L'AIRE D'UN TRIANGLE RECTANGLE EN NOMBRES NE PEUT ETRE UN CARRE

lectures multiples d'un résultat mathématique

Catherine GOLDSTEIN CNRS/Université Paris XI

Le but de l'atelier était d'étudier en détail deux textes du XVIIème siècle, consacrés à la preuve que "*l'aire d'un triangle rectangle en nombres n'est pas un carré*" et de les utiliser pour dégager quelques caractéristiques du travail en théorie des nombres à cette époque. Les deux textes ont recours à un procédé démonstratif connu depuis Fermat comme "*la méthode de descente infinie*", dont l'exposé figure dans une de ses lettres à Carcavi, très souvent citée, écrite vers 1659[1] :

"*...Et pour ce que les méthodes ordinaires qui sont dans les Livres étaient insuffisantes à démontrer des propositions si difficiles, je trouvai une route tout à fait singulière pour y parvenir.*

J'appelai cette manière de démontrer la "*descente infinie*" *ou* "*indéfinie*", *etc...; je ne m'en servis au commencement que pour démontrer les propositions négatives, comme, par exemple:*

(...) ; qu'il n'y a aucun triangle rectangle en nombres dont l'aire soit un nombre quarré."

Cette méthode, explique Fermat, consiste à montrer que s'il existait un tel triangle à côtés entiers d'aire carrée, il en existerait forcément un autre, plus petit que le premier, avec la même propriété, et ainsi de suite; comme il est impossible d'avoir une suite infinie décroissante d'entiers, il y a contradiction. Mais l'auteur n'explique pas dans cette lettre comment construire le triangle plus petit, car, dit-il, "*c'est là tout le secret de ma méthode*". C'est au détail de cette construction, à partir d'autres textes, de Fermat et de Frenicle de Bessy, qu'était consacré l'atelier.

Il y a encore un intérêt mathématique à connaître ce procédé, au moins dans son principe, et à savoir quelles exigences ordonnent sa mise en oeuvre : la méthode, ou plutôt ses avatars modernes, continue en effet à inspirer la recherche contemporaine.

D'autre part, les textes du XVIIème siècle dont il s'agira peuvent servir de points de repère pour indiquer la formation d'un nouveau sujet d'étude, et d'un projet de travail sur certaines questions numériques. Nous nous intéressons donc également à la manière dont ce projet est accompli, ou non, dans la suite, et quelles informations nous en pouvons tirer sur les mathématiciens qui s'occupèrent de ces questions à une époque donnée.

Mais ceci se connecte à d'autres types d'intérêt, de nature plus épistémologique : face aux nombreuses variantes, aussi bien synchroniques, à une époque donnée, que diachroniques, dans les couches successives de méthodes arithmétiques, entre le XVIIème et le XXème siècles, de cette méthode, il est légitime de se demander ce qui fonde son identité ; appliquée dans des circonstances *a priori* extrêmement diverses mettant en jeu des techniques mathématiques multiples (depuis l'arithmétique élémentaire sur les entiers jusqu'aux fonctions elliptiques ou à la géométrie algébrique contemporaine), l'identification d'un même principe, d'une même structure démonstrative, la reconnaissance qu'il s'agit, dans tous les cas, d'une descente infinie, ne va pas du tout de soi. Quand dit-on que deux preuves sont identiques ? Que signifie, plus généralement, qu'une même méthode est employée pendant plusieurs siècles ? S'agit-il vraiment de la même chose ?

[1]Cf [Fermat, OC], t II, lettre CI, p 431 ff.

Familiarisation avec la méthode de la descente infinie : Fermat et Frenicle de Bessy

1) Les deux textes étudiés en détail dans l'atelier (par demi-groupe !) sont dus, l'un à Pierre de Fermat (1601-1665) lui-même, l'autre à Frenicle de Bessy (1605-1675). Le premier, Conseiller au Parlement de Toulouse, est bien connu, à la fois comme co-inventeur de la géométrie analytique et comme initiateur de la théorie des nombres en Europe (nous verrons plus loin les restrictions à apporter à ce second point). Il n'a, en fait, jamais publié, ni même écrit de traité ou de mémoires sur ses trouvailles numériques. Les traces qui nous restent de son activité sont incluses dans sa nombreuse correspondance, en particulier avec les membres du cercle du Père Marin Mersenne, à Paris, ou dans les annotations marginales dont il couvrit ses livres, dont surtout son exemplaire des *Arithmétiques* de Diophante, dans l'édition traduite en latin et commentée de Bachet de Méziriac (1621)[2]. Un de ses interlocuteurs de prédilection fut justement Bernard Frenicle de Bessy, lui aussi juriste de formation, un des premiers membres de l'Académie des Sciences en 1666, qui écrivit plusieurs traités sur des questions liées aux nombres ou aux carrés magiques ; c'est du *Traité des Triangles Rectangles en Nombres*, publié à titre posthume, qu'est extraite la preuve de Frenicle que nous allons étudier.

Quant au problème mathématique lui-même, il vient directement d'une longue lignée de problèmes sur les triangles rectangles en nombres, qu'on trouve sous une forme ou une autre déjà chez plusieurs auteurs grecs (dont Diophante) et quasiment sans discontinuité jusqu'au XVIIème siècle. Un triangle rectangle en nombres, ce n'est rien d'autre que trois nombres (en général entiers ou fractionnaires) a, b, c, vérifiant la relation de Pythagore $a^2 + b^2 = c^2$, donc formant les trois côtés d'un triangle rectangle. Les propriétés du triangle s'expriment ainsi en termes de relations sur les nombres. Parmi les connaissances de base sur les triangles en nombres entiers, au XVIIème siècle, figure le fait que les côtés peuvent s'exprimer sous la forme :

$$a = d\,(p^2 - q^2),\quad b = 2dpq,\quad c = d\,(p^2 + q^2),$$

où d est le facteur commun aux trois côtés a, b, c, (si ces côtés sont premiers entre eux, $d = 1$ et le triangle est dit "*primitif*"), p et q sont des entiers de parité différente, premiers entre eux, appelés les "*nombres générateurs*"- les expressions ci-dessus sont valables à échange de a et b près. Cet engendrement des triangles, et tout particulièrement l'expression de l'hypoténuse d'un triangle primitif comme somme de carrés, est d'ailleurs prouvé au début du *Traité des Triangles Rectangles*. Le problème sur l'aire est plus original, bien que Viète et Bachet aient déjà posé des questions relatives à la forme de l'expression de l'aire d'un triangle. Il figure à plusieurs reprises dans la correspondance de Fermat et semble une de ses questions favorites; il est d'ailleurs raisonnable de supposer que c'est sur son initiative que Frenicle s'y intéressa. Ce dernier en effet est plutôt un grand amoureux des calculs sur les nombres qu'un amateur de problèmes plus théoriques (surtout négatifs) comme celui-ci[3].

2) Les deux textes originaux (celui de Fermat, en latin, figure aussi dans la traduction faite par Tannery) sont donnés en annexe. Il était proposé dans l'atelier d'en rendre compte en cherchant à dégager:

- le cheminement des démonstrations (recensement des étapes, de l'articulation)
- les connaissances utilisées et leur mise ou non en valeur

[2]Ces *Arithmétiques* furent l'une des sources les plus importantes de problèmes (numériques ou algébriques) au XVIIème siècle. Il s'agit de plusieurs livres de problèmes demandant de trouver des nombres (rationnels chez Diophante) vérifiant certaines relations, par exemple: "*Trouver trois nombres dont la somme des carrés de deux quelconques ajoutée à leur produit fasse un carré*". Les mathématiciens des XVIème et XVIIème siècles s'en sont donné à coeur joie pour approcher ces questions par voie algébrique!

[3]Cf. le jugement de Sir Digby, toujours cité, sur lui: "*pour si grand feu d'esprit qu'il (Frenicle) ait et quelque merveilleux que soit son génie pour la science des nombres, son feu serait plus brillant, s'il le voulait exciter ou augmenter par l'étude, par la lecture des anciens ou par la conversation*", in [Fermat, OC], t II, p 360.

- la hiérarchisation des problèmes liés au cours de la démonstration à la question principale
- l'écriture utilisée (notations, symbolisme, langue)
- la mise en jeu de la descente infinie.

Dès la première minute s'est posée la question, soulevée dans l'introduction, de la relecture. Ces textes du XVIIème siècle n'emploient en effet aucun formalisme algébrique, ni même aucune notation symbolique; or, la tentation de les écrire avec ces notations est presque insurmontable pour les lecteurs contemporains, comme les participants et participantes de l'atelier en ont fait l'expérience: spontanément, et unanimement, tout le monde a utilisé de telles notations pour "comprendre" les textes. J'ai donné ailleurs[4] deux lectures algébriques *distinctes* compatibles avec le texte de Fermat, moins complet (à cause, nous dit son auteur, de l'exiguïté des marges...), donc plus sujet à des lectures multiples que celui de Frenicle. Leur incompatibilité dans la notation moderne, et leur compatibilité avec le texte du XVIIème, soulignent assez l'ambiguïté de telles transcriptions. En même temps, celles-ci sont difficiles à éviter tant sont transparentes pour nous l'usage des lettres et des identités algébriques; je rappellerai donc quand même d'abord, avec toutes les réserves nécessaires et seulement pour faciliter l'accès aux textes, les preuves de Fermat (dans sa version la plus couramment admise !) et de Frenicle, en utilisant un symbolisme algébrique.

La démonstration de Frenicle de Bessy, comme d'ailleurs celle de Fermat, se ramène (en divisant l'aire par le carré de d, facteur commun des côtés) au cas d'un triangle primitif, où les côtés sont premiers entre eux. Dans ce cas, si l'aire $A = ab/2 = S^2$, a, le petit côté impair dans nos notations, est un carré r^2, et b, le côté pair, est $2r'^2$, avec r et r' premiers entre eux de produit S, comme on s'en convainc aisément en décomposant a, b et S en produits de facteurs premiers[5]. Donc, en utilisant l'expression de a en fonction des nombres générateurs,

$$a = r^2 = p^2 - q^2\,,\quad \text{soit}\quad r^2 + q^2 = p^2$$

Les entiers $(r,\ q,\ p)$, premiers entre eux, forment à nouveau les trois côtés d'un deuxième triangle (primitif et plus petit que le premier) dont p est l'hypoténuse et q le côté pair de l'angle droit (puisque l'autre côté, r, est l'impair).

Quant à b, c'est le double produit des nombres générateurs, donc $2r'^2 = 2pq$; par un raisonnement analogue à ci-dessus, p et q sont donc des carrés, soit $p = u^2$ et $q = v^2$. Le nouveau triangle rectangle formé $(r,\ q,\ p)$ a une hypoténuse et un côté pair carrés.

Soient s et t les nombres générateurs de ce triangle $(r,\ q,\ p)$. Alors, $q = 2st = v^2$, donc le générateur impair, s disons, est un carré m^2 et le générateur pair t un double carré $2n^2$; mais d'autre part,

$$p = s^2 + t^2 = (m^2)^2 + (2n^2)^2 = u^2\ ,$$

ce qui prouve que $(m^2,\ 2n^2,\ u)$ sont les trois côtés d'un triangle (primitif et plus petit encore que le deuxième). Son aire vaut $(m^2\ .\ 2n^2)\ /\ 2 = (mn)2$, donc est un carré. Donc, conclut Frenicle:

"*supposant un Triangle rectangle Primitif, dont l'aire soit un nombre quarré, on en trouvera un troisième en nombres entiers par une conséquence infaillible, beaucoup plus petit, qui auroit aussi un quarré pour son aire (...), et ainsi à l'infini en diminuant toujours. Mais cette conséquence est absurde car les nombres entiers ne vont pas à l'infini en descendant(...) ; et par conséquent il est impossible que l'aire d'un Triangle Rectangle primitif soit un nombre quarré*".

Voici l'argument de descente.

[4]Cf [Goldstein, 1991].

[5]Les auteurs du XVIIème siècle n'ont pas recours à la décomposition en facteurs premiers pour établir ce fait, mais à un argument détourné reposant sur la proposition VIII, 26 des *Eléments* d'Euclide.

La preuve de Fermat peut s'expliquer là encore à partir d'un triangle rectangle primitif (a, b, c) : son aire s'écrit $pq\,(p^2 - q^2)$, où p et q sont les nombres générateurs de ce triangle primitif ; p, q et $p^2 - q^2$ sont trois nombres premiers entre eux ; si l'aire du triangle est carrée, leur produit est un carré et donc chacun d'eux est un carré, soit $p = u^2$, $q = v^2$, $p^2 - q^2 = r^2$, d'où :

$$u^4 - v^4 = r^2$$

Donc $(u^2 + v^2)(u^2 - v^2) = r^2$, et là encore, les deux facteurs sont premiers entre eux (rappelons que u et v, comme p et q, sont de parité différentes et premiers entre eux), ce qui impose :

$$u^2 + v^2 = x^2 \quad \text{et} \quad u^2 - v^2 = y^2$$

Soit encore:

$$x^2 = 2v^2 + y^2 \quad \text{et} \quad u^2 = v^2 + y^2,$$

Comme x et y sont premiers entre eux et de même parité, $(x - y)$ et $(x + y)$ ont 2 pour seul facteur commun; puisque leur produit est

$$x^2 - y^2 = (x - y)(x + y) = 2v^2,$$

l'un des deux est un carré (pair), disons $(2m)^2$, et l'autre un double carré, disons $2n^2$. Donc

$$x = [(x + y) + (x - y)]/2 = 2m^2 + n^2$$

et

$$x^2 = (2m^2 + n^2)^2 = (2m^2)^2 + (n^2)^2 + v^2$$

En particulier $u^2 = (2m^2)^2 + (n^2)^2$, ce qui donne un nouveau triangle rectangle. Comme au début de la démonstration, les nombres générateurs de ce triangle, p' et q', sont des carrés dont la somme et la différence sont aussi des carrés. Il est facile de vérifier que leur somme est plus petite que la somme de p et q :

$u = p'^2 + q'^2$, donc $p' < u < u^2 = p$ et $2m^2 = 2p'q'$ divise strictement $v^2 = q$ donc $q' < q$.

"*Donc*, conclut Fermat, *si on donne deux carrés dont la somme et la différence soient des carrés, on donne par là même, en nombres entiers, deux carrés jouissant de la même propriété et dont la somme est inférieure. Par le même raisonnement, on aura ensuite une autre somme plus petite que celle déduite de la première, et en continuant indéfiniment on trouvera toujours des nombres entiers de plus en plus petits satisfaisant aux mêmes conditions. Mais cela est impossible, puisqu'un nombre entier étant donné, il ne peut y avoir une infinité de nombres entiers qui soient plus petits*".

Voilà la descente infinie.

3) Comparaison des deux preuves

La première remarque qui s'imposait à tous les participant/es est leur différence ! Nous la soulignons ici à partir des textes originaux et non à partir de leur transcription ci-dessus[6].

Une première différence vient bien sûr du contexte des deux textes. La preuve de Frenicle arrive à la fin d'une suite de propositions déductives (auxquelles elle fait souvent appel), celle de Fermat est plutôt une esquisse, apparemment à des fins personnelles. Par ailleurs, le recensement des étapes de chacune met en valeur une différence importante du cheminement du raisonnement : le "*triangle intermédiaire*" de Frenicle, qui s'intercale entre les deux triangles d'aire carrée permettant l'argument de descente, n'apparaît pas explicitement chez Fermat. Par contre, des problèmes nouveaux sont mis en valeur dans le cheminement de la preuve de Fermat : les différences de bicarrés (puissances quatrièmes), les nombres s'écrivant comme somme d'un carré et d'un double carré, les carrés de somme et différence carrées. Ces problèmes sont plus directement transcriptibles algébriquement que ceux, exprimés en termes de triangles rectangles, que la preuve de Frenicle de Bessy indique préférentiellement. Ceci est d'autant plus remarquable que le *Traité des Triangles Rectangles*, publié en 1676, contient par ailleurs quelques (timides) expressions algébriques dans d'autres démonstrations.

L'autre différence notable concerne la manière dont la descente infinie est mise en oeuvre : il faut un moyen pour mesurer les triangles rectangles d'aire carrée, qui permette de "*descendre*". Chez Frenicle, cette mesure n'est pas clairement définie ; il évoque simplement, au moment de la construction du triangle intermédiaire, que certains de ses côtés sont des nombres générateurs du précédent triangle, qui est donc plus grand ; rien n'est précisé pour la mesure du troisième. Dans d'autres textes, Frenicle utilise l'hypoténuse pour classer les triangles rectangles. Fermat, quant à lui, soumis à sa prédilection pour les expressions en somme de carrés, mesure la descente sur ces derniers, ce qui revient à utiliser la somme des nombres générateurs pour repérer la taille des triangles. Ces mesures, toutes valables dans le cas qui nous occupe, ne donneraient pas des classements équivalents en général : par exemple, le triangle de nombres générateurs 11 et 2 est "*plus petit*" que celui de nombres générateurs 8 et 7, si l'on se sert de la somme des nombres générateurs comme le fait Fermat, mais "*plus grand*" si l'on considère son hypoténuse. On remarquera au passage que jamais la surface elle-même n'est utilisée; les problèmes sur les triangles rectangles sont implicitement, comme presque toujours dans la littérature spécialisée du XVIIème siècle, traités comme des problèmes sur les nombres-côtés et non comme de véritables problèmes géométriques.

Par ailleurs, outre l'utilisation même de la descente infinie pour conclure[7], les deux textes utilisent un fonds commun de résultats mathématiques ; le principal est bien sûr l'engendrement des triangles rectangles rappelé ci-dessus qui est nécessaire à plusieurs reprises. L'autre, encore plus prégnant d'ailleurs dans la démonstration de Fermat, est le fait qu'un produit de nombres premiers entre eux ne peut être un carré que si chaque nombre l'est (ou une variante du même principe). Avec la descente infinie (basée sur une caractéristique des entiers, leur nature discrète, excluant une suite infinie strictement dé-

[6]Les lecteurs attentifs auront remarqué que les mêmes lettres ont été utilisées dans les deux preuves. Il est exact que les éléments des triangles qu'elles repèrent sont identiques dans les deux preuves, ce qui permettrait une comparaison plus étroite de leur déroulement. Ainsi le triangle intermédiaire de Frenicle se retrouve dans le "carré différence de bicarrés" chez Fermat. Mais réussir ainsi à utiliser les mêmes lettres demande justement un certain travail, qui mesure bien la distance entre la notation symbolique et les textes originaux. Il va sans dire que les deux groupes de l'atelier ayant chacun une preuve en charge et travaillant indépendamment n'avaient pas du tout choisi les "mêmes lettres aux mêmes endroits" lors de la première mise en commun ; cf. aussi [Goldstein,1991].

[7]Cette méthode est revendiquée comme sienne par Fermat dans la lettre à Carcavi mentionnée ci-dessus où il en indique plusieurs applications; elle n'est par contre pas utilisée ailleurs que dans le *Traité des Triangles Rectangles* par Frenicle. Fermat mentionne d'ailleurs qu'il a communiqué à Frenicle des preuves de ce type. Quant à décider si la démonstration *exacte* parue dans le *Traité* a Fermat pour père légitime, c'est une autre affaire et les avis sont partagés, cf [Weil, 1983] et [Goldstein, 1991].

croissante d'entiers positifs), cet argument de factorisation constitue la base arithmétique fondamentale des deux démonstrations.

4) Il semble licite de conclure que, tout en s'inscrivant dans une même tradition de problèmes sur les nombres, et en ayant recours aux mêmes principes arithmétiques, les deux preuves diffèrent par leurs objectifs principaux et leur focalisation. Du point de vue de l'étude des triangles rectangles en nombres, celle du *Traité* de Frenicle est plus économique et directe. Celle de Fermat, en revanche, met l'accent sur d'autres questions conjointes, exprimées de manière plus immédiatement algébriques. Ces tendances se retrouvent pleinement dans ce que nous savons par ailleurs du travail du mathématicien et de son projet arithmétique.

Le projet arithmétique de Fermat

Des traces de ce projet se trouvent à plusieurs endroits de sa correspondance, dont la lettre à Carcavi déjà citée et surtout un des textes du Défi aux mathématiciens européens qu'il lança en 1657 :

"Il est à peine quelqu'un qui propose des questions purement arithmétiques, il est à peine quelqu'un qui sache les résoudre. Est-ce parce que l'Arithmétique a plutôt été traitée jusqu'à présent au moyen de la Géométrie que par elle-même ? C'est la tendance qui apparaît dans la plupart des Ouvrages tant anciens que modernes, et dans Diophante lui-même. Car s'il s'est écarté de la géométrie un peu plus que les autres en astreignant son analyse à ne considérer que des nombres rationnels, il ne s'en est pas dégagé tout à fait, comme le prouvent surabondamment les ***Zététiques*** *de Viète, dans lesquelles la méthode de Diophante est étendue à la quantité continue, et par suite à la Géométrie.*

Cependant l'Arithmétique a un domaine qui lui est propre, la théorie des nombres entiers ; cette théorie n'a été que très légèrement ébauchée par Euclide et n'a pas été assez cultivée par ses successeurs (...) ; les arithméticiens ont donc à la développer ou à la renouveler"[8].

Il ne faut pas faire ici de contre-sens anachronique sur le mot Géométrie qui ne renvoie pas à une interprétation des équations comme courbes, mais plutôt à la possibilité de traiter tous les problèmes, y compris diophantiens, pour n'importe quelle sorte de nombres, au moyen des techniques algébriques, comme l'a fait Viète.

Il s'agit donc pour Fermat de définir un nouveau champ d'étude, consacré spécifiquement aux entiers, et d'adapter à ce nouveau domaine des outils développés ailleurs. Dans ce contexte, la méthode de descente infinie apparaît comme un moyen privilégié de tenir compte des propriétés spécifiques aux entiers dans le cadre de preuves de nature *"analytique"* (au sens du XVIIème siècle, c'est-à-dire pour nous ce qui met en oeuvre les transformations algébriques). Cette interprétation se trouve d'ailleurs confirmée par plusieurs remarques de Frenicle, peu versé par goût et connaissances aux méthodes algébriques, et qui loue Fermat d'avoir su trouver une *"nouvelle analyse"* pour ces types de questions (arithmétiques) : *"Je sais que l'Algèbre de ce pays-ci n'est pas propre pour soudre ces questions, ou pour le moins on n'a pas encore ici trouvé le moyen de l'y appliquer : c'est ce qui me fait croire que vous vous êtes fabriqué depuis peu quelque espèce d'Analyse particulière pour fouiller dans les secrets les plus cachés des nombres, ou que vous avez trouvé quelque adresse pour vous servir à cet effet de celle que vous aviez accoutumée d'employer à d'autres usages."*[9]

L'avenir du projet de Fermat

Les contemporains de Fermat ne semblèrent pas très impressionnés par son projet! Il ne faut pas oublier que des problèmes *a priori* plus intéressants, comme la détermination des extrema ou des tangentes, l'étude des courbes, des aires et des volumes, ou les questions liées aux applications mécaniques et optiques, retenaient davantage leur attention. Le mépris ou au moins l'absence d'intérêt pour les questions arithmétiques est patent chez la plupart des mathématiciens que nous jugeons importants au XVIIème siècle, de Descartes à Wallis, en passant par Pascal ou van Schooten[10]. Ceux qui s'y consacrent privilégient la partie la plus directement algébrique du sujet, les équations diophantiennes et la recherche de leurs solutions ; c'est cette démarche qu'on trouve par exemple chez Ozanam ou Billy. Les problèmes *"impossibles"*, la démonstration de l'*absence* de solutions ne les passionnent pas. Ceci s'aggrave bien sûr de ce que les écrits de Fermat ne sont guère connus et, en ce qui concerne les notes du Diophante, mal édités, donc difficiles à comprendre. *"Pas la peine de dépenser autant d'énergie là-dessus !"*, semble être la position générale à la fin du XVIIème siècle. Le projet de Fermat, au moins approximativement, ne sera repris qu'au siècle suivant, en particulier par Euler, Lagrange, puis Legendre. A ce moment, le langage algébrique est devenu, comme maintenant, le langage naturel et quasi-transparent pour s'exprimer. Le théorème sur l'aire des triangles figure d'ailleurs dans le traité d'*Algèbre* d'Euler[11]. La lecture du texte de Lagrange consacré à des problèmes du même type, proposé en annexe, est à cet égard édifiante : on y trouve une manière de présenter ces questions qui est essentiellement celle adoptée plus haut dans notre transcription algébrique des preuves de Fermat et de Frenicle, écrites, rappelons-le un siècle plus tôt. C'est dire encore une fois à quel point cette transcription en apparence si innocente est anachronique.

L'étape suivante est l'introduction des nombres complexes dans le traitement des questions arithmétiques, puis l'extension à ces nombres des principes arithmétiques dont nous avons déjà parlé : factorisation unique, voire algorithme d'Euclide, *"descente infinie"* (c'est-à-dire mesure de la grandeur de tels nombres). Par exemple, une somme de carrés entiers $p^2 + q^2$ s'écrit sous la forme $(p + iq)(p - iq)$, où $i = \sqrt{-1}$.

On peut en particulier relire les preuves ci-dessus en les interprétant au moyen de l'arithmétique des nombres de la forme $\{a + ib$, avec a et b entiers $\}$ (nous appelons maintenant ces nombres les entiers de Gauss); il se trouve que les règles usuelles de factorisation unique sont encore valables pour ces entiers, mais ce ne sera plus le cas dans le cadre plus général des entiers de la forme $\{a + \sqrt{-d}\, b$, avec a et b entiers, d fixé$\}$. Une grande partie du travail des théoriciens des nombres allemands du XIXème siècle, en particulier, sera de préciser ces notions et d'introduire les idéaux afin de récupérer l'unicité de la factorisation. Kummer, par exemple, se servira de cette notion pour étudier l'équation $x^n + y^n = z^n$ $(n > 2)$[12].

Descente infinie et point de vue de la géométrie algébrique.

Un point de vue nouveau s'introduisit dans ces questions à la fin du XIXème siècle, profitant du développement spectaculaire de la géométrie projective d'une part, et du travail sur les fonctions elliptiques complexes d'autre part. Ce point de vue consiste à regarder une équation polynomiale (par exemple, $u^4 - v^4 = r^2$, transcription d'une relation qui apparaît dans le texte de Fermat) comme définissant une courbe algébrique (ou une surface, ou une variété de dimension supérieure, selon le nombre de variables en jeu). La recherche des solutions entières ou rationnelles revient ainsi à la recherche de points à coordonnées entières ou rationnelles sur la courbe (surface, variété,...), qu'on appelle pour simplifier *"points entiers ou rationnels"* de la courbe (surface,...). On peut alors utiliser les classifications de courbes (disons) et les outils de la géométrie pour élucider le problème arithmétique de départ ; ce point de vue est encore très important de nos jours - les travaux de G. Faltings impliquant entre autres que le nombre de solutions

[8] Cf [Fermat, OC], t II, lettre LXXXI, p 334 ff et t III, p. 312 pour la traduction française citée.
[9] Cf [Fermat, OC], t II, lettre XLIX, p 227.

[10] Cf [Goldstein, 1989] pour une interprétation plus détaillée de leurs réactions et [Mahoney, 1973] pour des informations sur le milieu mathématique du XVIIème siècle.
[11] Cf [Euler, 1770], ch XIII, p 405 de l'édition de 1985.
[12] Cf [Edwards, 1977] et [Goldstein, 1989].

possibles de l'équation "*de Fermat*" $x^n + y^n = z^n$ (n >2) est fini et qui lui valurent la médaille Fields en 1983 procèdent de cet ordre d'idées.

La question des aires de triangles rectangles en nombres peut dans ce contexte être interprétée comme suit : si A est cette aire et a, b, c les côtés, on a

$$A = ab/2 \qquad \text{et} \qquad a^2 + b^2 = c^2.$$

Donc

$$A + (c/2)^2 = (a+b)^2/4$$

et

$$-A + (c/2)^2 = (b - a)^2/4$$

Il existe donc un rationnel X (qui vaut $(c/2)^2$ tel que X, A+X, -A + X soient des carrés rationnels, donc aussi leur produit ; on a ainsi un point rationnel sur la courbe $Y^2 = (-A + X)\, X\, (A + X)$.

Réciproquement, il n'est pas très difficile de montrer que si un tel point rationnel existe sur la courbe d'équation $Y^2 = X^3 - A^2X$, avec X carré et de dénominateur pair, A est surface d'un triangle rectangle à côtés rationnels. Si A est un carré, le changement de variable (qui préserve la rationalité des coordonnées puisque $\sqrt{A}$ est entier !) $X \to X/A$, $Y \to Y/(A\sqrt{A})$ ramène l'étude à celle de l'équation $Y^2 = X^3 - X$. Il s'agit en définitive de prouver qu'il n'existe pas sur cette courbe de points rationnels dont la première coordonnée soit un carré de dénominateur pair, en dehors bien sûr des points évidents (0, 0), (1,0), (-1,0), qui correspondraient à des triangles rectangles "*dégénérés*" avec un côté nul. Une démonstration bien plus générale relative à cette question a été donnée par Mordell en 1922, puis étendue et raffinée par Weil en 1928 : tous les points à coordonnées rationnelles sur une courbe d'équation

$$Y^2 = f(X) = X^3 + aX + b, \quad \text{a et b entiers}$$

se déduisent par des transformations rationnelles[13] explicites d'un nombre fini d'entre eux. Dans le cas qui nous intéresse, on montre que ces points de base sont justement les points "*dégénérés*" où $Y = 0$ et que les transformations appliquées à eux ne fournissent pas de nouveaux points, d'où le résultat souhaité. Le fait le plus remarquable pour nous dans la démonstration de Mordell et Weil est le recours explicite à une descente infinie. Les transformations rationnelles évoquées ci-dessus permettent précisément de déduire d'un point à coordonnées rationnelles sur la courbe un autre point de la courbe, lui aussi à coordonnées rationnelles ; il s'agit de prouver qu'il est "*plus petit*" et en premier lieu de donner un sens à la taille d'un point à coordonnées rationnelles sur une courbe : une évaluation de cette taille se fait par exemple en calculant le maximum des valeurs absolues du numérateur et du dénominateur (entiers !) de l'abscisse X du point.

Tout comme nous avions plus haut utilisé librement la transcription symbolique pour rendre compte des preuves de Fermat et Frenicle, il est possible de les relire à cette aune géométrique ! Au passage, on sera obligé de substituer au problème de Fermat sur les triangles une question liée à l' équation cubique ci-dessus et d'abandonner la restriction de la descente infinie aux entiers pour étendre sa validité aux point rationnels d'une courbe. On sera aussi obligé d'interpréter comme des transformations rationnelles entre courbes les manipulations des équations (ou plutôt des triangles) que nous trouvons dans les démonstrations d'origine... Mais dans ce contexte, les deux preuves gagnent une proximité plus difficile à repérer dans leur cadre original: les passages de triangles en tri-

---

[13] C'est-à-dire définies par des fractions rationnelles en les coordonnées.

angles lues comme transformations de courbes se présentent alors comme de simples variantes[14].

Quelques conclusions

Comme nous le voyons à travers cette perspective chronologique d'un "*même*" problème, la comparaison de deux preuves dépend intimement du langage choisi pour l'étudier. Il est tentant pour la plupart d'entre nous de mettre en équations algébriques les problèmes arithmétiques du XVIIème siècle; il l'est tout autant peut-être, pour les familiers du point de vue géométrique contemporain, de les relire en termes de transformations de courbes.

La *pédagogie* peut ainsi se trouver dans un premier temps (voire toujours !) en contradiction avec le *souci historique*: on comprend certainement mieux ce qui s'articule avec ou s'appuie sur ce qui est le plus familier; les notations, changements de points de vue, etc..., ont été mis en place en partie pour réussir à banaliser les travaux mathématiques du passé, mais ils ne les restituent pas dans leur authenticité, et souvent, les contrefont plus qu'ils n'en rendent compte en abolissant la dynamique de leurs développements.

Ici, par exemple, ces substitutions de sens et de points de vue affectent non seulement les éléments mis en valeur dans la comparaison, mais perdent aussi la trace des programmes dans lequel les différentes procédures ont été élaborées : le projet de Fermat n'est pas restitué tel quel dans le théorème de Mordell-Weil[15]. Les échos ultérieurs d'un résultat ne sont pas inévitables : théorie des entiers complexes généralisés, géométrie arithmétique - qui continuent toutes deux, et avec bien d'autres approches, à être explorées de nos jours. La postérité du travail de Fermat ne trace donc pas une piste unique et n'offre aucune prise sûre aux amateurs de fatalité historique dans le développement mathématique.

BIBLIOGRAPHIE

a) Sources

Euler, L., 1770, *Vollständige Anleitung zur Algebra*, St Petersburg, 1770 ; vol.(1)1 des Opera ; english translation *Elements of Algebra*, 5th edition, Longman, Orme and Cie, London, 1840, reprinted Springer Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, ..., 1985, 593 p; une traduction française avec des *Additions*, due à Lagrange, figure (par exemple) dans les oeuvres complètes de ce dernier, vol. 7.

Fermat, P., O.C., *Oeuvres complètes*, éditées par Paul Tannery et Charles Henry, Tome I 1891: Oeuvres mathématiques diverses et Observations sur Diophante, Tome II 1894: Correspondance, Tome III 1896 : Traductions des pièces latines, Tome IV 1912: Compléments (avec un supplément de C. de Waard, 1922), Gauthier-Villars, Paris.

Frenicle de Bessy, B. , 1676 : *Traité des Triangles Rectangles en Nombres*, Etienne Michallet, Paris ; constitue la première partie de :

1729 *Traité des Triangles Rectangles en Nombres, en deux parties*, in : Mémoires de l'Académie Royale des Sciences, depuis 1666 jusqu'en 1699, Tome V, p 127 à 206, Compagnie des Libraires, Paris.

---

[14] On trouvera ce point de vue superbement expliqué dans les Appendices du chapitre II de [Weil, 1983]; l'article [Robert, 1986] donne une présentation accessible de l'approche des triangles rectangles via ces courbes du 3ème degré ; cf aussi [Goldstein, 1991] pour la mise en relation de ces relectures.

[15] Ces différents projets sont étudiés dans [Goldstein, 1993].

b) Etudes

Edwards, H., 1977, *Fermat's Last Theorem, A Genetic Introduction to Algebraic Number Theory*, GTM 50, Springer Verlag, New York Heidelberg Berlin, 410 p.

Goldstein, C.,1989, "Le métier des nombres aux XVIIᵉ et XIXᵉ siècles", *Eléments d'Histoire des Sciences*, M. Serres éd., Bordas, Paris, 274-295.

Goldstein C., 1991, "*L'aire d'un triangle rectangle n'est pas un carré. Etude comparative de preuves au XVIIème siècle*", prépublication, Orsay (disponible sur demande !).

Goldstein C., 1993, "Descente infinie et analyse diophantienne: programmes de travail et mises en oeuvre chez Fermat, Levi, Mordell et Weil", *Cahiers du Séminaire d'Histoire des Mathématiques*, 2ième série, Vol. 3, 25-49.

Robert, A.,1986, "Quoi de neuf concernant les triangles rectangles ?", in *Sans tambour...ni trompette*, Bulletin de l'IREM de Lyon n°32 (=APMEP n°40), Décembre 1986.

Weil, A., 1983, *Number Theory : An Approach through History*, Birkhäuser, Boston Basel. Stuttgart.

ANNEXE I

Pierre de Fermat: *Observation sur l'aire des Triangles Rectangles* et traduction

Voici le texte[16] :

Area trianguli rectanguli in numeris non potest esse quadratus. Huius theorematis a nobis inventi demonstrationem, quam et ipsi tandem non sine operosa et laboriosa meditatione deteximus, subjungemus. Hoc nempe demonstrandi genus miros in arithmeticis suppeditabit progressus.
Si area trianguli esset quadratus, darentur duo quadratoquadrati quorum differentia esset quadratus, unde sequitur dari duo quadratos quorum et summa et differentia esset quadratus: datur itaque numerus, compositus ex quadrato et duplo quadrati, aequalis quadrato, ea conditione ut quadrati eum componentes faciant quadratum. Sed, si numerus quadratus componitur ex quadrato et duplo alterius quadrati, ejus latus similiter componitur ex quadrato et duplo quadrati, ut facillime possumus demonstrare; unde concludetur latus illud esse summam laterum circa rectum trianguli rectanguli, et unum ex quadratis illud componentibus efficere basem, et duplum quadratum aequari perpendicolo.
Illud itaque triangulum rectangulum conficietur a duobus quadratis quorum summa et differentia erunt quadrati. At isti duo quadrati minores probabuntur primis quadratis primo suppositis, quorum tam summa quam differentia faciunt quadratum: ergo, si dentur duo quadrati quorum summa et differentia faciant quadratum, dabitur in integris summa duorum quadratorum ejusdem naturae, priore minor.
Eodem ratiocinio dabitur et minor ista inventa per viam prioris, et semper in infinitum minores invenientur numeri in integris idem praestantes. Quod impossibile est, quia, dato numero quovis integro, non possunt dari infiniti in integris illo minores.
Demonstrationem integram et fusius explicatam inserere margini vetat ipsius exiguitas.
Hac ratione deprehendimus et demonstratione confirmavimus nullum numerum triangulum praeter unitatem aequari quadratoquadrato.

Nous incluons aussi la traduction française due à Tannery[17] :

L'aire d'un triangle rectangle en nombres ne peut être un carré.
Je vais donner la démonstration de ce théorème que j'ai découvert; je ne l'ai pas trouvée au reste sans une pénible et laborieuse méditation; mais ce genre de démonstration conduira à des progrès merveilleux dans la science des nombres.
Si l'aire d'un triangle était un carré, il y aurait deux bicarrés dont la différence serait un carré; il s'ensuit qu'on aurait également deux carrés dont la somme et la différence seraient des carrés. Par conséquent, on aurait un nombre carré, somme d'un carré et du double d'un carré, avec la condition que la somme des deux carrés qui servent à le composer, soit également un carré. Mais si un nombre carré est somme d'un carré et du double d'un carré, sa racine est également somme d'un carré et du double d'un carré, ce que je puis prouver sans difficulté. On conclura de là que cette racine est la somme des deux côtés de l'angle droit d'un triangle rectangle, dont l'un des carrés composants formera la base, et le double carré la hauteur.
Ce triangle rectangle sera donc formé par deux nombres carrés, dont la somme et la différence seront des carrés. Mais on prouvera que la somme de ces deux carrés est plus petite que celle des deux premiers dont on a également supposé que la somme et la différence soient des carrés. Donc, si on donne deux carrés dont la somme et la différence soient des carrés, on donne par là même, en nombres entiers, deux carrés jouissant de la même propriété et dont la somme est inférieure.
Par le même raisonnement, on aura ensuite une autre somme plus petite que celle déduite de la première, et en continuant indéfiniment on trouvera toujours des nombres entiers de plus en plus petits satisfaisants aux mêmes conditions. Mais cela est impossible, puis-

[16] P. de Fermat , Observatio XLV, [I], p 340 f.
[17] P. de Fermat [III], p 271 ff.

qu'un nombre entier étant donné, il ne peut y avoir une infinité de nombres entiers qui soient plus petits.
La marge est trop étroite pour recevoir la démonstration complète et avec tous ses développements.

ANNEXE II

Bernard Frenicle de Bessy: *Traité des Triangles Rectangles en Nombres* 1676.

Nous reproduisons ici les propositions du *Traité des Triangles rectangles* pertinentes pour notre étude.

Proposition XXXIX[18]: *Il n'y a aucun Triangle Rectangle en Nombres dont l'aire soit un nombre quarré.*

Demonstration: Soit premièrement quelconque triangle primitif, je dis que son aire ne peut être un quarré. Car afin qu'il eût un quarré pour son aire, il faudrait que de ses deux côtés, l'un fût quarré, sçavoir l'impair, car il ne peut être double quarré, et l'autre double quarré. Or (prop.34) dans ce triangle primitif, le côté impair étant quarré, les nombres générateurs du triangle seraient l'hypoténuse et le côté pair d'un deuxième triangle primitif, et parce que le côté pair du premier seroit un double quarré, ces mêmes nombres générateurs du premier seroient quarrés (prop.35). Donc l'hypoténuse et le côté pair de ce deuxième triangle seroient des quarrez, et ce triangle seroit moindre que le premier, puisque deux de ces côtés seroient les générateurs de ce premier. Mais par la précédente (prop.38), la racine de l'hypoténuse de ce deuxième triangle, seroit l'hypoténuse d'un troisième triangle primitif, qui auroit un nombre quarré pour son côté impair, et un double quarré pour son côté pair; et ce troisième triangle seroit encore moindre que le deuxième. Or ce troisième triangle aurait aussi pour son aire un nombre quarré. D'où il s'ensuit que supposant un Triangle rectangle Primitif, dont l'aire soit un nombre quarré, on en trouvera un troisième en nombres entiers par une conséquence infaillible, beaucoup plus petit, qui auroit aussi un quarré pour son aire et que par les mêmes raisons ce troisième en donnerait encore un cinquième plus petit qui serait aussi primitif et par conséquent en nombres entiers, et ainsi à l'infini en diminuant toujours. Mais cette conséquence est absurde car les nombres entiers ne vont pas à l'infini en descendant, puisqu'ils commencent à l'unité et s'y terminent; et par conséquent il est impossible que l'aire d'un Triangle Rectangle primitif soit un nombre quarré. Il a été aussi prouvé par la conséquence de la proposition 31e. Que si l'aire d'un primitif n'est pas un nombre quarré, celle de son multiple ne sera pas aussi un quarré. Donc il n'y a aucun triangle, etc...Ce qu'il falloit prouver.

Voici ce que disent les propositions 34, 35 et 38[19] utilisées dans la démonstration aux endroits où elles sont mentionnées en marge.

Proposition XXXIV: *Si le côté pair et l'hypoténuse d'un triangle primitif font les générateurs d'un autre triangle: il sera primitif et son côté impair sera un quarré. Et si le côté impair d'un triangle primitif est un quarré; l'hypoténuse de ce triangle sera composée de deux quarrés dont l'un aura pour racine l'hypoténuse d'un deuxième triangle primitif, l'autre aura pour racine le côté pair du même deuxième triangle et la racine du quarré, qui est le çôté impair du premier triangle, sera le côté impair du deuxième.*

La demonstration, très simple, que nous n'incluons pas, est accompagnée d'une "démonstration algébrique" et de l'exemple 9, 40, 41.

Proposition XXXV: *Si le côté pair d'un triangle primitif est un double quarré, les nombres générateurs de ce triangle seront des nombres quarrés et l'hypoténuse sera la somme de deux quarrés quarrés.*

---

[18]B. Frenicle de Bessy [1729], p 174.
[19]B. Frenicle de Bessy [1729], p 169 ff.

La proposition est accompagnée de l'exemple de 72 (côté pair du triangle 65,72,97) et d'une "conséquence" qui est en fait une réciproque partielle: *tout nombre composé de deux quarrés quarrés est l'hypoténuse d'un triangle dont le côté pair est un double quarré.*

Proposition XXXVIII: *Si dans un triangle primitif, l'hypoténuse était un nombre quarré, et pareillement le côté pair un nombre quarré: la racine de cette hypoténuse serait l'hypoténuse d'un autre triangle primitif qui aurait un nombre quarré pour son côté impair et un double quarré pour son côté pair.*

Demonstration: Parce que le côté pair d'un triangle primitif est le double produit des nombres générateurs du triangle, si ce double produit est un quarré, le simple produit sera un double quarré qui ne peut être fait que par un quarré et par un double quarré ou par deux nombres qui soient entre eux comme quarré et double quarré: mais parce que le triangle est supposé primitif, le générateur impair fera un quarré et l'autre un double quarré: car l'impair ne peut être double quarré: et parce que les quarrez de ces nombres qui sont premiers entre eux, étant joints ensemble font l'hypoténuse; il s'ensuit que l'hypoténuse seroit la somme d'un quarré quarré (et du quadruple d'un quarré quarré); mais l'hypoténuse étant un quarré par hypothèse, on auroit deux quarrez qui seroient un quarré et les racines de ces trois quarrez seroient des nombres premiers entr'eux, et seroient l'hypoténuse et les côtés d'un autre triangle dont le côté impair seroit un quarré et l'autre un double quarré. Donc si dans un triangle primitif tant l'hypoténuse que le côté pair étoient des quarrez; il en proviendrait un autre triangle primitif moindre, dont le côté impair serait un quarré et le côté pair un double quarré. Ce qu'il falloit prouver.

ANNEXE III

SUR QUELQUES PROBLÈMES

DE

L'ANALYSE DE DIOPHANTE (*).

Nouveaux Mémoires de l'Académie royale des Sciences et Belles-Lettres de Berlin, année 1777.)

1. Parmi le grand nombre de beaux Théorèmes d'Arithmétique que Fermat nous a laissés dans ses *Observations sur Diophante*, un des plus remarquables est celui qui est énoncé dans l'Observation sur la Question XXVI du Livre VI, parce que c'est le seul dont Fermat ait donné la démonstration.

Ce Théorème est que *la différence de deux nombres bi-carrés ne peut jamais être un carré;* et la démonstration de Fermat consiste à faire voir que, s'il y avait deux nombres entiers bi-carrés dont la différence fût un carré, on pourrait toujours trouver deux autres nombres entiers moindres que ceux-là, qui auraient la même propriété, et ainsi de suite; de sorte qu'on parviendrait nécessairement à de petits nombres bi-carrés dont la différence serait un carré; or cela est impossible, comme on peut s'en assurer en examinant successivement les premiers nombres de la suite naturelle. Le Théorème étant ainsi démontré pour les nombres entiers, il est clair qu'il l'est aussi pour les nombres rompus, puisque si la différence des bi-carrés de deux nombres rompus est un carré, et qu'on ré-

(*) Lu le 20 mars 1777.

duise les deux nombres au même dénominateur, il s'ensuit que la différence des bi-carrés des numérateurs sera elle-même un carré.

Le principe de la démonstration de Fermat est un des plus féconds dans toute la Théorie des nombres, et surtout dans celle des nombres entiers. M. Euler a développé davantage ce principe, et l'a appliqué à démontrer quelques autres Théorèmes analogues, savoir : que *la somme de deux bi-carrés ne peut être un carré;* que *ni la somme ni la différence d'un bi-carré et du quadruple d'un autre bi-carré ne peuvent être des carrés;* que *le double de la somme ou de la différence de deux bi-carrés ne saurait jamais être un carré;* qu'enfin *la somme d'un bi-carré et du double d'un autre bi-carré ne peut aussi être un carré.* (*Voyez* le Chapitre XIII de la seconde Partie de ses *Éléments d'Algèbre.*)

2. Mais si la somme d'un bi-carré et du double d'un autre bi-carré ne saurait être un carré, il n'en est pas de même de leur différence; car il est visible qu'on satisfait à l'égalité

$$2x^4 - y^4 = \square$$

en prenant $x = 1$, $y = 1$; et quant à l'égalité

$$x^4 - 2y^4 = \square,$$

il n'y a qu'à prendre $x = 3$, $y = 2$.

On a trouvé aussi pour la première égalité ces autres valeurs

$$x = 13,\ y = 1,\quad \text{et}\quad x = 2165017,\ y = 2372159,$$

et pour la seconde celles-ci

$$x = 113,\ y = 84,\quad \text{et}\quad x = 57123,\ y = 2614;$$

on pourrait en trouver encore plusieurs autres par la méthode connue pour ces sortes d'égalités, suivant laquelle on peut déduire de nouvelles solutions de celles qu'on a déjà, chaque solution en fournissant toujours une autre différente, si le Problème en admet plusieurs (*voyez* le Traité intitulé *Doctrinæ analyticæ inventum novum* dans l'édition de Diophante

de 1670, et les Chapitres VIII, IX et X de la seconde Partie de l'*Algèbre* de M. Euler); mais cette méthode, la seule que l'on ait jusqu'à présent pour les égalités qui passent le second degré, n'est que particulière et ne saurait jamais donner toutes les solutions possibles; on a même remarqué que souvent elle ne donne pas les solutions les plus simples et qui se présentent d'ailleurs d'elles-mêmes. Ainsi, s'il était question de résoudre d'une manière complète les deux égalités ci-dessus, ou du moins de trouver toutes les valeurs possibles de x et y qui ne surpasseraient pas des limites données, la méthode dont il s'agit ne serait presque d'aucune utilité, puisqu'on serait toujours incertain si les valeurs trouvées par cette méthode sont les seules qui satisfassent à la question, et l'on ne pourrait se tirer de ce doute qu'en essayant successivement tous les nombres entiers pour x et y.

3. L'égalité

$$2x^4 - y^4 = \square$$

est surtout remarquable, parce qu'elle renferme la solution d'un Problème proposé par Fermat comme très-difficile, dans la deuxième Observation sur la Question XXIV du Livre VI de Diophante. Ce Problème consiste à trouver un triangle rectangle en nombres dont l'hypoténuse soit un carré et dont la somme des deux côtés autour de l'angle droit en soit un aussi, c'est-à-dire à trouver deux nombres dont la somme soit un carré et dont la somme des carrés soit un bi-carré.

Soient p et q les deux nombres cherchés, en sorte que

$$p + q = y^2,\quad p^2 + q^2 = x^4;$$

ôtant du double de cette dernière équation le carré de la première, on aura

$$p^2 - 2pq + q^2 = 2x^4 - y^4;$$

donc faisant

$$p - q = z,$$

on aura l'équation

$$2x^4 - y^4 = z^2,$$

de la résolution de laquelle dépend donc la solution du Problème proposé; car ayant trouvé les valeurs de x, y, z, on aura sur-le-champ

$$p = \frac{y^2+z}{2}, \quad q = \frac{y^2-z}{2}.$$

Si l'on prend pour x et y les valeurs données ci-dessus, on aura

1° $x = 1$, $y = 1$, d'où $z = 1$, donc $p = 1$, $q = 0$;

2° $x = 13$, $y = 1$, d'où $z = 239$, donc $p = 120$, $q = -119$;

3° $x = 2165017$, $y = 2372159$, d'où $z = 1560590745759$,
donc $p = 1061652293520$, $q = 4565486027761$.

4. De ces trois solutions on voit qu'il n'y a que la dernière qui soit admissible lorsqu'on demande que les nombres cherchés p et q soient entiers et positifs; mais on voit en même temps que ces valeurs de p et q sont extrêmement grandes, et il serait naturel de croire qu'on pourrait satisfaire à la question par des nombres plus petits si Fermat n'assurait pas positivement le contraire dans l'endroit cité ci-dessus; cependant, comme cette assertion n'y est pas démontrée, et qu'elle ne me paraît même pouvoir l'être par la méthode que Fermat indique et qui n'est autre chose que celle dont nous avons parlé plus haut, on peut regarder comme non résolu le Problème de trouver les plus petits nombres entiers positifs qui satisfassent à la double condition que leur somme soit un carré, et que la somme de leurs carrés soit un bi-carré. Mais comment doit-on s'y prendre pour parvenir à une solution complète de ce Problème et des Problèmes analogues? Il me semble qu'on ne saurait atteindre à ce but que par un artifice semblable à celui qui a servi à démontrer les Théorèmes dont nous avons fait mention au commencement de ce Mémoire; car, si l'on peut prouver que, lorsqu'il y a des valeurs quelconques entières de x et y qui satisfont à l'égalité

$$2x^4 - y^4 = \square,$$

il y en a nécessairement deux autres plus petites qui y satisfont aussi, et

qu'en même temps on ait une méthode générale pour déduire ces valeurs-là de celles-ci, il est clair qu'en partant alors des plus petites valeurs possibles de x et y, lesquelles sont $x = 1$ et $y = 1$, on pourra en remontant trouver successivement toutes les autres valeurs satisfaisantes, suivant l'ordre de leur grandeur. Toute la difficulté consiste donc à réduire la solution de l'égalité

$$2x^4 - y^4 = \square$$

à celle d'une autre égalité semblable, mais dans laquelle les nombres x et y soient nécessairement plus petits que dans la première; c'est l'objet de l'analyse suivante, laquelle me paraît la plus simple et la plus directe qu'on puisse employer dans cette recherche.

5. Considérons donc l'équation indéterminée

$$2x^4 - y^4 = z^2,$$

et supposons que l'on connaisse des valeurs entières de x, y, z qui y satisfassent, je remarque d'abord qu'on peut supposer x et y premiers entre eux; car s'ils avaient une commune mesure, il faudrait que z fût divisible par le carré de cette commune mesure, et, la division faite, les quotients satisferaient également à l'équation.

Je remarque de plus que les nombres x, y, z doivent être tous impairs; car si y était pair, il faudrait que z^2 fût divisible par 2, donc z serait pair aussi, donc y^4 et z^2 étant à la fois divisibles par 4, il faudrait que $2x^4$ le fût aussi, donc x^4 serait divisible par 2, donc x serait pair et ne serait pas premier à y contre l'hypothèse. Or, y étant impair, il est visible que z sera aussi nécessairement impair. Enfin, comme on sait que le carré de tout nombre impair est nécessairement de la forme $8m+1$, il s'ensuit que z^2+y^4 sera de la forme $8n+2$, donc $2x^4$ sera de cette même forme et par conséquent x^4 sera de la forme $4n+1$, donc x sera aussi impair.

Cela posé, l'équation

$$2x^4 - y^4 = z^2$$

donne celle-ci

$$4x^4 = 2(z^2+y^4) = (z+y^2)^2 + (z-y^2)^2,$$

d'où

$$(z+y^2)^2=(2x^2)^2-(z-y^2)^2=(2x^2+z-y^2)(2x^2-z+y^2).$$

Ces deux facteurs sont tous les deux pairs, puisque y et z sont impairs; soit donc leur commune mesure $=2m$, en sorte que

$$2x^2+z-y^2=2mp,\quad 2x^2-z+y^2=2mq,$$

p et q étant premiers entre eux; on aura

$$(z+y^2)^2=4m^2pq;$$

donc il faudra que le nombre pq soit un carré, et comme p et q sont premiers entre eux, il faudra que l'un et l'autre soient carrés; mettons donc p^2 et q^2 à la place de p et q, on aura les équations

$$2x^2+z-y^2=2mp^2,\quad 2x^2-y+y^2=2mq^2,\quad (z+y^2)^2=4m^2p^2q^2,$$

d'où

$$z+y^2=2mpq.$$

Cette dernière donne

$$z=2mpq-y^2,$$

et substituant cette valeur de z dans les deux autres, on aura ces deux-ci

$$x^2-y^2=mp(p-q),\quad x^2+y^2=mq(p+q).$$

D'où l'on voit que m divisant la somme et la différence de x^2 et de y^2 doit diviser aussi $2x^2$ et $2y^2$; mais x et y sont premiers entre eux (hypothèse), donc m ne peut être que 1 ou 2. Si $m=1$, on aura

$$x^2-y^2=p(p-q),\quad x^2+y^2=q(p+q);$$

si $m=2$, on aura

$$x^2-y^2=2p(p-q),\quad x^2+y^2=2q(p+q),$$

et si l'on fait dans ce dernier cas

$$p+q=q',\quad q-p=p',$$

on aura

$$x^2-y^2=p'(p'-q'),\quad x^2+y^2=q'(p'+q').$$

Ainsi, soit que m soit 1 ou 2, on aura nécessairement deux équations de cette forme

$$x^2-y^2=p(p-q),\quad x^2+y^2=q(p+q).$$

Je considère d'abord la première de ces équations, et je la mets sous la forme

$$\frac{x+y}{p}=\frac{p-q}{x-y};$$

je remarque maintenant que $x+y$ est un nombre pair, puisque x et y sont impairs à la fois, et que p est nécessairement impair; car, s'il était pair, il faudrait par la seconde équation que q fût pair aussi, afin que $q(p+q)$ devînt un nombre pair; mais alors ce nombre serait pairement pair, et ne pourrait par conséquent être égal à la somme de deux carrés impairs. Donc, si l'on réduit la fraction $\frac{x+y}{p}$ à ses moindres termes, elle sera de la forme $\frac{2m}{n}$, n étant impair et premier à m, donc on aura

$$x+y=2ms,\quad p=ns\quad\text{et}\quad p-q=2mt,\quad x-y=nt,$$

s et t étant deux nombres entiers quelconques; et comme $x-y$ est nécessairement pair, et que n est impair, il faudra que t soit pair; de sorte qu'en mettant $2t$ à la place de t, on aura

$$p-q=4mt,\quad x-y=2nt,$$

t étant quelconque, mais premier à s; autrement x et y ne seraient plus premiers entre eux. On tire de là

$$x=ms+nt,\quad y=ms-nt,\quad p=ns,\quad q=ns-4mt;$$

ce sont les valeurs qui satisfont à la première équation; mais il faut aussi qu'elles satisfassent à la seconde équation

$$x^2+y^2=q(p+q);$$

en les y substituant donc, on aura

$$m^2s^2+n^2t^2=(ns-4mt)(ns-2mt),$$

et développant,

$$m^2(s^2-8t^2)+6mnst+n^2(t^2-s^2)=0,$$

équation qui étant multipliée par s^2-8t^2 peut se mettre sous cette forme

$$[m(s^2-8t^2)+3nst]^2=n^2[9s^2t^2-(t^2-s^2)(s^2-8t^2)],$$

savoir, en divisant par n^2 et développant les termes,

$$s^4+8t^4=\left[3st+\frac{m(s^2-8t^2)}{n}\right]^2.$$

Donc, si l'on fait

$$3st+\frac{m(s^2-8t^2)}{n}=u,$$

ce qui donne

$$\frac{m}{n}=\frac{u-3st}{s^2-8t^2},$$

on aura l'équation

$$s^4+8t^4=u^2.$$

Ainsi la solution de l'équation proposée

$$2x^4-y^4=z^2$$

est réduite à celle de l'équation

$$s^4+8t^4=u^2;$$

et l'on voit par l'analyse précédente que, s'il y a des nombres entiers qui satisfassent à la première équation, il y aura aussi nécessairement des nombres entiers qui satisferont à la seconde; et *vice versâ*, si l'on connaît une solution de cette dernière en nombres entiers, on pourra en déduire une solution de la première par le moyen des formules

$$\frac{m}{n}=\frac{u-3st}{s^2-8t^2},\quad x=ms+nt,\quad y=ms-nt.$$

Comme $\frac{m}{n}$ est supposée une fraction réduite à ses moindres termes, si $u-3st$ et s^2-8t^2 sont premiers entre eux, on aura

$$m=u-3st,\quad n=s^2-8t^2;$$

mais si ces nombres ont un facteur commun, on prendra

$$m=\frac{u-3st}{l},\quad n=\frac{s^2-8t^2}{l}.$$

Et puisqu'on peut prendre indifféremment les nombres s, t, u, ainsi que x, y, z en plus et en moins, il est facile de voir que chaque solution de l'équation

$$s^4+8t^4=u^2$$

en donnera toujours deux de l'équation

$$2x^4-y^4=z^2,$$

en prenant dans l'expression de m le nombre u en plus ou en moins. Je remarque maintenant que n ne peut jamais être zéro, et que m ne peut l'être que lorsque $u=3st$, ce qui donne

$$s^4+8t^4=9s^2t^2,$$

d'où

$$\frac{s}{t}=\sqrt{\frac{9}{2}\pm\sqrt{\frac{81}{4}-8}}=\sqrt{\frac{9}{2}\pm\frac{7}{2}}=1\ \text{ou}\ =\sqrt{8};$$

la valeur $\sqrt{8}$ ne pouvant être admise à cause de son irrationnalité, reste $\frac{s}{t}=1$, et par conséquent

$$s=1,\quad t=1;$$

ces valeurs satisfont en effet à l'équation

$$s^4+8t^4=u^2;$$

mais alors on aurait

$$x=n,\quad y=-n,$$

et comme x et y doivent être premiers entre eux (hypothèse), on aurait $x=1$ et $y=1$. D'où l'on voit que lorsque x et y seront premiers entre eux et différents de l'unité, alors s et t seront aussi premiers entre eux et différents de l'unité, et m ne sera jamais zéro; de sorte que le plus grand des nombres x et y sera nécessairement plus grand que l'un et l'autre des deux nombres s et t; par conséquent, si l'égalité

$$2x^4 - y^4 = \square$$

est résoluble en nombres entiers quelconques différents de l'unité, l'égalité

$$s^4 + 8t^4 = \square$$

sera nécessairement résoluble en moindres nombres, aussi différents de l'unité, et *vice versâ*.

6. Si l'équation

$$s^4 + 8t^4 = u^2,$$

à laquelle nous sommes parvenus, était de la même forme que la proposée, le Problème serait résolu; mais puisque cela n'est pas, il faut donc poursuivre notre analyse en opérant maintenant sur cette dernière équation, dans laquelle s et t sont supposés premiers entre eux.

Et d'abord je vais prouver que s et u doivent être impairs; car si s était pair, s^4 serait divisible par 16; donc u^2 le serait par 8; donc u le serait par 4; donc u^2 serait aussi divisible par 16, et $8t^4$ le serait aussi; donc t^4 serait divisible par 2; donc t serait pair, et par conséquent ne serait pas premier à s contre l'hypothèse. Or s étant impair, il est visible que u doit l'être aussi. Maintenant je mets l'équation dont il s'agit sous la forme

$$8t^4 = u^2 - s^4 = (u + s^2)(u - s^2);$$

comme u et s sont impairs à la fois, les deux facteurs

$$u + s^2 \quad \text{et} \quad u - s^2$$

seront pairs; donc leur commune mesure sera 2μ, en sorte que

$$u + s^2 = 2\mu\varpi, \quad u - s^2 = 2\mu\rho,$$

ϖ et ρ étant premiers entre eux; donc

$$8t^4 = 4\mu^2\varpi\rho \quad \text{et} \quad 2t^4 = \mu^2\varpi\rho;$$

donc il faut que μ divise t^2; mais en chassant u des deux équations précédentes, on a

$$s^2 = \mu(\varpi - \rho),$$

d'où l'on voit que μ divise déjà s^2; donc puisque t et s sont premiers entre eux (hypothèse), il faut que $\mu = 1$. Ainsi l'on aura

$$2t^4 = \varpi\rho;$$

et comme ϖ et ρ sont premiers entre eux, il faudra que l'on ait nécessairement, ou

$$\varpi = 2q^4, \quad \rho = r^4,$$

ou

$$\varpi = q^4, \quad \rho = 2r^4;$$

d'où résulte

$$t = qr.$$

Dans le premier cas on aura donc

$$u = 2q^4 + r^4, \quad s^2 = 2q^4 - r^4,$$

et dans le second on aura

$$u = q^4 + 2r^4, \quad s^2 = q^4 - 2r^4.$$

D'où l'on voit que la résolution de l'équation

$$s^4 + 8t^4 = u^2$$

est réduite à la résolution de l'une ou de l'autre des équations

$$2q^4 - r^4 = s^2 \quad \text{ou} \quad q^4 - 2r^4 = s^2.$$

En effet, si l'on connaît des valeurs entières de q, r, s qui satisfassent à l'une ou l'autre de ces équations, il n'y aura qu'à prendre $t = qr$, et l'on aura des valeurs de s et t qui résoudront l'équation

$$s^4 + 8t^4 = \square.$$

Or je remarque :

1° Que si s et t sont premiers entre eux, s sera aussi premier à q

et à r; donc q et r seront premiers entre eux en vertu des équations

$$2q^4 - r^4 = s^2 \quad \text{ou} \quad q^4 - 2r^4 = s^2;$$

2° Que si q et r sont différents de l'unité, t sera plus grand que q et que r; si q égal à l'unité, alors $t = r$; mais dans ce cas on aura

$$2 - r^4 = s^2 \quad \text{ou} \quad 1 - 2r^4 = s^2;$$

la seconde de ces équations ne saurait avoir lieu en nombres entiers, et la première ne peut subsister qu'en faisant

$$r = 1 \quad \text{et} \quad s = 1;$$

ainsi l'on aurait alors

$$s = 1, \quad t = 1.$$

Si r égal à l'unité, alors

$$t = q, \quad \text{et} \quad s^2 = 2q^4 - 1 \quad \text{ou} \quad = q^4 - 2;$$

d'où l'on voit que s sera plus grand que q. Je conclus de là que tant que s et t, dans l'égalité

$$s^4 + 8t^4 = \square,$$

seront premiers entre eux et différents de l'unité, q et r seront aussi premiers entre eux et différents de l'unité, et que de plus le plus grand des nombres s et t surpassera nécessairement le plus grand des deux q, r.

7. L'équation

$$2q^4 - r^4 = s^2$$

est, comme l'on voit, semblable à la première

$$2x^4 - y^4 = z^2;$$

ainsi le Problème serait résolu, si l'on n'avait trouvé que cette équation; mais, comme on est aussi arrivé à l'équation

$$q^4 - 2r^4 = s^2,$$

qui est différente des deux que nous venons de traiter, il faut encore poursuivre le calcul relativement à cette dernière.

Nous avons déjà vu que q et r doivent être premiers entre eux; or q doit être impair, autrement s serait pair, par conséquent $2r^4$ serait divisible par 4, et r^4 le serait par 2; donc r et q seraient pairs à la fois et par conséquent ne seraient plus premiers entre eux; q étant donc impair, il est visible que s le sera aussi. Donc, si l'on met l'équation sous la forme

$$2r^4 = q^4 - s^2 = (q^2 + s)(q^2 - s),$$

les deux facteurs $q^2 + s$ et $q^2 - s$ seront tous les deux pairs, et par conséquent de la forme $2m\lambda$, $2m\mu$, $2m$ étant leur plus grande commune mesure, et λ, μ étant deux nombres premiers entre eux. On aura ainsi

$$q^2 + s = 2m\lambda, \quad q^2 - s = 2m\mu, \quad 2r^4 = 4m^2\lambda\mu,$$

ou bien

$$r^4 = 2m^2\lambda\mu;$$

donc m divise r^2, mais il divise aussi q^2, parce que

$$q^2 = m(\lambda + \mu);$$

donc puisque q et r sont premiers entre eux, il faudra que $m = 1$. On aura donc

$$r^4 = 2\lambda\mu;$$

donc r sera pair; donc faisant

$$r = 2h,$$

on aura

$$8h^4 = \lambda\mu;$$

donc λ et μ étant premiers entre eux, on aura nécessairement ou

$$\lambda = 8n^4, \quad \mu = p^4, \quad \text{ou} \quad \lambda = n^4, \quad \mu = 8p^4;$$

d'où

$$h = pn, \quad r = 2pn.$$

Ainsi l'on aura

$$s = \lambda - \mu = 8n^4 - p^4 \quad \text{ou} \quad = n^4 - 8p^4,$$

et

$$q^2 = \lambda + \mu = 8n^4 + p^4 \quad \text{ou} \quad = n^4 + 8p^4,$$

où l'on voit que les deux valeurs de s et de q^2 reviennent à la même en changeant n en p et s en $-s$. Donc la résolution de l'équation

$$q^4 - 2r^4 = s^2$$

se réduit à celle de l'équation

$$q^2 = n^4 + 8p^4,$$

en prenant

$$r = 2pn \quad \text{et} \quad s = n^4 - 8p^4.$$

Et l'on remarquera que n et p doivent être premiers entre eux, autrement r et q ne le seraient pas, contre l'hypothèse. De plus il est visible que r sera toujours plus grand que p et que n, et comme q est nécessairement plus grand que r, il s'ensuit que, dans l'égalité

$$n^4 + 8p^4 = \square,$$

les nombres n, p seront nécessairement moindres que les nombres q, r dans l'égalité

$$q^4 - 2r^4 = \square.$$

Or l'égalité

$$n^4 + 8p^4 = \square$$

est de la même forme que celle que nous avons déjà traitée ci-dessus; donc le Problème est résolu.

8. On peut donc, par la méthode et les formules précédentes, résoudre non-seulement les égalités de la forme

$$2x^4 - y^4 = \square,$$

mais aussi celles de ces deux autres formes

$$x^4 + 8y^4 = \square \quad \text{et} \quad x^4 - 2y^4 = \square,$$

et cela avec toute la généralité dont ces égalités sont susceptibles; car en commençant par les solutions les plus simples et passant successivement aux plus composées, on sera assuré de trouver par ordre toutes les solutions possibles de ces égalités en nombres entiers, et par conséquent

aussi en nombres rompus, suivant la remarque faite au commencement de ce Mémoire. Voici donc à quoi se réduit ce calcul :

1° Ayant l'équation

$$\text{(A)} \qquad s^4 + 8t^4 = u^2,$$

on aura l'équation

$$\text{(B)} \qquad x^4 - 2y^4 = z^2,$$

en prenant

$$x = u, \quad y = 2st,$$

et l'équation

$$\text{(C)} \qquad 2x^4 - y^4 = z^2,$$

en prenant

$$m = \frac{\pm u - 3st}{l}, \quad n = \frac{s^2 - 8t^2}{l}, \quad \pm x = ms + nt, \quad \pm y = ms - nt,$$

l étant le plus grand commun diviseur.

2° Ayant l'une ou l'autre des équations (B), (C), on aura l'équation (A) en prenant

$$s = z, \quad t = xy.$$

9. L'équation (A) donne évidemment d'abord

$$s = 1, \quad t = 1, \quad u = 3;$$

donc on aura pour l'équation (B)

$$x = 3, \quad y = 2, \quad \text{et de là} \quad z = 7;$$

et pour l'équation (C)

$$m = \frac{\pm 3 - 3}{l}, \quad n = -\frac{7}{l}, \quad \pm x = m + n, \quad \pm y = m - n;$$

donc

$$m = 0, \quad n = -1, \quad l = 7 \quad \text{et} \quad x = 1, \quad y = 1, \quad z = 1,$$

ou bien

$$m = -6, \quad n = -7, \quad l = 1 \quad \text{et} \quad x = 13, \quad y = 1, \quad z = 239.$$

Ces valeurs de x, y, z en donneront d'autres de s, t, u pour l'équation (A). Et d'abord

$$x=1, \quad y=1, \quad z=1$$

donnera

$$s=1, \quad t=1, \quad u=3;$$

ensuite

$$x=3, \quad y=2, \quad z=7$$

donnera

$$s=7, \quad t=6, \quad u=113;$$

enfin

$$x=13, \quad y=1, \quad z=239$$

donnera

$$s=239, \quad t=13, \quad u=57\,123.$$

La première de ces trois solutions de l'équation (A) est la même que nous avons adoptée d'abord, et nous pouvons maintenant en faire abstraction; les deux autres donneront donc de nouvelles solutions des équations (B) et (C). Prenant donc en premier lieu

$$s=7, \quad t=6, \quad u=113,$$

on aura pour l'équation (B)

$$x=113, \quad y=84, \quad z=7967;$$

ensuite pour l'équation (C)

$$m=\frac{\pm 113-126}{l}, \quad n=-\frac{239}{l}, \quad \pm x=7m+6n, \quad \pm y=7m-6n;$$

donc : ou

$$m=-13, \quad n=-239, \quad l=1, \quad x=1525, \quad y=1343, \quad z=2\,750\,257;$$

ou

$$m=-1, \quad n=-1, \quad l=239, \quad x=13, \quad y=1;$$

cette dernière solution a déjà été trouvée ci-dessus. Prenant en second lieu

$$s=239, \quad t=13, \quad u=57\,123,$$

on aura pour l'équation (B)

$$x=57\,123, \quad y=6214, \quad z=3\,262\,580\,153;$$

et pour l'équation (C) on aura

$$m=\frac{\pm 57\,123-9321}{l}, \quad n=\frac{55\,769}{l}, \quad \pm x=239m+13n, \quad \pm y=239m-13n;$$

donc : ou

$$m=6, \quad n=7, \quad l=7967,$$

et de là

$$x=1525, \quad y=1343, \quad z=2\,750\,257,$$

c'est la solution trouvée ci-devant; ou

$$m=-9492, \quad n=7967, \quad l=7;$$

donc

$$x=2\,165\,017, \quad y=2\,372\,159, \quad \text{et de là} \quad z=1\,560\,590\,745\,759.$$

Et ainsi de suite.

10. On voit par ce calcul, qu'il serait aisé de pousser plus loin s'il en valait la peine, que les valeurs qui satisfont à l'équation

$$s^4+8t^4=u^2$$

sont par ordre

$$\begin{array}{llll} s=1, & 7, & 239, \ldots, \\ t=1, & 6, & 13, \ldots, \\ u=3, & 113, & 57\,123, \ldots; \end{array}$$

que les valeurs qui satisfont à l'équation

$$x^4-2y^4=z^2$$

sont

$$\begin{array}{llll} x=3, & 113, & 57\,123, \ldots, \\ y=2, & 84, & 6214, \ldots, \\ z=7, & 7967, & 3\,262\,580\,153, \ldots; \end{array}$$

qu'enfin les valeurs qui satisfont à l'équation

$$2x^4 - y^4 = z^2$$

sont

$$\begin{array}{llll} x=1, & 13, & 1525, & 2165017,\ldots, \\ y=1, & 1, & 1343, & 2372159,\ldots, \\ z=1, & 239, & 2750257, & 1560590745759,\ldots, \end{array}$$

et l'on peut être assuré qu'il n'y a pas de nombres moindres que ceux-ci qui puissent satisfaire aux formules proposées.

Si maintenant on déduit des dernières valeurs de x, y, z celles de p et q (3), on aura par ordre tous les nombres qui peuvent résoudre le Problème de Fermat, savoir

$$\begin{array}{llll} p=1, & 120, & 2276953, & 1061652293520,\ldots, \\ q=0, & -119, & -473304, & 4565486027761,\ldots. \end{array}$$

Ces derniers nombres, quelque grands qu'ils soient, sont donc néanmoins les plus petits nombres entiers et positifs qui résolvent le Problème dont il s'agit, ce qui prouve la vérité de l'assertion de Fermat.

11. En général, on peut faire dépendre la résolution de toute équation de la forme

$$x^4 + ay^4 = z^2$$

(a étant un nombre quelconque donné) de celle d'une équation de la même forme dans laquelle les nombres x, y, z soient moindres.

Pour cela il n'y a qu'à supposer

$$z = m^2 + an^2,$$

ce qui donne

$$z^2 = (m^2 - an^2)^2 + a(2mn)^2;$$

donc

$$x^2 = m^2 - an^2 \quad \text{et} \quad y^2 = 2mn.$$

Soit de nouveau

$$x = p^2 - aq^2,$$

d'où

$$x^2 = (p^2 + aq^2)^2 - a(2pq)^2;$$

donc

$$m = p^2 + aq^2, \quad n = 2pq;$$

et, substituant dans l'équation $y^2 = 2mn$, on aura

$$y^2 = 4pq(p^2 + aq^2).$$

Qu'on fasse donc, pour satisfaire à cette équation,

$$p = s^2, \quad q = t^2, \quad p^2 + aq^2 = u^2,$$

on aura

$$y = 2stu,$$

et il viendra l'équation

$$s^4 + at^4 = u^2,$$

qui est semblable à la proposée. Cette dernière équation étant résolue si elle peut l'être, on aura dans la proposée

$$x = s^4 - at^4, \quad y = 2stu, \quad z = (s^4 + at^4)^2 + a(2s^2t^2)^2,$$

savoir

$$z = u^4 + 4as^4t^4;$$

d'où l'on voit que y sera toujours nécessairement plus grand que chacun des nombres s, t, u.

Connaissant donc une solution en entiers de toute équation de la forme

$$x^4 + ay^4 = z^2,$$

on pourra par ces formules en déduire une nouvelle solution en nombres plus grands, et ainsi de suite; mais on n'est pas assuré de trouver par ce moyen toutes les solutions possibles en nombres entiers; car les suppositions que nous avons faites pour ramener l'équation

$$x^4 + ay^4 = z^2$$

à l'équation

$$s^4 + at^4 = u^2$$

sont simplement possibles, mais ne sont pas absolument nécessaires.

Au reste la méthode la plus simple et la plus générale pour résoudre ces sortes d'égalités est peut-être celle des facteurs, que j'ai exposée dans le dernier Chapitre des *Additions à l'Algèbre* de M. Euler, à laquelle je renvoie (*).

12. Je vais terminer ce Mémoire par montrer comment on peut simplifier et généraliser à quelques égards la méthode ordinaire pour les égalités qui passent le second degré, suivant laquelle, en connaissant une solution, on en peut trouver plusieurs autres.

Soit proposée l'équation générale du troisième degré entre deux indéterminées x, y

$$a+bx+cy+dx^2+exy+fy^2+gx^3+hx^2y+kxy^2+ly^3=0,$$

à laquelle satisfassent déjà ces valeurs

$$x=p, \quad y=q,$$

en sorte que l'on ait

$$a+bp+cq+dp^2+epq+fq^2+gp^3+hp^2q+kpq^2+lq^3=0;$$

je fais

$$x=p+t, \quad y=q+u,$$

et, substituant dans la proposée, elle se transformera en celle-ci

$$Bt+Cu+Dt^2+Etu+Fu^2+Gt^3+Ht^2u+Ktu^2+Lu^3=0,$$

dans laquelle les coefficients B, C,... sont des fonctions rationnelles de p et q, qu'on déterminera aisément par le développement des termes de la proposée; mais on peut les trouver encore plus facilement en employant la méthode différentielle; car, si l'on suppose

$$a+bp+cq+dp^2+epq+fq^2+gp^3+hp^2q+kpq^2+lq^3=A,$$

on aura

$$B=\frac{dA}{dp}, \quad C=\frac{dA}{dq}, \quad D=\frac{1}{2}\frac{d^2A}{dp^2}, \quad E=\frac{d^2A}{dp\,dq}, \quad F=\frac{1}{2}\frac{d^2A}{dq^2},$$
$$G=\frac{1}{2.3}\frac{d^3A}{dp^3}, \quad H=\frac{1}{2}\frac{d^3A}{dp^2dq}, \quad K=\frac{1}{2}\frac{d^3A}{dp\,dq^2}, \quad L=\frac{1}{2.3}\frac{d^3A}{dq^3}.$$

(*) Les *Additions à l'Algèbre* d'Euler appartiennent à la Section V des *OEuvres de Lagrange*. (*Note de l'Éditeur.*)

Maintenant, pour pouvoir déterminer u et t d'une manière rationnelle, j'égale d'abord à zéro, dans l'équation en t et u, les deux premiers termes où t et u sont linéaires; j'ai ainsi

$$Bt+Cu=0, \quad \text{d'où} \quad u=-\frac{Bt}{C};$$

de cette manière il reste l'équation

$$Dt^2+Etu+Fu^2+Gt^3+Ht^2u+Ktu^2+Lu^3=0;$$

substituant donc à la place de u sa valeur, toute l'équation deviendra divisible par t^2, et l'on aura, après la division,

$$D-\frac{BE}{C}+\frac{B^2F}{C^2}+\left(G-\frac{BH}{C}+\frac{B^2K}{C^2}-\frac{B^3L}{C^3}\right)t=0,$$

d'où l'on tire

$$t=\frac{-C^3D+BC^2E-B^2CF}{C^3G-BC^2H+B^2CK-B^3L};$$

donc

$$u=\frac{BC^2D-B^2CE+B^3F}{C^3G-BC^2H+B^2CK-B^3L}.$$

On aura donc deux nouvelles valeurs satisfaisantes de x et y, et prenant ces dernières à la place de p et q, on pourra en déduire de nouvelles, et ainsi de suite.

13. Si l'équation indéterminée était du quatrième degré, il ne serait pas possible de la résoudre généralement par la méthode précédente; mais on pourrait en venir à bout, si elle ne contenait que les deux premières puissances de l'une des deux inconnues, et que de plus, en regardant cette inconnue comme de deux dimensions, il n'y eût dans l'équation aucun terme de plus de quatre dimensions.

En effet, soit l'équation

$$0=a+bx+cy+dx^2+exy+fy^2+gx^3+hx^2y+kx^4$$

qui a les conditions requises, et supposons que les valeurs

$$x=p, \quad y=q$$

y satisfassent; substituant $p+t$ à la place de x, et $q+u$ à la place de y, on aura une équation de la forme

$$Bt + Cu + Dt^2 + Etu + Fu^2 + Gt^3 + Ht^2u + Kt^4 = o;$$

je fais

$$u = tz,$$

et divisant toute l'équation par t, elle deviendra

$$B + Cz + Dt + Etz + Ftz^2 + Gt^2 + Ht^2z + Kt^3 = o,$$

qui n'est plus, comme l'on voit, que du troisième degré entre z et t; ainsi l'on pourra lui appliquer la méthode précédente, pourvu qu'on connaisse une valeur de z et de t; or ces valeurs se présentent d'elles-mêmes, car il n'y a qu'à faire

$$t = o, \quad B + Cz = o, \quad \text{d'où} \quad z = -\frac{B}{C};$$

donc, ...; mais en voilà assez sur ce sujet.

INFINI POTENTIEL - INFINI ACTUEL. ARISTOTE - *PHYSIQUE* [1]

Jacqueline GUICHARD

IREM de POITIERS

I. INTRODUCTION

I.1. Un concept négatif

C'est un lieu commun d'introduire une réflexion sur l'infini en attirant l'attention sur ce que, dans sa construction-même, le mot *infini* véhicule, et remonter du mot latin *infinitum* à son homologue grec *apeiron* pour rappeler le sens négatif des deux préfixes privatifs in- et a-.

Infinitum ou **apeiron**, c'est le sans borne, sans frontière, sans terme...

Conception négative du "**sans limite**" qui domine la pensée grecque antique et qui fait de l'indéterminé, de l'inachevé, les caractéristiques de ce qui est dit infini, le rejetant ainsi du côté de l'***imperfection*** : ce qui n'est pas délimité est imparfait parce qu'inachevé ; il n'a pas atteint sa pleine détermination qui est l'actualisation de ses potentialités dans sa forme achevée. Il est ouvert sur le manque.

L'infini, par définition, ou plutôt par construction, ne peut avoir la plénitude et l'actualité de l'être pour une pensée qui privilégie la limite, et pour laquelle la détermination, loin d'être conçue comme négation de tout ce qu'elle exclut[2], est ce qui fait du fini un défini et de la finitude, ou plutôt de la finité, une finition.

C'est ce qui fait dire à ARISTOTE que l'infini ne peut être substance, mais seulement attribut, qu'il n'existe pas d'infini en acte ou actuel, mais seulement en puissance ou infini potentiel.[3]

L'infini est le signe du manque, de ce qui manque pour être véritablement. Cette conception négative qui refuse à l'infini le statut de substance ou d'être véritable, autorise-t-elle à attribuer aux Anciens Grecs une traditionnelle horreur de l'infini ? **"Horror infiniti"**, que l'époque contemporaine apprécie diversement.[4]

1 ARISTOTE. *Physique*, Trad. H. Carteron, 2 tomes. Les Belles Lettres 1966. Les textes qui ont servi de base à ce travail sont extraits des livres : III, 4 à 8 ; VI, 1-2-8-9-10 ; VIII, 8. Cf. Annexe 3.

2 A la différence de la métaphysique issue de la méditation chrétienne sur Dieu, qui verra dans l'infini la positivité de l'Etre et dans la délimitation la négation. "*Toute détermination est négation*". SPINOZA. *Lettre à Jarig Jelles*. La Haye 1674. In *Œuvres complètes*. Bibliothèque de La Pléiade. NRF-Gallimard 1967, pp.1230-1231.

3 Dans l'annexe : AUTOUR DE L'INFINI - QUELQUES CONCEPTS, on trouvera un développement de ces concepts, ainsi que leurs équivalents grecs.

4 Pour illustrer cette diversité, on peut prendre deux points de vue divergents dans : - SIERPINSKA, A. *Obstacles épistémologiques relatifs à la notion de limite*. In *Recherches en Didactique des Mathématiques*. La Pensée Sauvage Editions. Vol. 6 n°1, pp. 5-67. 1985 : "L'horreur de l'infini chez les Anciens Grecs s'exprimait même dans le mot choisi pour désigner l'infini, apeiron qui avait un sens péjoratif : le chaos était apeiron, une ligne était apeiron, un mouchoir chiffonné était apeiron." - ITARD, J. *Les méthodes infinitésimales chez Euclide et Archimède*. 1950. In *Essais d'Histoire des Mathématiques*. Ed. Blanchard 1984, pp. 139-142 : "Les historiens des mathématiques aiment à répéter que les Grecs avaient vis-à-vis de l'Infini en mathématique une attitude peureuse et timide. L'examen attentif de l'œuvre d'Euclide et de celle d'Archimède m'ont amené à une opinion diamétralement opposée. /.../ la théorie des proportions d'une part, la méthode d'exhaustion d'autre part, sont les prototypes de nos théories modernes du continu et de l'intégrale de Riemann."