

AUX CONFINS DE L'ANALYSE ET DE LA GEOMETRIE: un obstacle épistémologique dont les origines sont également didactiques et culturelles.

Maggy SCHNEIDER

Université Catholique de Louvain
Facultés Universitaires
Notre-Dame de la Paix
Namur

Dans les sections 1, 2, 3 et 5 de cet article, nous décrivons un obstacle soulevé par des découpages infinis de surfaces et de solides chez les élèves des deux dernières années du cycle secondaire (15-18 ans) : l'obstacle de l'hétérogénéité des dimensions. Nous y discutons également du caractère épistémologique de cet obstacle. Cette première partie est constituée d'extraits d'un article paru dans la revue *Recherches en didactique des mathématiques* (M. Schneider, 1991).

Les autres sections du présent article sont le fruit d'un entretien avec R. Bkouche. La question d'éventuelles origines didactiques et culturelles d'un obstacle épistémologique y est soulevée. Cette analyse fait apparaître un choix didactique incontournable : celui des obstacles épistémologiques qu'on fera rencontrer aux élèves.

1. L'obstacle de l'hétérogénéité des dimensions.

In M. Schneider (1988), sont explorés les "aires" et "volumes" en tant qu'objets mentaux (au sens de H. Freudenthal, 1983), chez des élèves des deux dernières années du cycle secondaire. Plusieurs facettes de ces objets mentaux sont en rupture par rapport à la théorie du calcul intégral et sont donc des obstacles, au sens d'obstacle épistémologique, à l'apprentissage de cette discipline. Un de ces obstacles, l'**obstacle de l'hétérogénéité des dimensions**, est décrit ci-après, par le biais de quelques exemples.

1.1. Des lignes vestiges de surfaces.

Voici deux réactions recueillies lors de notre expérimentation :

1) Interrogés sur le théorème fondamental du calcul intégral, dont ils devaient mémoriser la démonstration, certains élèves proposent $f(x)$ comme limite de la différence $S(x+h) - S(x)$, où $S(x) = \int_a^x f$, lorsque h tend vers 0 (Fig. 1). L'un d'eux commente sa réponse en ces termes : "Au fur et à mesure que h diminue, la lamelle [hachurée sur la Fig. 1] se rétrécit jusqu'à se réduire en un segment de longueur $f(x)$ ". Un autre s'étonne que $\int_a^a f$ ne soit pas égal à $f(a)$.

2) Interrogés à brûle-pourpoint, certains élèves s'attendent à ce que les segments AB et CB de la Fig. 2 aient des longueurs dans le rapport 2, car, disent-ils, c'est ce qu'il reste de deux surfaces dont les aires sont dans le même rapport : la surface délimitée par le graphe de la fonction, l'axe ox et les droites $x = a$ et $x = b$ et celle délimitée par le même graphe, l'axe oy et les droites $y = a^2$ et $y = b^2$.

Ces trois erreurs témoignent d'une interférence induite de la perception des grandeurs dans le domaine des mesures. En effet, soit la surface située sous le graphe d'une fonction f , entre les abscisses x et $x+h$. Au fur et à mesure que nous considérons des

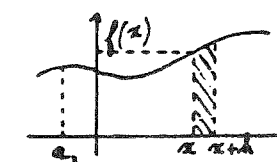


Fig. 1

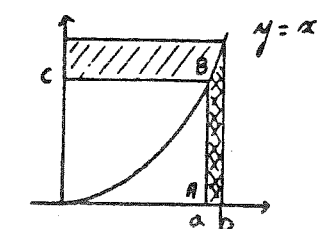


Fig. 2

valeurs de h de plus en plus proches de 0, nous voyons cette lamelle s'affiner de plus en plus (Fig. 3). Lors de cette évolution, un seul des côtés de la lamelle reste inchangé et constamment sous nos yeux: c'est le côté de longueur $f(x)$ ($f > 0$). Le côté de longueur $f(x+h)$ se rapproche du premier jusqu'à se confondre avec lui. Quant aux autres frontières de la lamelle, elles s'amenuisent petit à petit jusqu'à se réduire chacune à un point.

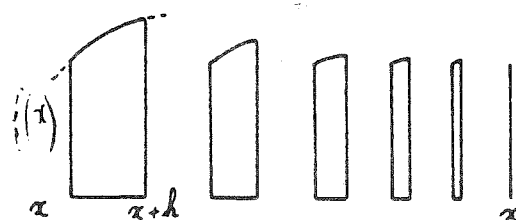


Fig.3

A ce moment, on ne verra plus de la lamelle initiale que le seul segment de longueur $f(x)$. Ainsi, d'un point de vue "strictement visuel", la surface en question se réduit à un segment qui constitue son seul vestige. L'élève n'hésite pas alors à traduire cette perception en termes de mesures: puisque le segment est le résidu ultime de la surface, sa mesure sera la mesure du résidu de cette dernière. Or, qu'est-ce que la mesure d'un segment sinon sa longueur et la mesure d'une surface sinon son aire? Quant au mot "limite", on sait, depuis les travaux de B. Cornu (1983), d'A. Sierpiska (1985a) et de C. Hauchart et N. Rouche (1987), qu'il est chargé de connotations multiples dans le langage courant et que l'une de ses significations est: "ce qui reste à la fin". Et c'est sans doute dans cette optique que l'élève écrit $\lim_{h \rightarrow 0} (S(x+h) - S(x)) = f(x)$ et suppose $\int_a^a f = f(a)$. Les propos par lesquels il commente ces résultats ne sont-ils pas révélateurs de cette influence de la perception sur le calcul des mesures, puisque l'élève ne fait que traduire littéralement ce qu'il voit (ou plutôt qu'il imagine) pour justifier le résultat de la limite? Quant à un contradicteur qui s'étonne que la limite de l'expression $S(x+h) - S(x)$ ne vaut pas 0, il est perplexe, attiré qu'il demeure, malgré la contradiction, par le premier résultat. De même, d'autres élèves assimilent à un anneau circulaire le taux d'accroissement de l'aire d'un disque par rapport à son rayon et ne savent trop si ce taux tend vers 0 (comme l'aire de l'anneau) ou $2\pi R$ (comme la longueur du cercle, vestige de l'anneau). Pour eux aussi, ce dont on prend la limite n'est pas un rapport de deux mesures, mais bien curieusement une surface.

L'erreur commise dans la situation évoquée par la Fig.2 s'explique, elle aussi, par une traduction abusive d'une "perception visuelle" en termes de mesures: les élèves "voient" (imaginent) les surfaces se réduire en segments et cela les pousse à attribuer aux longueurs de ces derniers une propriété vérifiée par les aires des premières.

1.2. L'obstacle de l'hétérogénéité des dimensions: un schéma d'interprétation de multiples réactions ou erreurs.

Nous dirons que nous sommes en présence d'une manifestation de l'obstacle de l'hétérogénéité des dimensions, lorsque sont remplies les deux conditions suivantes:

- 1) une certaine perception des grandeurs s'immisce dans les calculs d'aires ou de volumes de manière inconsciente et induite; elle y provoque une erreur la plupart du temps;
- 2) des grandeurs de dimensions distinctes sont mêlées au sein de cette perception (solides avec surfaces ou surfaces avec lignes).

Tel qu'il est défini, cet obstacle permet de rendre compte de multiples réactions ou erreurs émanant des élèves interrogés. Ainsi, plusieurs d'entre eux concluent abusivement que deux grandeurs sont entre elles comme leurs indivisibles respectifs, car elles sont partitionnées par ces derniers (empruntant à B. Cavalieri un terme auquel nous donnons une acception plus large, nous appelons ici *indivisibles* les lignes en lesquels on partitionne une surface ou les surfaces en lesquelles on décompose un solide). Comme

décrit à la section 1.1., certains élèves prennent la longueur d'un segment comme limite de l'aire d'une surface dont ce segment est le "vestige visuel"; ou bien prêtent aux longueurs de segments une propriété vérifiée par les aires de surfaces dont ils sont les résidus. Tantôt encore, des élèves formulent une intégrale définie en se basant sur la partition d'un solide en surfaces. A d'autres moments, c'est la mesure d'un segment ou d'un arc de courbe qui tient lieu, pour eux, de "nombre d'indivisibles", ou l'engendrement d'un solide par le mouvement d'une surface qui est traduit naïvement en termes de mesures...

2. L'obstacle de l'hétérogénéité des dimensions interfère avec "l'obstacle géométrique de la limite".

L'obstacle de l'hétérogénéité des dimensions permet également d'interpréter les réactions de certains d'élèves à propos du passage à la limite dans le contexte des calculs d'aires et de tangentes. Il rejoint alors ce que A. Sierpiska (1985a) appelle la **conception géométrique de la notion de limite**: "Cet obstacle peut se manifester par: [...] Une idée géométrique de la différence entre une grandeur variable et une grandeur constante qui est sa limite. Justement: "Grandeur" et non "nombre". Conception du cercle comme limite des polygones inscrits ou circonscrits serait un des symptômes de cet obstacle: plus le nombre de côtés est grand, plus la forme du polygone devient proche de la forme du cercle. Aussi, une idée de tangente comme limite de sécante variable où on se dit qu'à un certain moment la position de la sécante diffère aussi peu que l'on veut de la position de la tangente. C'est bien la conception de différence avec laquelle on a affaire dans la méthode d'exhaustion. Le terme "différence" changeait de sens avec le changement de la grandeur en question et ceci peut être une des raisons pour lesquelles on avait tant de mal à transformer cette méthode en un théorème général". (Bien que les grandeurs aient été constituées comme théorie unifiée depuis Eudoxe).

Dans Schneider (1988), nous avons précisé et analysé comment cette conception géométrique de la limite se manifeste chez les élèves. Nous reprenons ici un aspect de cette analyse.

La question de savoir si l'aire sous $y = x^3$ entre 0 et 1 vaut $1/4$ exactement ou approximativement est matière à débat au sein de toutes les classes observées. S'il y a débat, c'est que les élèves tirent séparément des conséquences différentes des mêmes faits (par exemple, que cette aire puisse être encadrée par les expressions $(1 - 2/n + 1/n^2)/4$ et $(1 + 2/n + 1/n^2)/4$ obtenues en sommant les aires des n rectangles représentés respectivement sur les Fig. 4 et 5 et dont la limite commune est $1/4$) et ne peuvent trancher lors de la confrontation. Ces débats débouchent tous sur la formulation d'une alternative dont les termes sont, grosso modo, les suivants: tant que les rectangles (dont la somme des aires approxime par défaut l'aire cherchée) ont une certaine épaisseur, ils ne remplissent pas tout à fait la surface considérée, il reste des petits "triangles" à combler; et lorsqu'ils se réduisent à des segments, ils ont une aire nulle et on voit mal dans ce cas comment leur "somme" conduit au résultat. Ce débat est loin d'être réglé par les élèves qui ont déjà reçu un enseignement du calcul intégral. C'est aussi un débat qui a suscité, dans l'histoire des mathématiques, des controverses interminables.

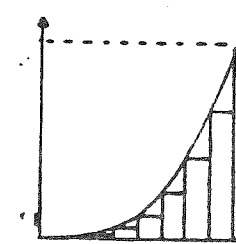


Fig. 4

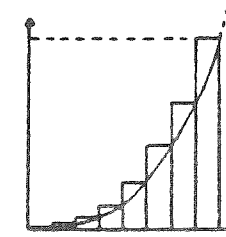


Fig. 5

Qu'une telle alternative surgisse à propos de ce calcul pourrait bien relever de l'obstacle de l'hétérogénéité des dimensions. En effet, on oppose explicitement dans cette alternative le fait que les rectangles aient une certaine épaisseur au fait qu'ils soient réduits à des segments. D'un point de vue strictement ensembliste, cette alternative a un sens : ou bien on partitionne la surface en véritables rectangles et "triangles" résiduels, ou bien on la partitionne en segments indivisibles. Cependant, l'alternative ne peut fonctionner dans le seul contexte numérique. Pour obtenir l'aire sous $y = x^3$ entre les bornes 0 et 1, on doit calculer la limite d'une suite de nombres, chacun d'eux représentant une somme d'aires de rectangles inscrits. Mais la limite elle-même (égale à $1/4$) est, dans ce cas, extérieure à la suite, en ce sens qu'elle n'est pas un de ses termes. Il n'y a donc pas lieu de l'interpréter en se référant aux rectangles. Elle donne l'aire sous la courbe et non pas une somme d'aires de rectangles, ceux-ci fussent-ils devenus des segments. En fait, on ne peut formuler l'alternative sans quitter le domaine des mesures et faire une incursion dans celui de la perception des grandeurs. Tout se passe en effet comme si les élèves effectuaient le "passage à la limite" au niveau de la "perception visuelle" (du moins, au niveau d'une imagerie mentale) des grandeurs où les rectangles se rétrécissent jusqu'à devenir des segments, au lieu de prendre la limite, au sens numérique, de la suite susdite. Ils reviennent ensuite dans le domaine des mesures où ils tentent d'interpréter $1/4$ comme la somme des mesures des segments-résidus. La plupart des élèves envisagent alors les aires de ceux-ci, soit qu'ils se disent simplement que c'est en additionnant des aires qu'on pourra obtenir une aire, soit qu'ils pressentent qu'on ne peut sommer les longueurs de ces segments en nombre infini sans obtenir un résultat infini. Mais que donne une somme de zéros - fussent-ils très nombreux - sinon zéro? Et cette impasse est à ce point insoutenable que quelques élèves iront jusqu'à proposer de prendre, malgré tout, les longueurs de ces segments, en se réfugiant, eux aussi, derrière des considérations ensemblistes : les segments "remplissent" tout-à-fait la surface considérée. L'imagination est donc enfermée dans un cul-de-sac pour avoir dévié indûment des nombres aux grandeurs dans un contexte où se mêlent des grandeurs hétérogènes et c'est bien ce qui caractérise l'obstacle de l'hétérogénéité des dimensions.

3. L'obstacle de l'hétérogénéité de la limite est-il un obstacle épistémologique?

Le concept d'*obstacle épistémologique* a été introduit par G. Bachelard (rééd. 1980) dans le contexte des sciences expérimentales. Une citation de cet auteur, très connue, précise le sens qu'il lui donne : "[...] *c'est en termes d'obstacles qu'il faut poser le problème de la connaissance scientifique. Et il ne s'agit pas de considérer des obstacles externes, comme la complexité et la fugacité des phénomènes, ni d'incriminer la faiblesse des sens et de l'esprit humain : c'est dans l'acte même de connaître, intimement, qu'apparaissent, par une sorte de nécessité fonctionnelle, des lenteurs et des troubles. C'est là que nous montrerons des causes de stagnation et même de régression, c'est là que nous décèlerons des causes d'inertie que nous appellerons des obstacles épistémologiques*".

La transposition du concept d'obstacle épistémologique à la didactique des mathématiques fait l'objet d'un débat car elle soulève des difficultés décrites entre autres par G. Brousseau (1983), A. Sierpiska (1985b) et M. Artigue (1991). On peut discuter à perte de vue sur le concept d'obstacle épistémologique au sein de la didactique des mathématiques. Il nous paraît plus opportun, encore aujourd'hui, de discuter de ce concept à propos d'exemples précis estimant, à l'instar de G. Brousseau (1983), que : "*La notion d'obstacle elle-même est en train de se constituer et de se diversifier : il n'est pas facile de dire des généralités pertinentes sur ce sujet, il vaut mieux faire des études cas par cas*". Dans cette section, nous mettons le concept d'obstacle épistémologique à l'épreuve, en considérant l'exemple de l'obstacle de l'hétérogénéité des dimensions. Pour cela, nous analysons cet exemple principalement à la lumière de certaines des caractéristiques au moyen desquelles G. Brousseau (1983) et A. Sierpiska (1985) spécifient cette notion d'obstacle. Cette analyse nous amènera à discuter ou à affiner l'une ou l'autre de ces caractéristiques.

1) "*L'obstacle est constitué comme une connaissance, avec des objets, des relations, des méthodes d'appréhension, des prévisions, avec des évidences, des conséquences oubliées, des ramifications imprévues ... Il va résister au rejet, il tentera comme il se doit de s'adapter localement, de se modifier aux moindres frais, de s'optimiser sur un champ réduit, suivant un processus d'accommodation bien connu*" (G. Brousseau, 1983).

L'obstacle de l'hétérogénéité des dimensions constitue effectivement une connaissance des aires et des volumes basée sur des intuitions implicites telles que :

- à une réunion d'indivisibles disjoints, correspond toujours une somme de mesures;
- un indivisible qui se déplace engendre autant un volume qu'un solide.

Cette connaissance fonctionne jusqu'à un certain point : elle conduit à des conséquences correctes du point de vue des théories actuelles (ainsi, les principes de Cavalieri permettent de comparer avec justesse deux aires ou deux volumes). Mais elle est en porte-à-faux vis-à-vis de ces théories, lorsqu'elle débouche, si l'on n'y prend garde, sur des incompréhensions ou des erreurs telles celles décrites in Schneider (1988).

Cette connaissance s'adapte localement. Par exemple, "l'espacement des indivisibles", évoqué par les élèves, fournit un mode d'explication intuitif des paradoxes auxquels conduit un usage abusif des indivisibles, en même temps qu'un garde-fou contre celui-ci. De même, on peut supposer que le théorème de Guldin (selon lequel le volume d'un solide de révolution vaut l'aire de la surface qui l'engendre multipliée par la longueur du cercle décrit par son centre de gravité) trouve son origine dans la deuxième des intuitions décrites supra; il constitue même un aménagement de celle-ci, qui donne des résultats probants dans une catégorie bien particulière de volumes.

2) "*La notion d'obstacle épistémologique est une notion relative : quelque chose est obstacle toujours par rapport à une certaine norme [...] L'obstacle est un appui pour le développement d'une théorie à une certaine époque*" (A. Sierpiska, 1985b).

Pour des raisons que nous venons d'expliquer, l'obstacle de l'hétérogénéité des dimensions est un obstacle pour l'actuelle théorie de l'intégration. Cependant, il n'est pas un obstacle, mais au contraire un marche-pied pour une théorie des aires et des volumes "à la Cavalieri" telle que l'a développée T. Apostol (1967). Ce dernier incorpore en effet les principes de Cavalieri dans son axiomatique des volumes, ce qui lui permet d'aboutir avec efficacité aux volumes de solides de révolution et à ceux de solides de section connue (c'est-à-dire dont la section possède une mesure qui peut être exprimée au moyen d'une expression analytique d'une variable).

3) "*Pour pouvoir être qualifié d'épistémologique, un obstacle doit-il avoir laissé des traces dans l'histoire des mathématiques?*"

La réponse à cette question semble être oui, implicitement du moins, dans les propos tenus par plusieurs auteurs. Ainsi, G. Brousseau (1983) affirme que : "*Mais il [le concept d'obstacle épistémologique] peut s'avérer fructueux pour l'enseignement, dans la mesure où : - les obstacles en question sont vraiment identifiés dans l'histoire des mathématiques [...]*"

L'obstacle de l'hétérogénéité des dimensions satisfait à ce critère. En effet, il explique de multiples faits historiques : les controverses interminables sur la nature des indivisibles (ont-ils, oui ou non, la même dimension que la grandeur dont ils sont extraits, composent-ils réellement celle-ci...?); les discussions soulevées (e.a. entre Torricelli et Cavalieri) par les paradoxes relatifs aux indivisibles; des erreurs effectives comme celle, commise par Cavalieri lui-même, qui consiste à "*comparer les solides de révolution en comparant les figures génératrices*", par exemple en "*imaginant le cylindre comme composé [compactum] d'une infinité de parallélogrammes; et le cône construit sur la même base et le même axe que le cylindre, comme composé d'une infinité de triangles passant par l'axe*" (cité par F. De Gandt, 1983).

Pour nous, trouver des traces d'un obstacle à la fois dans l'histoire des mathématiques et dans les conceptions a priori des élèves constitue certainement une garantie de son caractère épistémologique. Mais la présence d'un tel obstacle dans l'histoire est-elle une condition sine qua non? Ne peut-on concevoir a priori un obstacle dont on ne trouverait pas de traces dans l'histoire et qui serait malgré tout de nature épistémologique? Nous pensons que oui, bien que nous n'ayons pas de tel exemple à exhiber. Cependant, il nous suffit de penser, pour y croire, que l'obstacle de l'hétérogénéité des dimensions (qui, rappelons-le, consiste en glissements indus du domaine des grandeurs à celui de leurs nombres-mesures) n'aurait pas pu avoir grand sens à l'époque des mathématiques grecques classiques où les mesures de grandeurs au sens moderne de cette locution n'existaient pas et où l'on établissait seulement des rapports entre grandeurs.

M. Artigue (1991) relativise, elle aussi, l'importance de cette référence à l'histoire à propos des obstacles épistémologiques. Nous reviendrons nous-mêmes sur ce point dans la section 5.

4) Un obstacle épistémologique est robuste.

Expliquons ce que nous entendons par cette caractéristique, en nous référant à l'obstacle analysé ici.

- L'obstacle de l'hétérogénéité des dimensions se manifeste par des erreurs multiples, fort différentes les unes des autres, mais auxquelles il permet de donner, tel qu'il est défini, une signification commune.
- Ces erreurs sont récurrentes, persistantes : elles résistent aux mises en garde, elles resurgissent sans crier gare.
- Elles semblent indépendantes - ou peu s'en faut - de la formation reçue : certains des paradoxes sur les indivisibles ou erreurs embarrassent autant les professeurs que leurs élèves; et indépendantes aussi de la réussite scolaire : les élèves jugés "forts" sont tout aussi démunis que les autres.
- Plusieurs des intuitions qui sont sources de cet obstacle sont susceptibles de se conforter l'une l'autre, ce qui lui confère un caractère inextricable.
- Cet obstacle se manifeste à différentes périodes de l'histoire : chez les mathématiciens inventeurs du calcul infinitésimal, chez leurs successeurs (ne faut-il pas attendre que Schwarz propose en 1883 un contre-exemple assez sophistiqué, pour que l'on ne définisse plus l'aire d'une surface non plane comme limite des sommes des aires des triangles d'une surface polyédrale inscrite?) et chez les apprenants d'aujourd'hui. Mais ce point rejoint nos commentaires repris en 3).

5) Les obstacles épistémologiques forment des réseaux.

On retrouve déjà l'embryon de cette idée chez A. Sierpinski (1985b) qui dit que : "Les obstacles apparaissent par couples : c'est caractéristique des obstacles qu'en voulant éviter l'un deux, on risque de tomber sur l'obstacle opposé". Pour illustrer ces propos, cet auteur oppose e.a. l'obstacle qui consiste à n'admettre que le seul infini potentiel dans les raisonnements mathématiques à l'obstacle créé par une "liberté totale dans l'utilisation des infiniment petits et infiniment grands avec l'application à ceux-ci des règles et des lois qui ne sont propres qu'aux quantités finies". Elle oppose aussi l'obstacle géométrique relatif à la notion de limite, décrit à la section 2, et l'identification de fonctions avec les courbes aux obstacles numériques correspondants ("Pendant longtemps dans l'histoire, d'une manière explicite, les fonctions n'apparaissent que sous la forme de tables").

Nous souhaitons compléter cette opposition par couples au moyen des idées d'emboîtement et d'interférence d'obstacles épistémologiques.

- Emboîtement d'obstacles.

A la section 2, nous avons expliqué pourquoi l'obstacle géométrique de la limite pourrait bien n'être qu'une des facettes de l'obstacle de l'hétérogénéité des dimensions.

Mais ce dernier s'intègre, à son tour, dans le cadre d'un obstacle plus global encore. En effet, nous avons montré, in Schneider (1988), en quoi la plupart des hypothèses que nous avons mises à l'épreuve peuvent s'expliquer par une attitude épistémologique particulière des élèves vis-à-vis des mathématiques et des sciences en général : les objets mentaux étudiés ici correspondent à des grandeurs physico-géométriques, c'est-à-dire à des grandeurs qui, pour les élèves, font partie d'un monde sensible, à savoir un monde qu'ils croient pouvoir appréhender partiellement, d'une manière objective, par leurs seuls sens. Et nombreux sont ceux qui s'attendent à ce que les concepts mathématiques et leurs propriétés prolongent en quelque sorte leur perception première de ces objets issus du monde sensible, comme si les mathématiques étaient une copie quasi-conforme de ces objets. Dans une telle perspective, les mathématiques préexistent à toute activité humaine: plutôt que d'être création de l'esprit, elles se laisseraient découvrir par celui qui observe les objets concrets du "monde naturel". C'est sans doute dans la mesure où ils croient en l'existence d'un monde sensible, en celle de faits observables, donné absolu et incontournable, que les élèves s'attendent à ce que les mathématiques traduisent ce donné presque terme à terme. S'ils se rendaient compte du caractère illusoire de ce monde sensible, c'est-à-dire s'ils étaient conscients que leur soi-disant "perception" est, en fait, une structuration mentale, une interprétation de l'esprit, conditionnée par un environnement socio-culturel, peut-être auraient-ils moins de réticence, de difficultés à remplacer cette structuration première par une autre qui s'articule autour de concepts mathématiques?

Ce schéma d'interprétation que nous résumerons par la locution : **conception des mathématiques comme copie conforme de l'expérience sensible** constitue un obstacle plus global que celui de l'hétérogénéité des dimensions, dans la mesure où il permet d'expliquer des réactions qui ne sont pas prises en compte dans ce second obstacle : le refus chez certains élèves, du concept mathématique de vitesse instantanée, concept qui ne possède pas d'équivalent empirique (M. Schneider, 1988). Ces considérations mettent en évidence un emboîtement de trois obstacles :

conception des mathématiques comme copie conforme d'un monde sensible illusoire $\supset$
 obstacle de l'hétérogénéité des dimensions $\supset$
 obstacle géométrique de la limite.

- Interférence d'obstacles.

L'obstacle de l'hétérogénéité des dimensions interfère avec ce que les historiens des mathématiques appellent le **principe de continuité** et que Leibniz, à la suite de Kepler, formule en ces termes : "In any supposed transition, ending in any terminus, it is permissible to institute a general reasoning, in which the final terminus may also be included" (traduit par M. Kline, 1972). En effet, n'est-ce pas ce principe qui pousse les élèves à extrapoler aux longueurs de segments le rapport des aires des surfaces dont ces segments sont les vestiges (cf. une des erreurs relatées à la section 1.1.)?

Mais le principe de continuité déborde ce que nous avons appelé l'obstacle de l'hétérogénéité des dimensions, puisqu'on le reconnaît encore (cfr. e.a. I. Lakatos, 1984) dans la tentation de croire que "Si les termes d'une suite jouissent d'une propriété, sa limite jouit de la même propriété", tentation à laquelle succombe, entre beaucoup d'autres, Cauchy quand il prétend, à tort, que : "La limite de n'importe quelle série convergente de fonctions continues est elle-même continue". Ainsi donc, plusieurs manifestations de l'obstacle de l'hétérogénéité des dimensions s'expliquent-elles par le recours à un principe plus global. Par ailleurs, certaines erreurs reprises in Schneider (1988) échappent au principe de continuité, alors qu'elles sont prises en compte par l'obstacle de l'hétérogénéité des dimensions. Par conséquent, si ce dernier obstacle interfère avec le principe de continuité, il ne lui est pas inclus :

principe de continuité $\cap$ obstacle de l'hétérogénéité des dimensions $\neq \emptyset$.

4. Des origines didactiques ou culturelles pour un obstacle épistémologique.

4.1. Une approche ensembliste de la géométrie à l'origine de l'obstacle de l'hétérogénéité des dimensions?

Dans quelle mesure l'obstacle de l'hétérogénéité des dimensions constitue-t-il un obstacle épistémologique, c'est-à-dire un obstacle à la connaissance? Une telle question pose d'abord le problème de ce qu'est un obstacle épistémologique, non seulement comme provenant d'une connaissance première pré-scientifique (sous les diverses formes dont parle G. Bachelard, rééd. 1980), mais aussi comme induit par les aspects contradictoires des divers modes d'approche scientifique d'un problème. Et nous développerons, en ce qui concerne le problème de l'hétérogénéité posé ici, l'hypothèse suivante, savoir, l'opposition entre deux approches de la géométrie, l'approche ensembliste (hypertrophiée dans l'enseignement actuel) et l'approche via la notion de grandeur. Ces deux approches constituent elles-mêmes deux approches distinctes de la mesure, approches qui, si elles se rejoignent dans la théorie moderne de la mesure, se situent dans des modes différents voire contradictoires quant à l'appréhension des objets géométriques. Un enseignement qui mêlerait ces deux points de vue pourrait alors conduire à cet obstacle de l'hétérogénéité décrit supra.

La théorie des grandeurs géométriques s'appuie sur une connaissance empirique première des objets qu'elle étudie, et qui permet de les distinguer, les définitions explicites n'intervenant que pour rappeler cette distinction (sur le problème des définitions dont nous ne parlerons pas ici, cf. R. Bkouche, à paraître); ainsi la définition euclidienne de la ligne comme "une longueur sans largeur" renvoie à une connaissance antérieure, à la fois empirique et instrumentale, elle ne permet pas d'apprendre par sa seule lecture ce qu'est une ligne; par contre, elle indique, à qui le sait déjà, la distinction entre une ligne et une surface, ce qui est suffisant pour les besoins du développement de la géométrie élémentaire (c'est-à-dire la théorie des grandeurs géométriques et de la mesure d'icelles).

La théorie des grandeurs distingue entre les différents types de grandeurs : longueurs, aires, volumes, celles-ci étant définies empiriquement, et la mesure intervient de façon spécifique que ce soit avec cette première forme de mesure qu'est le comptage, que ce soit avec cette forme plus élaborée qu'est la méthode des aires des Grecs, ou la méthode des volumes des Chinois (Martzloff, 1990), cette spécification de la mesure des divers types de grandeurs est explicitée avec la définition 5 du cinquième livre des *Éléments* d'Euclide : "Deux grandeurs sont dites avoir une raison entre elles, lorsque ces grandeurs, étant multipliées, peuvent se surpasser mutuellement."

C'est dans cette problématique de la mesure des grandeurs, que se situe le théorème fondamental du calcul intégral. Lorsque le point B tend vers le point A, la longueur AB tend vers 0 et l'aire hachurée de la Fig. 6 tend vers 0, cela se voit! (Le problème se pose de la nature de cette démonstration, mais ce n'est pas le problème ici).

La question est de savoir dans quelle mesure un point de vue ensembliste conduit à l'obstacle de l'hétérogénéité, et peut amener un élève à dire que l'aire hachurée tend vers la longueur AA' (la surface hachurée tendant effectivement, comme sous-ensemble du plan, vers la ligne AA'), et par conséquent à écrire

$$\int_a^a f(x) dx = f(a).$$

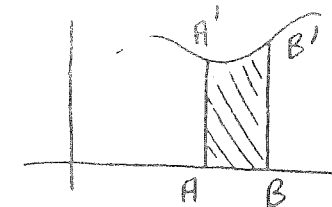


Fig. 6

En fait, le point de vue ensembliste ne distingue pas lignes et surfaces, ce sont des sous-ensembles du plan et pour les distinguer il faut définir des structures supplémentaires, en particulier une théorie de la dimension. La théorie de la mesure consiste alors à associer un nombre à un sous-ensemble satisfaisant des propriétés convenables. Les problèmes ainsi posés non seulement ne peuvent être résolus dans un premier enseignement de l'analyse, mais surtout ils ne peuvent être appréhendés. En effet, la théorie de la mesure s'appuie d'une part sur une axiomatique, d'autre part sur une pratique première de la mesure, au sens de la théorie des grandeurs, pratique qui, même à travers ce qui peut apparaître comme des manquements à la rigueur mathématique, permet de donner sens et consistance aux problèmes de la théorie de la mesure. Le lien entre le calcul intégral et la mesure des grandeurs apparaît à travers cette pratique première, pratique contradictoire avec le point de vue ensembliste; ainsi si on peut parler du périmètre et de l'aire d'un carré, ou de l'aire et du volume d'une sphère du point de vue de la théorie des grandeurs, on ne peut plus le dire d'un point de vue ensembliste lorsque la figure devient un ensemble de points; c'est là que pourrait se situer l'obstacle de l'hétérogénéité.

Cette dernière remarque permet de préciser la contradiction annoncée entre les deux approches de la géométrie définies ci-dessus. Du point de vue de la théorie des grandeurs une figure est un objet global, une combinaison d'objets élémentaires (points, lignes, surfaces, au sens euclidien des termes), ainsi un triangle, un polygone, un polyèdre, un cercle, un cône ou une sphère; elle garde un caractère empirique lors même qu'elle est considérée comme un objet "abstrait", et c'est ce caractère empirique qui permet de la reconnaître via une représentation, matérielle ou mentale; on peut ainsi parler, sans contradiction, de l'aire ou du volume d'une sphère. Du point de vue ensembliste, la figure est un ensemble de points structuré par des relations, ce sont ces relations qui déterminent le caractère de la figure, indépendamment de toute représentation; ce qui distingue une figure d'une autre se définit à travers des systèmes de relations différents et seulement à travers ces systèmes de relations. La liaison entre ces deux points de vue n'est pas donnée, elle se construit sur des problèmes, en particulier ceux qui ont conduit au point de vue ensembliste pour échapper aux difficultés de ce que j'appellerai l'empirisme euclidien. Ceci dit, cette part d'empirisme de la théorie des grandeurs participe de la construction des mathématiques, et c'est elle qui permet de reconnaître les différents types de grandeurs, même si, ultérieurement, le point de vue ensembliste permet de surmonter les difficultés liées à cette part d'empirisme.

4.2. L'obstacle de l'hétérogénéité des dimensions est-il aussi un obstacle culturel?

Reste la question des obstacles épistémologiques liés au contexte socio-culturel, non pas au sens que dit G. Brousseau (1980) à propos des décimaux (obstacles qui relèvent d'une problématique analogue à celle explicitée ci-dessus), mais parce qu'ils se relient à ces pratiques sociales qui peuvent remettre en cause certaines formes du savoir institué et ainsi créer des difficultés dans son enseignement. Ainsi la mesure comme boîte noire où la grandeur disparaît sous le numérique, ce qui est peut-être aujourd'hui un des principaux obstacles à l'enseignement de la géométrie élémentaire; en effet la part d'empirisme qui intervient dans la mise en place de la géométrie élémentaire (au moins en ce qui concerne la mesure) disparaît des pratiques sociales que peut rencontrer l'élève et, dans ces conditions, la charge de sens qu'elle portait n'existe plus. Pensez à ces balances à affichage digital qui vous fournissent directement non pas le poids mais bien le prix du morceau de viande qu'on y place. Dans cette civilisation du numérique, on n'a

plus accès aux grandeurs directement : celles-ci se voient uniquement à travers les nombres-mesures. Comment dès lors s'étonner que des élèves passent sans crier gare de l'aire d'une lamelle de surface à la longueur du segment qui en est le résidu, si les procédés grâce auxquels on mesure respectivement les surfaces et les longueurs sont peu différenciés dans leur tête. Ce pourrait être aussi une des raisons de l'obstacle de l'hétérogénéité des dimensions, il faudrait alors regarder hors du domaine scolaire.

5. La distinction entre obstacle épistémologique et obstacle didactique reste-t-elle pertinente?

Les considérations précédentes nous amène à poser la question suivante : Y a-t-il un sens à parler de la connaissance en soi et des obstacles qu'elle soulève c'est-à-dire des obstacles épistémologiques? Chaque objet de connaissance ne doit-il pas être évoqué dans un contexte culturel ou didactique donné? Auquel cas, la référence à l'histoire devrait être envisagée avec prudence, deux périodes distinctes de l'histoire pouvant donner lieu à des obstacles différents ou des formes multiples d'un même obstacle.

Poussons les choses plus loin en supposant, au risque de paraître contredire G. Bachelard, qu'il est vain de parler d'obstacle lié à la connaissance en soi, sans évoquer les problèmes véhiculés par l'environnement. Y a-t-il encore un sens, dans cette hypothèse, à distinguer les obstacles épistémologiques des obstacles didactiques ["ceux qui semblent ne dépendre que d'un choix ou d'un projet du système éducatif" (G. Brousseau, 1983)]? Ne devrait-on pas les amalgamer? Est-on à même effectivement de faire le tri entre les effets d'un système éducatif organisé, tel le système scolaire, et un système éducatif plus "sauvage" que l'on appelle habituellement environnement culturel? Malgré l'impossibilité de répondre à ces questions, nous pensons que la distinction entre ces deux catégories d'obstacles reste pertinente, dans la mesure où elle permet de discriminer des difficultés scolaires d'origines diverses. Ainsi, les difficultés analysées plus haut d'une part et d'autre part, un manque de maîtrise des graphes de fonctions décrit in Schneider (1988) et que l'on peut résumer comme suit.

Pour bon nombre d'élèves en fin d'enseignement secondaire, les courbes représentatives des fonctions semblent avoir perdu toute valeur de représentation, comme si elles étaient à la fois signifiant et signifié mais confondus en un tout indissociable, le signifié étant assimilé au signifiant. La fonction ne serait plus, pour eux, une relation entre deux grandeurs x et y , une ordonnée positive $f(x)$ ne serait plus la longueur d'un segment figurant l'une ou l'autre grandeur. Le concept de fonction serait en quelque sorte réduit à l'image visuelle qu'imprime sur la rétine sa courbe représentative, l'expression analytique $y = f(x)$ qui lui est associée servant uniquement à désigner cette courbe, à l'identifier parmi d'autres de formes différentes, tout comme les coordonnées $(x, f(x))$ seraient le nom de tel ou tel point particulier de la courbe. Il y a lieu ici de se demander si ce n'est pas l'enseignement lui-même qui secrète cette conception tronquée de la notion de fonction. En effet, la fonction (ou plutôt sa courbe représentative) y est trop souvent considérée comme un objet d'étude en soi, non comme un mode de représentation d'une loi de variation.

On a l'impression que les difficultés qui viennent d'être décrites pourraient être évitées, si l'on améliorait l'enseignement. A contrario, les embûches liées aux découpages infinis des surfaces et des solides semblent *davantage* inéluctables, nonobstant les effets supposés d'une approche ensembliste de la géométrie (cf. section 4.1.) C'est pourquoi, il nous paraît utile de pouvoir séparer ces deux catégories de difficultés au moyen du clivage : obstacle épistémologique-obstacle didactique. En ce sens, nous souscrivons à la description que fait H. El Bouazzaoui (1988) de l'obstacle didactique : "Un **obstacle didactique** est un obstacle qui a sa source dans la transposition didactique effectuée en vue de l'enseignement d'un certain contenu. Il a les mêmes caractères qu'un obstacle épistémologique, sauf qu'il peut être éliminé en agissant sur les situations d'enseignement proposées à l'élève. C'est un obstacle qui tient à des **"variables de commande"** dans une situation didactique, c'est-à-dire à des variables sur lesquelles l'enseignant peut agir, faisant ainsi changer le comportement de l'élève".

6. Un choix didactique : les obstacles épistémologiques rencontrés par les élèves

Revenons à la forme d'obstacle épistémologique, liée aux aspects contradictoires des diverses approches scientifiques d'un problème, et décrite dans la section 4.1. C'est cela qu'il faut prendre en compte dans l'enseignement, c'est-à-dire qu'il faut savoir choisir les étapes de la construction du savoir, problème d'autant plus difficile que la construction de la connaissance a tendance à oublier son histoire et ainsi les aspects contradictoires de cette construction, non seulement comme Bachelard le dit, parce qu'une connaissance ancienne s'oppose à une connaissance nouvelle qui serait plus rationnelle et plus scientifique que l'ancienne, mais parce que ces aspects contradictoires sont au cœur même de la connaissance scientifique.

Le problème didactique est alors de déterminer s'il est nécessaire d'enseigner les deux points de vue, et dans ce cas de choisir un ordre de priorité. L'approche ensembliste conduit à l'obstacle de l'hétérogénéité des dimensions dans la mesure où cette hétérogénéité doit être redéfinie et nous avons vu qu'une redéfinition explicite posait des problèmes difficiles sur le plan mathématique. On peut alors la définir empiriquement, mais cela est un ajout arbitraire du point de vue de la logique interne de la théorie, et l'on tombe sur l'obstacle décrit supra, obstacle qui oblige à un retour nécessaire à la part d'empirisme de la théorie des grandeurs. Une autre façon de faire est de définir la notion d'aire à partir de l'intégrale définie analytiquement, la géométrie étant alors une conséquence de constructions antérieures, le lien avec la connaissance empirique tenant de l'arbitraire ou du miracle. L'approche via la théorie des grandeurs permet une construction à partir de la notion d'aire de la notion d'intégrale, avec tous les problèmes que cela pose, comme la confusion de la notion d'intégrale et de la notion de primitive, et le problème de l'intégration des fonctions non continues, c'est-à-dire la prise en compte de l'obstacle de la connaissance empirique, mais c'est la prise en compte de cet obstacle qui permet de comprendre ce que R. Bkouche (1988) appelle la reconstruction rationnelle du réel. Ainsi l'enseignement pose le problème du choix des obstacles épistémologiques que vont rencontrer les élèves selon les chemins proposés par les enseignants. On peut alors poser la question des obstacles les plus formateurs!



BIBLIOGRAPHIE

- APOSTOL T. (1967) : *Calculus, Volume 1*, Second edition, Xerox College Publishing, Lexington.
- ARTIGUE M. (1991) : Epistémologie et didactique, *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 10/2. 3, 241-285.
- BACHELARD G. (1938) : *La formation de l'esprit Scientifique*, J. Vrin, Paris, 1980.
- BKOUCHE R. (1988) : Appendice historique, *Initiation à la géométrie*, 435-490, PUF, Paris.
- BKOUCHE R. (à paraître) : Quelques grands traités de géométrie élémentaire, *Journées Société Belge des Professeurs de Mathématiques*, Tournai 1990
- BROUSSEAU G. (1980) : Problèmes de l'enseignement des décimaux, *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 1.1., 11-60.
- BROUSSEAU G. (1983) : Les obstacles épistémologiques et les problèmes en mathématiques, *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 4.2., 165-198.
- CORNU B. (1983) : *Apprentissage de la notion de limite : conceptions et obstacles*, thèse de doctorat de 3^{ème} cycle, Université de Grenoble.
- DE GANDT F. (sans date, aux environs de 1983) : Les indivisibles de Torricelli, *Cahier n°17, Torricelli-II, du Séminaire d'Epistémologie et d'Histoire des Sciences*, Université de Nice.

- EL BOUAZZAOUI H. (1988) : *Conceptions des élèves et des professeurs à propos de la notion de continuité d'une fonction*, thèse pour l'obtention du grade de Ph. D, Université Laval, Québec.
- FREUDENTHAL H. (1983), *Didactical phenomenology of mathematical structures*, D. Reidel, Dordrecht.
- HAUCHART C., ROUCHE N. (1987) : *Apprivoiser l'infini, un enseignement des débuts de l'analyse*, Ciaco, Louvain-la-Neuve.
- KLINE M. (1972) : *Mathematical thought from ancient to modern times*, Oxford Univ. Press.
- LAKATOS I. (1976) : *Preuves et réfutations, Essai sur la logique de la découverte mathématique*, traduit par N. Balacheff et J. M. Laborde, Hermann, Paris, 1984.
- MARTZLOFF J. Cl. (1990) : Quelques exemples de démonstrations en mathématiques chinoises. La démonstration mathématique dans l'histoire, actes du Colloque Inter-IREM Epistémologie et Histoire des Mathématiques (Besançon 1989).
- SCHNEIDER M. (1988) : *Des objets mentaux aires et volumes au calcul des primitives*, thèse de doctorat, Louvain-la-Neuve.
- SCHNEIDER M. (1991) : "Un obstacle épistémologique soulevé par des "découpages infinis" des surfaces et des solides". *Recherches en Didactique des Mathématiques*, vol. 11, n°2.3, 241-294.
- SIERPINSKA A. (1985a) : Obstacles épistémologiques relatifs à la notion de limite, *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 6.1., 5-67.
- SIERPINSKA A. (1985b) : La notion d'obstacle épistémologique dans l'enseignement des mathématiques, *Comptes-rendus de la 37^e rencontre organisée par la C.I.E.A.E.M. (Mathématiques pour tous à l'âge de l'ordinateur)*, Leiden, 73-95.

HUYGENS ET LA RELATIVITE

Christiane VILAIN

Observatoire de PARIS
Section de Meudon



INTRODUCTION

Qu'est-ce qu'un principe de Relativité?

Nous distinguons aujourd'hui deux sortes de principes de relativité :

- Un principe de "physique" qui peut s'énoncer ainsi :
"Les phénomènes physiques se produisent de la même façon dans tous les repères d'une certaine classe".
- Un principe "philosophique" qui s'énonce par contre de la façon suivante :
"Les lois de la physique doivent avoir la même forme dans tous les repères d'une certaine classe, car elles doivent être valables pour un ensemble d'observateurs".

Si le premier énoncé entraîne le second, l'inverse n'est évidemment pas vrai, car on peut toujours construire les lois de telle façon qu'elles puissent s'écrire dans tous les repères à condition seulement d'enrichir la théorie de nouveaux objets ou concepts. De tels concepts pourraient être, par exemple, les forces d'inertie intégrées dans la loi fondamentale de la dynamique. Il ne s'agit plus alors d'une propriété des phénomènes étudiés qui reposerait d'une façon quelconque sur l'expérience, mais d'une volonté préalable de construire la théorie d'une certaine façon.

Cette distinction peut nous permettre d'amorcer une discussion de l'évolution d'un principe de relativité entre Galilée et Huygens, mais ne s'avérera pas vraiment suffisante. Une telle distinction est par ailleurs moderne et ne peut s'appliquer à un contexte dans lequel les lois physiques doivent refléter et expliquer directement les phénomènes, pour des observateurs dont les rapports ne sont pas clairement envisagés.

Il ne s'agit jamais en effet, dans le domaine de l'étude du mouvement et de ses causes, de "sauver les phénomènes" comme on a pu le faire en astronomie. Poser un cadre *a priori* pour l'étude de ces phénomènes est sans doute l'intention de Descartes, mais non pas celle de Galilée ni de Huygens. L'énoncé galiléen n'est d'ailleurs aucunement donné comme un principe, mais comme une expérience de pensée qui pourrait être réalisée et le sera partiellement. Il s'agit donc bien d'un énoncé du premier type pour des repères en mouvement uniforme les uns par rapport aux autres, mouvement rectiligne localement mais circulaire globalement.