- Lire ligne par ligne la démonstration en cherchant à tout comprendre en détail, surtout les enchaînements pour s'apercevoir que l'on n'a rien compris.
- Faire sa propre démonstration au préalable.
- Lire la démonstration et la rédiger en ses propres termes.

Nous en sommes arrivés à la conclusion qu'une bonne démonstration doit comprendre un premier paragraphe contenant toutes les idées directrices.

Il est une question que l'on se pose rarement en termes clairs: "Comment nos élèves comprennent-ils?", alors souvent, nous nous indignons:" Pourquoi n'ont-ils pas compris ?" et de nous interroger sur notre manière de donner l'information et peu sur celle dont elle est reçue.

Nous remercions les participants à cet atelier à qui nous avons beaucoup pris !

BIBLIOGRAPHIE

Les trois principaux documents

[1] IREM de Toulouse - *Equations du premier degré (méthode de "fausse position").* Le texte de Ben Ezra est extrait de cette brochure.

[2] J.C. Martzloff - *Histoire des mathématiques chinoises*, Masson, Paris 1988.

[3] IREM de Reims - *Un fruit bien défendu.* Cette brochure est le compte rendu de l'expérience dont il était question dans l'atelier.

Autres ouvrages

- J.P. Collette - *Histoire des mathématiques*, Vuibert-Erpi, Paris-Montréal 1973.
- IREM de Lyon - *L'algèbre et le calcul en Egypte ancienne* (Olivier Keller).

LA POLEMIQUE FERMAT-DESCARTES

Jean-Michel BAUCRY — IREM de Lille

J'ai tenté dans les quelques pages qui suivent de résumer brièvement les nombreux textes que je me proposais d'étudier lors de l'atelier "Fermat-Descartes" de l'université d'été, et qui n'ont pu l'être tous, faute de temps. Je n'ai pas joint ici ces textes, n'ayant pas su faire les choix nécessaires. Le lecteur intéressé les trouvera d'ailleurs facilement. Les polémiques scientifiques sont passionnantes, surtout lorsqu'elles opposent des esprits éminents, et d'autant plus qu'elles abordent des sujets fondamentaux. Celle-ci porte à la fois sur le calcul différentiel et la physique mathématique, sujets encore balbutiants à l'époque. Le premier épisode concerne les lois de réflexion et de réfraction de la lumière. Depuis la fin du XV° siècle, on sait fabriquer des lunettes corrigeant les vues déficientes. Plus tard Galilée en a amélioré le procédé, et utilisant les tables de réfraction établies par Vittelion (Witelo) au XIII°, il parvint à construire les premières lunettes astronomiques à l'aide desquelles il put parfaire ses observations. "*Mais à la honte de nos sciences cette invention si utile et si admirable n'a premièrement esté trouvé que par l'expérience et la fortune*" écrira Descartes dans la Dioptrique. En l'absence d'une explication théorique rigoureuse, quel crédit donner à l'observation au moyen d'une lunette? Ce qu'on y voit n'est-il pas qu'une aberration causée par l'instrument? Descartes ne s'associe certainement pas à ces reproches qui furent opposés effectivement aux découvertes de Galilée.

Mais Descartes, contre l'empirisme, tient précisément à fournir un véritable fondement à l'optique et par là-même à défendre l'usage de la lunette. Vers 1620, Snellius (ou Snell), un Néerlandais découvrit la loi des sinus mais ne la publia pas. Il semble d'ailleurs qu'il ne s'agissait que d'une découverte empirique dégagée à partir des tables de Vittelion, et non d'une loi déduite d'une démonstration. Cela ne pouvait, en eût-il eu connaissance, satisfaire Descartes, qui, lui, désirait proposer un modèle de la lumière dont découlerait cette loi. "*Il n'est pas besoin que j'entreprenne de dire au vray quelle est sa nature et je croy qu'il suffira que je me serve de deux ou trois comparaisons, qui aident à la concevoir en la façon qui me semble la plus commode, pour expliquer toutes celles de ses propriétés que l'expérience nous fait connoistre et pour déduire ensuite toutes les autres qui ne peuvent pas si aysément estre remarquées*". Ce qu'il réalise, puisque loin de s'en tenir à la loi de réfraction Descartes examine ensuite les formes selon lesquelles il faut polir un verre de sorte qu'il réalise tel ou tel effet à l'avance prescrit, fondant ainsi une véritable théorie des lentilles.

Examinons maintenant les métaphores dont il use pour décrire le comportement de la lumière. Celle du "baston" de l'aveugle d'abord: la lumière n'est autre que cette action fort prompte qui traverse les corps lumineux jusqu'à nos yeux. Celle du pressoir ensuite où la lumière est le mouvement de cette "matière subtile" qu'est le vin, les grappes figurant les parties grossières de l'air et des corps transparents. Dès qu'on presse depuis le haut de la cuve, le vin s'en écoule par le bas, ce n'est pas le vin qui instantanément s'est ainsi déplacé, mais l'inclination qu'il a à se mouvoir. De même la lumière est une inclination à se mouvoir qu'ont les objets lumineux(???), inclination qui se propage instantanément. Inclination au mouvement, la lumière doit en suivre les lois. Ainsi le phénomène de la réfraction s'interprétera-t-il comme la déviation d'un boulet sur la surface de l'eau, la vitesse du boulet étant ici l'analogue non pas de la vitesse de propagation de la lumière que Descartes croit infinie, mais de cette "inclination" au mouvement. Et voici l'explication de Descartes: la vitesse du boulet peut être décomposée suivant une composante parallèle à la surface de l'eau, laquelle ne sera pas affectée, et suivant une composante normale qui subira une modification telle que la vitesse globale du boulet passe d'une valeur propre à l'air à une seconde valeur qui soit propre à l'eau. Supposons que la vitesse propre au second milieu soit double de celle propre au premier, le temps mis pour parcourir OR (voir figure 1) sera moitié moindre de celui mis pour parcourir OI et puisque la composante tangentielle de la vitesse n'est pas modifiée on aura: $OP/OS = 1/2$ (et l'on a $OP/OS = \sin r/\sin i$)

Cette relation peut nous surprendre, elle contredit celle enseignée aujourd'hui qui s'écrirait dans cet exemple: $\sin r/\sin i = 2$, (l'indice d'un milieu étant précisément inversement proportionnel à la vitesse qu'a la lumière dans ce milieu). Examinons le phénomène de réfraction dans les milieux air-eau. On sait qu'un bâton plongé dans l'eau y paraît plus court. Il faut en conclure d'après l'étude qui précède (voir figure 2) que la lumière se meut plus vite en l'eau qu'en l'air ce qui peut choquer au premier abord. Voyons ce qu'en dit Descartes: "*Mais peut-estre vous étonneres-vous faisant ces expériences de trouver que les rayons de lumière s'incline plus dans l'air que dans l'eau tout au contraire d'une bale ... ce que vous cesseres toutes fois de trouver estrange si vous vous souvenes de la nature que j'ay attribué à la lumière*". En effet explique Descartes l'eau est un milieu plus dense et rigide que l'air sur les particules duquel les objets lumineux rebondiront moins mollement et donc iront plus vite... Paradoxal penserez-vous! Certes, mais éblouissant néanmoins.

Figure 1

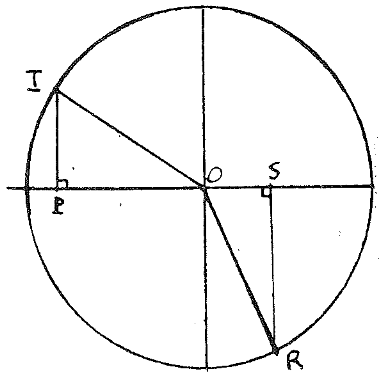
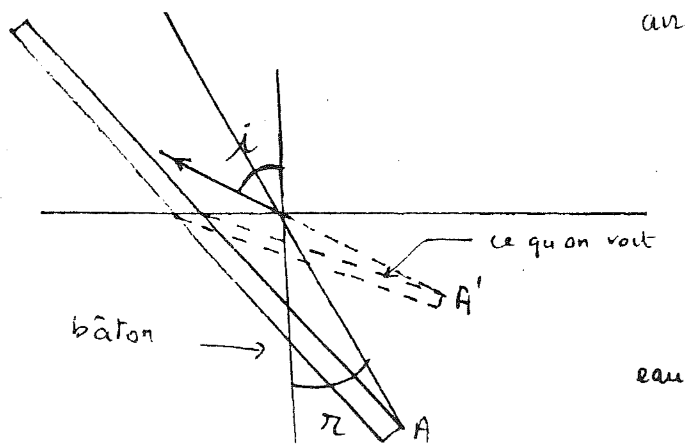


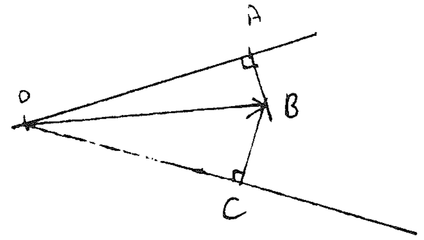
Figure 2



La *Dioptrique* dont sont extraits les passages ci-dessus, est publiée en 1637. Mais tandis qu'il l'écrivait, Descartes en avait envoyé des fragments à son ami le RP Mersenne pour qu'il les fît connaître, étudier et critiquer autour de lui. Un exemplaire parvint à Fermat qui expose ses objections dans une première lettre: Fermat comprend difficilement les métaphores de Descartes; il conçoit mal un mouvement ou une inclination au mouvement qu'aucune force ne justifie. Enfin le raisonnement de Descartes lui paraît trop ad-hoc. Il explique certes réflexions et réfractions, encore que Fermat semble douter de la validité des lois obtenues, mais n'aborde aucun autre aspect. Remarquons au passage que Fermat n'a pas encore résolu le problème de composition des vitesses et qu'à la règle du parallélogramme qu'il adoptera plus tard, sa seconde lettre le confirme, et dit-on sous

l'influence de Roberval, il semble préférer la règle du "bitriangle rectangle" qu'explique le dessin ci-dessous.

Figure 3



$$"\vec{OB}" = "\vec{OA}" + "\vec{OC}"$$

Descartes répond avec dédain à cette première lettre. Il prie d'ailleurs Mersenne de ne plus informer Fermat de ses travaux, ce que Mersenne évidemment ne fit pas. Fermat riposte alors par une seconde lettre. Cette fois il admet la règle du parallélogramme et propose un autre modèle: la surface de séparation agit comme une raquette infligeant à la lumière un supplément ou un soulagement de vitesse normale, indépendant de l'angle d'incidence. Un raisonnement géométrique simple lui permet alors de conclure à la proportionnalité des sinus des angles d'incidence et de déviation, l'angle de déviation étant la différence des angles de réfraction et d'incidence. Ce résultat n'infirme ni ne confirme celui de Descartes. Il nous prouve néanmoins que Fermat n'est pas encore convaincu de la loi énoncée par Descartes, qu'il n'a pas dû essayer de comparer aux tables de Vittelion. En fait Fermat avoue n'être pas vraiment satisfait de sa propre solution à ce problème qu'il abandonne provisoirement.

C'est Descartes qui relancera la polémique quand il prendra connaissance grâce à Mersenne des travaux de Fermat sur la recherche des extremums et son application à la détermination des tangentes. La méthode de Fermat est la suivante: quant à chercher les extremums d'une fonction $f(x)$, on pose l'équation $f(x+e) - f(x) = 0$, dans laquelle on met en facteur la plus grande puissance possible de e; les extremums de f sont alors les valeurs de x pour lesquelles s'annule le quotient lorsqu'on y fait $e = 0$. Améliorés par quelques astuces, le procédé s'applique à une large catégorie de fonctions tant rationnelles qu'irrationnelles. On peut aussi y ramener la détermination des tangentes: qu'on désire trouver la tangente au point (a, aa) de la courbe $y = xx$, on écrit qu'elle a pour pente p et que son point d'abscisse $(a+e)$ a une ordonnée moindre que $(a+e)(a+e)$, ce qui signifie que la fonction $g(e) = (a+e)(a+e) - (p(a+e) - pa + aa)$ admet un extremum en 0. La méthode précédente fournit alors p en fonction de a. Le travail de Fermat pêche malheureusement par deux défauts. D'une part il ne justifie pas sa méthode de recherche des extremums, ce que ne lui reprochera guère Descartes, il est vrai, mais surtout cette fonction g aux extremums de laquelle est ramenée la recherche des tangentes n'est pas explicitée. Comme elle n'a guère de signification géométrique, et de ce point de vue il faut souligner le caractère résolument moderne d'une démonstration reposant entièrement sur une analogie algébrique purement formelle, il n'est pas facile de suivre le raisonnement de l'auteur. Descartes la critique sévèrement et va jusqu'à la caricaturer pour mieux la blâmer. En fait comme il l'écrit avec une suffisance inouie, homme d'un système, il ne conçoit pas qu'on puisse désormais découvrir en géométrie en dehors des voies qu'il a tracées. Or ce calcul différentiel balbutiant est fort éloigné de la méthode qu'il proposait dans sa géométrie pour la recherche des normales à une courbe, fondée elle sur la notion de racine multiple.

Dans un texte qu'on peut dater de 1660 environ Fermat reprend le problème des réfractions et en vient à bout. Le paradoxe de la lumière plus rapide dans l'eau que dans l'air l'a toujours choqué: "*Le savant Descartes a proposé pour les réfractions une loi qui est comme on dit conforme à l'expérience; mais pour la démontrer il a du s'appuyer sur un postulat absolument indispensable à son raisonnement à savoir que le mouvement de la lumière se fait plus facilement et plus vite dans les milieux denses que dans les rares. Or ce postulat semble contraire à la lumière naturelle*". Fermat opte pour l'hypothèse contraire, il lui apparaît alors que le trajet lumineux résultant d'une réfraction sera parcouru plus rapidement que s'il avait été, entre les mêmes extrémités, rectiligne. Peut-être est ce là que naît le principe qu'il énonce alors: la lumière choisit les chemins dont les temps de parcours sont minimaux. Principe finaliste que n'aurait pu accepter Descartes, et qui fera l'objet de maintes critiques, mais qui a su s'imposer par l'élégance de son énoncé. Ayant alors recours à son procédé de recherche des extremums, lequel montre ici toute son efficacité puisqu'aucune autre méthode connue à l'époque n'eût pu venir à bout d'un calcul si complexe (la fonction à minimiser est la somme de deux racines carrées de polynômes), il détermine l'unique trajet éventuellement minimal et constate qu'il vérifie bien la loi des sinus énoncée par Descartes au renversement du rôle des vitesses près. Après quoi il s'assure par un calcul géométrique subtil mais traditionnel que le trajet ainsi trouvé est réellement minimal. L'optique fournira encore bien des controverses entre Huyghens et Newton; c'est Fresnel, en réfutant les affirmations de Newton, qui fera triompher la théorie ondulatoire dont Descartes apparaît comme le promoteur, elle-même remise en cause au début du XX° siècle. Quant au calcul différentiel, tout fragiles que soient restés ses fondements jusqu'à la fin du XIX°, on sait le succès que lui donnera sa grande efficacité, en dépit des hésitations de Descartes.

BIBLIOGRAPHIE

[1]Bernard Maitte: *La lumière*, Le Seuil, Paris...
[2]Descartes: *Discours de la méthode plus la dioptrique, les météores et la géométrie*, (réédition moderne de l'édition originale de 1637), Corpus des oeuvres philosophiques en langue française, Fayard, Paris 1986
[3]Descartes: *Oeuvres*, onze tomes en treize volumes, dont la correspondance, sous la direction d'Adams et Tannery, rééd. Vrin, Paris 1974-83
[4]Fermat : *Opera varia mathematica* (réédition commentée sous la direction de Paul Tannery et Charles Henry, de l'édition originale de 1669. Plus les *Correspondances*, plus les *Ecrits latins* plus l'*Inventum* de J. de Billy plus le *Commercium epistolicum* de Wallis. Gauthiers Villard, Paris 1891-1896

LES ORIGINES DES FONCTIONS HYPERBOLIQUES

Neil BIBBY
School of Education
University of Nottingham, U.K.

Mes recherches se basent sur des inquiétudes pédagogiques que j'ai eues pendant plusieurs années. On peut les résumer par un extrait du livre d'Imre Lakatos, *Preuves et Réfutations*, dans lequel il fait une comparaison entre *l'approche déductiviste et l'approche heuristique*. Il écrit[1] :

> *La méthodologie euclidienne a développé un certain style de présentation obligatoire auquel je ferai référence par l'expression "style déductiviste". Dans ce style on commence par une liste précautionneuse d'**axiomes**, de **lemmes** ou de **définitions**. Les axiomes et les définitions paraissent fréquemment artificiels et d'une complication déroutante. On ne dit jamais comment ces complications sont nées. La liste d'axiomes et de définitions est suivie de **théorèmes** soigneusement mis en mots, encombrés de conditions pesantes ; il semble impossible que quiconque ait jamais pu les inventer. [...] L'étudiant en mathématiques est obligé, dans le rituel euclidien, de suivre ce tour de prestidigitation sans poser de questions sur le contexte ni sur la façon dont est réalisé l'escamotage.*

Il continue ...

> *... Le style déductiviste cache la lutte, dissimule l'aventure. L'histoire toute entière disparaît. Les tentatives successives de formulation du théorème au cours de la procédure de preuve sont vouées à l'oubli cependant que le résultat final est exalté, élevé à une infaillibilité sacrée.*

Ainsi, c'est cet "autoritarisme mathématique" qui me gêne, et le protocole "définition-théorème-preuve" qui l'incarne. Par conséquent, j'ai essayé de donner à mes étudiants l'histoire de chaque sujet qu'ils rencontrent. Lakatos a appelé cette approche "l'approche heuristique". *Preuves et Réfutations* est seulement l'étude d'un cas : la relation d'Euler pour les polyèdres réguliers.

Si on prend le cas des fonctions hyperboliques, on a un bon exemple de l'autoritarisme dont Lakatos a parlé. Une introduction typique est donnée dans un texte anglais de D.Griffiths[2] :

37.1 Introduction The hyperbolic functions are defined in terms of the exponential function, and all their properties may be derived from the properties of exp x; in a sense, therefore, there are not really any new ideas in this chapter. Our discussion of the algebra and calculus of the hyperbolic functions will involve work from many of the earlier chapters, providing a good opportunity for revision. The reader should aim to become as familiar with these functions as with the trigonometric functions or exp x and ln x.

37.2 Definitions and basic properties The functions cosh x and sinh x (sometimes referred to as *hyperbolic cosine* and *hyperbolic sine*) are defined by

$$\boxed{\begin{aligned}\cosh x &\equiv \tfrac{1}{2}(e^x + e^{-x})\\ \sinh x &\equiv \tfrac{1}{2}(e^x - e^{-x}).\end{aligned}}$$

They are often abbreviated to ch x and sh x. Note that sinh is pronounced 'sinsh' (with a long i) or 'shine'.

[1]Lakatos (1984), p. 184-185
[2]Griffiths (1984), volume 2, p. 421; la traduction est donnée dans l'Appendice A