. Bernoulli a proposé par la suite*", Acta Eruditorum, Mai 1697, MP p. 351-358.

d'inventorier les voies diverses d'une même question pour en souligner les points communs ou au contraire les différences. Comme dans l'article de 1682, il dégage sous une dénomination unique, ici les questions de "Maxima et Minima", la diversité de problèmes qui, précise-t-il, sont par ailleurs d'inégale difficulté : ainsi la question de déterminer les tangentes d'une courbe donnée diffère-t-elle du problème de la détermination de la courbe elle-même devant "*remplir optimalement une condition donnée*" ⁽¹²⁾. Clarifier les questions, c'est déjà s'engager dans la voie de leurs résolutions...

De plus, et c'est encore une constante des écrits leibniziens, le recours à l'histoire est l'occasion d'un appel à l'intelligence d'autrui, aux méthodes particulières, au partage et à la diffusion des problèmes et des inventions. "*Soumettre -commence-t-il dans son écrit de mai 1697- des problèmes aux Géomètres est une chose courante et profitable à tous, lorsqu'on ne le fait pas dans l'intention de vanter ses propres succès, mais d'inciter d'autres à en obtenir, de sorte que l'art d'inventer s'enrichisse des méthodes particulières adoptées par tout un chacun*" ⁽¹³⁾. Et plus loin, parlant de l'utilisation faite par les frères Bernoulli de son calcul différentiel, il dira "*qu'il semble désormais leur appartenir autant qu'à moi*" ⁽¹⁴⁾. Est à l'oeuvre, ici encore, une métaphysique du point de vue, qui loin de s'abîmer dans un quelconque relativisme, construit la condition même de l'universalité.

Lisant donc Leibniz, nous sommes souvent ramenés à l'affirmation que faire l'histoire des problèmes est une composante importante du travail mathématique lui-même ; que c'est aussi mesurer a posteriori la fécondité de l'apport de points de vue différents. D'où cette nécessité de les susciter a priori...

Voilà comme un écho de notre souci actuel de confronter l'enseignant à l'histoire de sa discipline ; cette confrontation, au-delà de l'apport culturel de savoir "qui" a fait "quoi", est déjà par elle-même un travail de et sur les mathématiques.

Revenons donc au contenu de l'essai de Leibniz sur l'origine du calcul différentiel. Nous y trouvons, expliquées par l'auteur, les techniques et idées que masque la virtuosité du jeu sur les séries, auquel il se livre dans l'article de 1682.

Une première manipulation très simple consiste en une reprise, mais aussi une extension, du procédé pythagoricien d'engendrement des carrés par les impairs. La série (nous dirions la suite) des entiers impairs, 1 3 5 7 9 11 ..., est en effet la série des différences de deux termes consécutifs de la série des carrés 0 1 4 9 16 25 36 ... D'où il suit de façon quasi immédiate que $1 + 3 + 5 + 7 + 9 + 11 = 1 - 0 + 4 - 1 + 9 - 4 + 16 - 9 + 25 - 16 + 36 - 25 = 36 - 0 = 36$ ⁽¹⁵⁾.

Leibniz ensuite, par un travail où l'analogie tient une grande part, étend ce procédé aux séries de nombres "décroissants à l'infini" ⁽¹⁶⁾. Suivons le en faisant travailler l'analogie sur l'exemple des séries qu'il manipule en 1682.

Soit donc la série des inverses des entiers impairs

$$1 \quad \frac{1}{3} \quad \frac{1}{5} \quad \frac{1}{7} \quad \frac{1}{9} \quad \dots$$

La série des différences de deux termes consécutifs est

$$\frac{2}{3} \quad \frac{2}{15} \quad \frac{2}{35} \quad \frac{2}{63} \quad \dots$$

(12) Communication..., MP p. 355.

(13) Communication..., MP p. 351.

(14) Communication..., MP p. 353.

(15) HOCD p. 65-66.

(16) HOCD p. 68-69.

Par conséquent, la somme de cette série des différences sera égale au premier terme de la première série, diminué du "dernier terme", qui ici est nul puisque l'inverse d'un entier "s'évanouit à l'infini" :

$$\frac{2}{3} + \frac{2}{15} + \frac{2}{35} + \frac{2}{63} \dots = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{5} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{7} - \frac{1}{9} + \dots = 1.$$

Le même travail, effectué à partir de la série des inverses des entiers pairs, nous fournit alors :

$$\frac{2}{8} + \frac{2}{24} + \frac{2}{48} + \frac{2}{80} + \dots = \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{4} - \frac{1}{6} + \frac{1}{6} - \frac{1}{8} + \frac{1}{8} - \frac{1}{10} + \dots = \frac{1}{2}$$

De là, les résultats de Leibniz sur la somme de la série des inverses des carrés diminués d'une unité, ainsi que des sommes des deux suites extraites en sautant un terme sur deux.

Pour tester encore la force d'une telle procédure, faisons la opérer, comme Leibniz le fait lui-même, sur la progression géométrique de raison b , dont le terme général s'écrit b^n . La série des différences de deux termes consécutifs aura pour terme général $b^{n+1} - b^n = b^n \cdot (b - 1)$. "Par conséquent", conclut Leibniz, "il est manifeste que la suite -différence d'une progression géométrique donnée est aussi une progression géométrique proportionnelle à la progression donnée. De là, on obtient la somme d'une progression géométrique" (17).

Ce qu'il convient de remarquer ici, c'est le passage de la référence à une série particulière de nombres par l'écriture de ses premiers termes, suivis de points de suspension, à la référence par écriture de son "terme général". C'est que, explique lui-même Leibniz, "il possédait ces résultats [sur les différences finies], alors qu'il n'était pas encore versé dans l'Analyse Cartésienne : après s'y être adonné, il considéra que n'importe quel terme d'une suite pouvait, la plupart du temps, être désigné par une notation générale - par ce moyen on peut se référer à une suite particulière. Par exemple, si n'importe quel terme de la suite des naturels 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, etc... est appelé " x ", on appellera n'importe quel terme de la suite des carrés " $x \cdot x$ " ou de celle des cubes " $x \cdot x \cdot x$ " etc... ; n'importe quel terme de la suite des nombres

triangulaires, c'est-à-dire : 0, 1, 3, 6, 10, etc..., s'appellera : $\frac{x(x+1)}{1 \cdot 2}$, soit : $\frac{x^2 + x}{2}$ " (18).

Ce court extrait de l'essai de 1714, outre qu'il nous fait entendre Leibniz parler de lui-même à la troisième personne, nous rappelle qu'à l'époque où il commençait ses travaux sur les différences finies (vers 1672), il n'était pas mathématicien de métier, ni même seulement "éduqué". Ce sera toujours la limitation et aussi la chance de Leibniz que de s'être plongé dans les difficultés sans grande préparation ; limitation, puisque son manque de pratique lui occasionnera quelques bourdes, notamment dans les calculs ; chance, dans la mesure où sa méconnaissance des difficultés les lui fera aborder sans crainte et sans préjugés, l'innocence étant ici possibilité d'un regard neuf.

Mais aussi, ce passage souligne l'importance accordée par Leibniz à l'écriture, qui aura été l'une de ses préoccupations majeures. Changer d'écriture, c'est changer de point de vue et parfois permettre à une harmonie jusque là cachée de se révéler... son utilisation du triangle arithmétique de Pascal, redressé en tableau rectangulaire pour en faire apparaître le lien avec la cascade itérative des différences d'une série donnée, en est un exemple frappant (19). Par ailleurs, l'écriture est parfois principe d'économie comme nous venons de le voir avec le "terme général" d'une suite ; et "l'on peut même dire que la spécieuse en général, c'est-à-dire l'art des

(17) HOCD p. 90-91.

(18) HOCD p. 86-87.

(19) HOCD p. 67-69.

caractères, est d'un secours merveilleux, parce qu'elle décharge l'imagination " (20). Enfin et surtout, l'écriture est ce qui fait surgir le procédé des différences finies comme un opérateur, comme un objet en tant que tel, déplaçant l'attention du résultat de l'opération à l'opération même. Il nous semble que l'on doive considérer ce déplacement comme l'un des apports majeurs de Leibniz, qui imprègne tout "son" calcul différentiel, et qui le relie directement au XXème siècle, lui homme du XVIIème siècle, tellement appuyé sur de vieilles notions du XVIème siècle, certes retravaillées, comme l'harmonie ou l'analogie. Une telle considération est toujours risquée, car d'une certaine façon toujours fausse, mais... qu'on lise par exemple son *Symbolismus memorabilis calculi...* paru en 1710 dans une revue de Berlin où, développant une analogie entre puissance d'une somme et différentielle d'un produit (la célèbre formule de Leibniz), il esquisse une véritable algèbre des opérateurs de puissance et de différenciation (21). Un trouble naît d'ailleurs à la lecture de cet article, qui vient de ce qu'il semble que ce soit précisément la vieille, si vieille, méthode de l'analogie qui lui permette d'engager ce travail si neuf. Méditons...

Quant au calcul proprement dit, Leibniz lui-même nous explique que c'est cette manipulation des séries de différences finies d'une série numérique donnée, et qu'il appelle calcul différentiel numérique, qui fournit la pratique inspirante du calcul différentiel infinitésimal, c'est-à-dire du calcul des différences incomparables avec les grandeurs différenciées (22).

Ainsi, notant dx et dy les termes généraux des suites numériques différences des suites x et y , un rapide calcul nous fournit la suite des différences de la suite produit :

$$d(x \cdot y) = (x + dx)(y + dy) - x \cdot y = x \cdot dy + dx \cdot y + dx \cdot dy.$$

Lorsque les différences dx et dy ne sont plus celles, finies et comparables aux grandeurs différenciées, de suites numériques, mais celles, infinitésimales, de quantités continûment variables, le produit $dx \cdot dy$ est incomparable à $x \cdot dy + dx \cdot y$. Il est alors considéré comme "actuellement" nul et nous obtenons la formule bien connue : $d(x \cdot y) = x \cdot dy + y \cdot dx$.

Cette distinction à opérer entre les deux calculs, qui dérive de ce que Leibniz appelle "la loi d'homogénéité transcendente" (23), nous la retrouverons plus loin au cœur des critiques adressées au nouveau calcul par certains contemporains, et au cœur des réponses que Leibniz leur apportera. Réponses fécondes sur le terrain mathématique et riches en échos métaphysiques... (24).

Ces questions, toutefois, nous laissent loin encore de l'expression de la quadrature du cercle de diamètre unité par la série alternée des inverses des entiers impairs. Reprenant le fil de l'essai, nous découvrons deux joyaux du travail différentiel de Leibniz : le "triangle caractéristique" et la "méthode de métamorphose".

Nous en donnerons une idée, en nous appuyant sur des figures simplifiées par rapport à celles que Leibniz nous a léguées (25).

Sur la figure 1, YZD est un triangle rectangle "infiniment petit", dont les côtés YD et DZ sont les "éléments" d'abscisse et d'ordonnée, respectivement désignés dx et dy , et dont l'hypoténuse YZ est un "élément" de la tangente à la courbe C, désigné ds . Voilà ce que Leibniz

(20) in *Nouveaux Essais sur l'entendement humain*, Garnier-Flammarion, p. 387.

(21) *Symbolisme remarquable du calcul algébrique et infinitésimal, pour comparer puissances et différences, et de la loi d'homogénéité transcendente*, Miscellanea Berolinensia, 1710, MP, p. 414-421.

Nous renvoyons par ailleurs, pour une analyse mathématique plus détaillée, à *La méthode chez Leibniz*, de M. Nouet in *Questions de Méthode*, travail collectif du Groupe Histoire des Mathématiques de l'I.R.E.M. du Mans, à paraître prochainement.

(22) HOCD p. 70.

(23) *Symbolisme remarquable...*, MP p. 420.

(24) "Réponses à quelques objections soulevées par M. Bernard Niewentijt à propos de la méthode différentielle ou infinitésimale", *Acta Eruditorum*, Juillet 1695, MP p. 324-337.

(25) HOCD p. 72-80.

appelle "triangle caractéristique". Le triangle YPX, lui, est ordinaire ; YX, désignée par l'ordonnée y de Y, est la perpendiculaire abaissée du point Y sur l'axe des abscisses ; YP, désignée par n , est la normale à la tangente YZ.

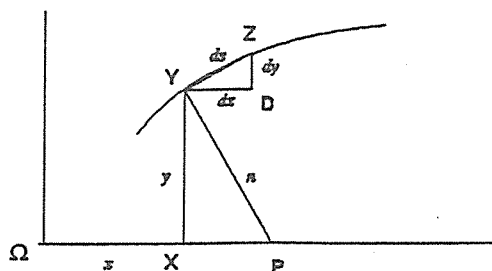


Figure 1

L'intérêt d'une telle figuration réside dans la similitude du triangle infinitésimal YDZ avec le triangle ordinaire YXP ; on en tire la proportion : $\frac{YZ}{YD} = \frac{YP}{YX}$, d'où suit l'égalité différentielle $y.ds = n.dx$.

Cette considération vint à Leibniz comme une généralisation du travail de B. Pascal dans son Traité du sinus du quart de cercle et permit le calcul de surfaces de solides de révolution, ramenant ce dernier au "problème inverse des tangentes", c'est-à-dire à la détermination d'une courbe connaissant ses tangentes.

$2py.ds$ est en effet la surface du tronc de cône différentiel⁽²⁶⁾ engendré par la rotation dans l'espace de l'élément ds autour de l'axe des abscisses. La surface totale du solide engendré par cette rotation est alors : $\int 2py.ds = 2p \int n.dx$. La courbe C étant donnée, ses normales n sont données, et calculer $\int n.dx$ c'est précisément déterminer la quantité variable z telle que $\frac{dz}{dx} = n$.

Au-delà de ce résultat, dont nous laissons au lecteur mathématicien la joie de le faire opérer pour le calcul de la surface de la sphère, comme le fit B. Pascal, ou de l'aire d'un paraboloïde de révolution, à l'instar de C. Huygens, la méthode du triangle caractéristique a ceci de remarquable qu'elle réintroduit le jeu des proportions pour ramener "l'inassignable" à "l'assignable". Comment, en effet, opérer avec ou calculer sur des grandeurs par définition imperceptibles, insaisissables, invisi-bles ? Similitudes et proportions nous permettent cependant d'accéder à leurs "raisons" (quotients différentiels $\frac{ds}{dx}$), par identification à des rapports de grandeurs "mesurables" (les côtés du triangle YXP). Il s'agit d'ailleurs ici de bien autre chose que d'une simple "anecdote technique". Leibniz invoquera le livre V des Eléments d'Euclide pour répondre à des objections qu'on lui avait faites sur ces "éléments différentiels" et leurs différences⁽²⁷⁾, tant du point de vue de leur maniement que de leur fondement. Une pensée des proportions, telle que nous l'offre Euclide, rend possible, une fois distingués les différents ordres de différenciation, la manipulation dans un même calcul, un même raisonnement, des raisons de toutes les grandeurs, qu'elles soient assignables, différentielles, différo-différentielles, etc... Une telle pensée fonde leur "compossibilité", ou possibilité d'être ensemble, et par là assure leur existence même, mieux que toute considération ontologique et tout renvoi à un réel extérieur dont ces grandeurs ne seraient que l'écho.

(26) Merci à A. Deledicq pour son amicale et active participation.

(27) Réponses à quelques objections..., MP p. 325-329.

On voit, là encore, l'accompagnement métaphysique libérer le calcul du versant ontologique de son fondement, ce qui fera écrire à Leibniz cette assertion quelque peu inquiétante que "*ce calcul porte sa vérité avec soi*". Ce dernier, en retour, nous fournissant une image opératoire de ce qui se trame sous la notion leibnizienne de "compossibilité" (28) et ses rapports avec l'être.

Autre écho, qui ne nous semble pas plus anecdotique par rapport à la pensée de Leibniz : de quoi ce fameux triangle est-il caractéristique ? De la variation en ce qu'elle n'est plus seulement aperçue une fois achevée, globalement et de l'extérieur, mais comme saisie en plein vol, concentrée en chaque point de la courbe. Vision dynamique qui fait du quotient différentiel et de son "image", le "triangle caractéristique", l'expression de la variation comme tendance ramassée au sein même de la courbe, intensité intermédiaire entre la puissance et l'acte. Méditation de la force, de la plasticité de la matière, des rapports entre l'intensité et l'étendue...

C'est de cette variation même qu'il est encore question dans la "méthode des métamorphoses", expression aux fragrances plus alchimiques qu'analytiques (Leibniz emploie même le mot "transmutation"). Cette méthode met en scène un déplacement du sujet en un point, éventuellement extérieur à la courbe, qui devient ainsi point de vue sur la variation (29).

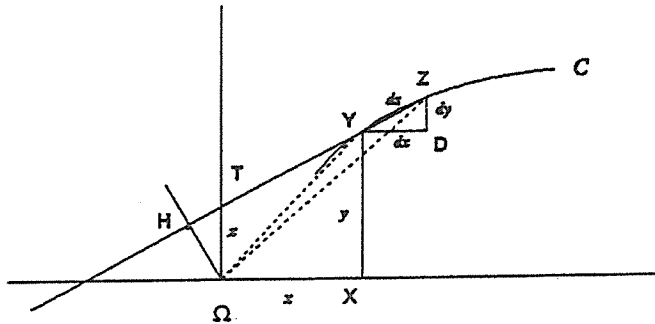


Figure 2

Soit donc -Figure 2- YZ élément de tangente à la courbe C, tangente rencontrant l'axe des ordonnées en T et découpant ainsi un segment WT désigné z , précisément dénommé "sous-tangente".

Utilisant la similitude du triangle WHT et du triangle caractéristique YDZ, l'aire du triangle WYZ est $\frac{1}{2} YZ \cdot WH = \frac{1}{2} WT \cdot YD = \frac{1}{2} z \cdot dx$.

Soit alors à quarrer l'aire délimitée par la courbe, l'axe des abscisses, et comprises entre les segments verticaux Aa et Bb - Figure 3 :

(28) Cf. *Le pli* de G. Deleuze, Ed. de Minuit, notamment le chapitre V : impossibilité, individualité, liberté.

(29) *Le Pli*, p. 25-27. L'importance, chez Leibniz, de la variation et de la variabilité comme notions fondamentales, se retrouve, au niveau mathématique, dans ses considérations sur des familles de courbes dépendant d'un paramètre ; c'est ce dernier, qui soumis au processus de différenciation, exprime non plus la variation par rapport à une courbe donnée, mais la variabilité de l'objet "courbe" au sein d'une "série" donnée : "j'emploie ici des équations infiniment plus vastes, correspondant à un point quelconque d'une courbe quelconque, au sein d'une série de courbes successives" MP p.272.

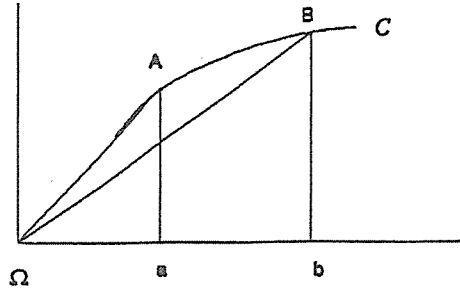


Figure 3

Le déplacement du sujet au point de vue W nous permet d'écrire : aire (ABba) = aire (WAB) + aire (WBb) - aire (WAa). L'aire du "triangle mixtiligne" WAB, surface "balayée" par le point de vue W sur la portion de courbe AB, est la somme des aires des triangles infinitésimaux WYZ, chacun d'eux étant la saisie par un même point de vue W d'un élément de tangente, c'est-à-dire saisie de la variation même.

D'où il ressort que aire (WAB) = $\frac{1}{2} \int z \cdot dx$, ce qui nous donne, en utilisant une notation plus contemporaine que leibnizienne :

$$\int_a^b y \cdot dx = \frac{1}{2} [x \cdot y]_a^b + \frac{1}{2} \int_a^b z \cdot dx .$$

Mais qu'a-t-on gagné au juste dans cette métamorphose ?

Pour le voir, métamorphosons ainsi le quart de cercle d'équation $y^2 = 2x - x^2$ ($0 \leq x \leq 1, 0 \leq y$). Des considérations géométriques simples nous permettent de relier l'abscisse x à la sous-tangente z par $x = \frac{2 \cdot z^2}{1 + z^2}$.

Une intégration par parties, que Leibniz expose géométriquement, nous donne alors :

$$\frac{1}{2} \int_0^1 z \cdot dx = \frac{1}{2} [x \cdot z]_0^1 - \frac{1}{2} \int_0^1 x \cdot dz = \frac{1}{2} - \int_0^1 \frac{z^2}{1 + z^2} dz .$$

Reprenant enfin, par analogie, une technique inventée par N. Mercator pour la quadrature de l'hyperbole, il écrit :

$$\frac{z^2}{1 + z^2} = z^2 - z^4 + z^6 - z^8 + \dots$$

D'où l'on tire

$$\int_0^1 \frac{z^2}{1 + z^2} dz = \frac{1}{3} - \frac{1}{5} + \frac{1}{7} - \frac{1}{9} + \dots$$

Et finalement, la quadrature du quart de cercle de rayon unité, $\int_0^1 y \cdot dx$, s'exprime par la série annoncée.

Pour clore enfin sur l'art et la manière dont a usé Mr de Leibniz pour obtenir ses séries, signalons que le travail de Mr Mercator fournit également l'expression de la quadrature de l'hyperbole de carré $\frac{1}{4}$ par la série $\frac{1}{8} + \frac{1}{48} + \dots$

Suspension...

Il faut bien cesser d'écrire, et se résoudre, par exemple, à ne pas parler de l'importance et de l'originalité de la notion leibnizienne de perception, de son écho dans le calcul différentiel.

A nous relire, il semble que nous n'ayons que très peu "pisté" les développements, par Leibniz, de son propre calcul, comme annoncé en introduction ; qu'il ait été très peu question, ici, du calcul différentiel lui-même ⁽³⁰⁾ ... mais que nous nous soyons laissés brasser par l'entrelacs des mathématiques et de la métaphysique.

C'est que le paysage différentiel, chez Leibniz, n'est pas la simple juxtaposition de techniques, points de vue et astuces plus ou moins chatoyants.

Retrouver ainsi les mathématiques dans leur histoire, et peut-être exemplairement dans ce "moment" dénommé Leibniz, c'est aussi l'occasion de les retravailler comme vibrant des questions grandes ou petites qui nous hantent.

Venu du XVIIème siècle, un trésor pour nous enseignants de la fin du XXème siècle.

(30) Nous nous promettons d'y revenir...