

$\left. \begin{matrix} p^1x p^1y \\ p^0x p^2y \end{matrix} \right\}$ si au contraire nous le multiplions par x :

$\left. \begin{matrix} p^2x p^0y \\ p^1x p^1y \end{matrix} \right\}$ et ainsi de suite.

De même :

$\left. \begin{matrix} d^1x d^0y \\ d^0x d^1y \end{matrix} \right\}$ différencié selon y devient

$\left. \begin{matrix} d^1x d^1y \\ d^0x d^2y \end{matrix} \right\}$ si au contraire nous le différencions selon x

$\left. \begin{matrix} d^2x d^0y \\ d^1x d^1y \end{matrix} \right\}$

Il s'ensuit également que $d^3(xy)$ vaut $1d^3x d^0y + 3d^2x d^1y + 3d^1x d^2y + 1d^0x d^3y$, ou encore, dans la notation habituelle : $y d^3x + 3ddx dy + 3dx ddy + x d^3y$. Plus généralement nous obtenons en différenciant, au moyen de la lettre d , le résultat suivant, analogue à celui que nous avons obtenu pour les puissances au moyen de la lettre p :

$$d^e(xy) = 1d^ex d^0y + \frac{e}{1} d^{e-1}x d^1y + \frac{e \cdot e - 1}{1 \cdot 2} d^{e-2}x d^2y + \frac{e \cdot e - 1 \cdot e - 2}{1 \cdot 2 \cdot 3} d^{e-3}x d^3y + \frac{e \cdot e - 1 \cdot e - 2 \cdot e - 3}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} d^{e-4}x d^4y + \text{etc.} \quad ^{38}$$

L'indétermination caractéristique des différentielles leibniziennes conduit donc à l'intuition d'un calcul symbolique dont on a toutes les raisons de penser qu'elle aurait été impossible si Leibniz avait été trop préoccupé par l'ancienne rigueur « métaphysique ». Mais Leibniz n'abandonne cette dernière que pour jeter les bases d'un nouveau type de fondement en mathématiques voire d'une nouvelle conception de la rigueur.

³⁸ *Symbolismus memorabilis Calculi Algebraici et Infinitesimalis in comparatione potentiarum et differentiarum, et de Lege Homogeneorum Transcendentali*, M.S. V p. 377-382, traduction in *Naissance du calcul différentiel*, p. 409-421.

MATHEMATIQUES MESOPOTAMIENNES

James RITTER

Université Paris VIII

INTRODUCTION

A notre programme figurent en particulier l'élaboration lente et complexe du concept même de nombre, et la mise en place d'un système scolaire à forte composante mathématique, dont les problèmes et les solutions proposées nous semblent parfois très proches. J'aborderai aussi à la fin la difficile question de l'interprétation des textes paléobabyloniens et essayerai de justifier leur organisation très poussée sans pourtant recourir à une prétendue « algèbre babylonienne ».

Commençons donc par une brève présentation de la Mésopotamie.

I. LES COMMENCEMENTS (avant 2700)

La Mésopotamie (qui recouvre essentiellement l'actuel Iraq) et l'Élam (correspondant à l'Iran de notre époque) forment deux plateaux séparés par des montagnes. Le premier est bordé à l'Ouest par le désert syro-arabien, au Nord par les montagnes et plateaux d'Anatolie et au Sud par le Golfe arabo-persique. Les régions montagneuses constituent les zones de premier peuplement avant que la révolution néolithique du VII^e millénaire avec son invention de l'agriculture ne voit une occupation des plateaux et la formation de villages. Mais il faut attendre quelques trois millénaires, ponctués d'avances cruciales, sur le plan technologique (tour de potier, moule à briques, fusion du cuivre et production de bronze) et social (croissance démographique, développement d'une société de classes), pour assister à la formation de véritables villes par amalgame de villages et drainage de la population rurale. C'est ainsi qu'Uruk en Mésopotamie et Suse en Élam deviennent les centres les plus importants pendant le IV^e millénaire. Cette éclosion urbaine est essentielle pour nous car c'est dans ce cadre que vont naître écriture et mathématiques.

L'invention de l'écriture

Les fouilles archéologiques faites à Suse depuis les années soixante et leur interprétation ultérieure ont permis de suivre presque étape par étape l'invention et développement d'un système d'écriture. La stratigraphie du site, mieux préservée qu'à Uruk, nous permet d'avoir un aperçu sur les premières étapes du processus en Élam, d'ailleurs cohérent avec les vestiges plus éparpillés trouvés à Uruk¹.

Au tout début, pendant le quatrième millénaire, on trouve couramment des bulles creuses d'argile contenant de petits jetons de même matière, de taille et de forme variées; la surface des bulles porte des impressions faites par des sceaux-cylindres. L'interprétation généralement admise est que ces bulles sont des registres de comptabilité primitifs. La forme et la taille des jetons à l'intérieur représentent la nature des objets comptés et/ou les unités employées (moutons, mesures de blé, huile, etc.); le nombre de jetons de chaque sorte indique le nombre d'objets comptés; la marque du sceau indique le propriétaire ou les parties contractantes.

¹ Je suis dans ses grandes lignes la reconstitution proposée par SCHMANDT-BESSERAT 1977 et 1978. Cependant certaines de ses affirmations sur l'ancienneté et l'universalité de ce système me semblent grossièrement exagérées. Le meilleur article de synthèse récent sur la Mésopotamie est NISSEN 1985 (en anglais) et NISSEN, DAMEROW & ENGLUND 1990 (en allemand); pour Suse on peut consulter LE BRUN & VALLAT 1978.

Dans un deuxième temps, sans doute pour éviter de casser la bulle avant la fin du contrat pour une vérification, les jetons sont appuyés dans l'argile fraîche de la bulle avant d'être placés à l'intérieur, laissant donc à l'extérieur des encoches caractéristiques de leur forme et taille.

L'étape suivante voit la disparition des jetons concrets dont seules les encoches subsistent à l'extérieur de la bulle : celle-ci s'aplatit puisqu'elle n'a plus à contenir des jetons.

Un pas nouveau est franchi lorsque des marques de calame (roseau) figurent à la surface de la bulle aplatie, c'est-à-dire de la tablette, les encoches des jetons : il y a donc apparition d'un outil spécial, unique, qui permet de représenter les signes autrefois imprimés par des objets différenciés.

Jusqu'alors la répétition du même signe indiquait le nombre d'objets concernés : dans la dernière étape, l'enfoncement d'une extrémité du calame sert à indiquer la quantité, un dessin tracé par le même instrument complète l'information en indiquant la nature de l'objet compté. Il y a donc une première séparation entre signe quantitatif et signe qualitatif. Attention toutefois : à ce stade, les signes quantitatifs ne sont pas des nombres abstraits comme nous l'entendons car leur aspect et valeur dépendent des systèmes métrologiques en question. Mais il s'agit d'un pas important vers la libération du nombre de sa gangue matérielle.

Étape 1 — Bulle + jetons —	
Étape 2 — Bulle + jetons + encoches de jetons	>3000 ?
Étape 3 — Bulle aplatie + encoches de jeton	3000 ?
Étape 4 — Tablettes + marques de calame	2900 ?
Étape 5 — Tablettes + marques de calame	2800 ?
(nombres + logogrammes)	

Ce système d'écriture, appelé par les spécialistes protoélamite, s'étendit à tout l'Élam au cours du III^e millénaire pour être remplacé finalement par l'écriture cunéiforme mésopotamienne pour des raisons toujours discutées mais qui inclut l'invasion et la domination militaire d'une partie du pays par leurs voisins de l'Ouest.

Cette écriture cunéiforme est sans doute elle-même le résultat du même type de processus que celui décrit plus haut, avec un décalage dans le temps : la dernière étape en a eu lieu vers 3200 à Uruk. L'écriture, dite protosumérienne, atteinte alors, se retrouve dans plusieurs sites de Mésopotamie (Jemdet Nasr, Ur) et évolue vers l'écriture cunéiforme proprement dite, sur les caractéristiques de laquelle nous reviendrons un peu plus tard. Retenons simplement que dans leurs premiers pas, aussi bien en Élam qu'en Mésopotamie, les écritures apparaissent donc comme des aides-mémoire servant à garder trace de nombres et d'objets utilisés dans des transactions commerciales et **non pas**, en dépit de leurs noms, comme des transcriptions des langues parlées dans les pays correspondants, l'élamite et le sumérien. Retenons aussi que mathématiques et écritures sont au début étroitement associées.

Étudions de plus près le contenu de ces premiers textes de comptabilité. Comme nous l'avons déjà signalé, les valeurs d'un signe numérique sont toujours liées au système métrologique particulier qu'on considère. Heureusement, l'addition des objets comptés et la présence des totaux sur les tablettes permettent souvent de déterminer au moins les valeurs relatives des signes. Voici un exemple tiré d'un compte de troupeau de moutons :

Béliers : ■ ■ ■
Brebis : ■ ■ ■
Moutons (total) : D

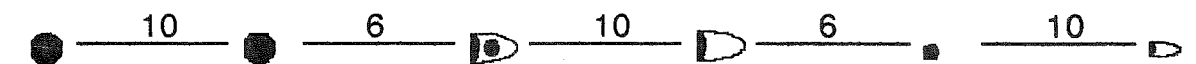
indique que 1 D vaut 6 ■. De même, une autre tablette dans la même série contient le calcul suivant :

Agneaux : D D D D D
Agnelles : D D D D D
Petits pour l'année : ■

qui montre que 1 ■ vaut 10 D.

Plusieurs systèmes de relations cohabitent selon le type d'objets comptés. Le système dit S (Sexagésimal) que nous venons de rencontrer est utilisé pour le comptage d'objets discrets et les mesures linéaires; les signes qui le constituent avec les relations entre unités successives peuvent être représentés par le diagramme ci-dessous :

Système S (Sexagésimal — mesures de comptage, longueurs)



Voici d'autres exemples :

Système G (GÁN — mesures de surface)



Système S (SE — mesures de capacité)



Un examen de ces systèmes et d'autres encore utilisés à cette époque montrent qu'en dépit de la richesse des systèmes le répertoire des signes est petit, à cause des restrictions imposées par les instruments utilisés. Des calames de deux tailles fournissent seulement quatre marques différentes : un petit et un grand cercle (extrémité ronde du calame) et une petite et une grande encoche (extrémité en biais). Ces marques sont utilisées soit séparément (4 signes), soit combinées dans la forme d'un cercle plus une encoche de la même taille (2 signes) ou de deux cercles de tailles différentes (1 signe), ce qui fournit en tout sept signes. Même si les mêmes signes apparaissent dans tous les systèmes métrologiques, leurs valeurs, tant absolues que relatives, varient selon le système, comme on le voit d'ailleurs sur les diagrammes.

II. ÉPOQUE PROTODYNASTIQUE (2700-2350)

A peu près autour de 2700 les cités-états constituant le Sumer antique ont atteint un stade de taille et de richesse tel que l'écriture, jusque là confinée à quelques sites, devient commune à tout le sud de la Mésopotamie, atteignant même le nord « barbare ». L'implosion des campagnes dont nous avons parlé pour la période précédente fait maintenant place à une croissance régulière des vastes centres urbains, ainsi qu'à une augmentation du nombre et de la taille des

villages environnants².

Quelques rares documents d'origine scolaire contenant des listes de signes et de vocabulaire coexistaient dès le début avec les textes de comptabilité : leur nombre s'accroît et leur contenu s'enrichit au cours de la période protodynastique. En particulier c'est durant cette période que nous trouvons les premiers textes mathématiques reconnaissables qui sont destinés à enseigner au jeune scribe l'art du calcul. Dès leur apparition ces textes sont de deux sortes distinctes : des **tables** et des textes de **procédure** (textes de problèmes). Ces derniers consistent, à cette période, en problèmes de calcul proposés aux étudiants, normalement accompagnés de la réponse donnée à la fin. Voici l'un d'entre eux³ (pour abréger, nous indiquons dorénavant par un chiffre arabe le nombre de fois où un signe est répété) :

Orge, (un) grenier (*guru*₇);

7 *sil*₃ [environ 7 litres]

un homme reçoit.

Ses hommes :

4 ● 5 ● 4 [] 2 [] 5 ■ 1 []

[i. e. 164 571 hommes]

Orge, 3 *sil*₃ restent.

TSS 50

Le problème est posé dans la partie supérieure de la tablette et la réponse de l'élève dans la partie inférieure — notons que les nombres utilisés sont identiques à ceux en usage pendant la période précédente pour compter les objets concrets (Système S).

Malheureusement nous ne disposons pas des textes dans lesquels serait donnée la procédure de calcul effective suivie par l'élève, contrairement à ce qui sera le cas des textes ultérieurs, au II^e millénaire. Nous sommes donc incapables de dire exactement comment un tel problème était résolu, sauf par référence (qui peut être trompeuse) aux problèmes similaires dans les textes plus récents.

Plus important peut-être d'un point de vue pédagogique est la nature du problème posé; une réponse de plus de cent mille hommes n'est clairement pas réaliste pour l'époque. Il semble s'agir surtout de développer la pratique des techniques calculatoires; s'esquisse déjà la production de problèmes ayant gagné une autonomie relative vis-à-vis de la demande économique.

Aucun texte mathématique mésopotamien, quel que soit son époque, ne donne les détails des calculs effectués dans sa solution. L'opération de multiplication ou la recherche d'un inverse seront plus tard parfois explicitement requises dans le texte; la méthode pour effectuer l'opération dans le cas étudié n'est jamais spécifiée dans le texte. Ceci parce que le résultat de ces opérations était obtenu à partir de la seconde catégorie de textes mathématiques, les tables.

Celles-ci offrent un arrangement ordonné systématiquement de signes numériques et étaient utilisées pour résoudre les calculs nécessaires au cours des algorithmes dans les textes de problèmes. Leur forme est clairement une extension directe des listes lexicales. Voici un exemple d'une série de longueurs et de largeurs de champs carrés (en unités du système S) et des aires correspondantes, écrites directement dans les mesures de surface (en unités du système GÁN)⁴.

² Pour une histoire de cette période voir HUOT 1989.

³ Copie : JESTIN 1937, n° 50. Voir aussi HØYRUP 1982. Attention : le 3 du signe *sil*₃ par exemple n'a aucune valeur numérique; il ne s'agit que d'une convention adoptée par les Assyriologues pour différencier des signes homophones.

⁴ Photographie : NISSEN, DAMEROW & ENGLUND 1990, fig. 18m. L'ancienne copie, souvent reproduite, dans DEIMEL 1922-4, vol. II, pl. 75, n° 82 est inexacte et doit être corrigée d'après la

Comme toute table, celle-ci peut être utilisée dans les deux sens, soit pour éviter de refaire à chaque fois la multiplication suivie de la conversion d'unités, soit pour déterminer le côté d'un champ carré dont on connaît la surface.

1 [] <i>nindan</i> longueur	1 [] [carré]	[]
9 []	9 [] carré	2 ● 4 ✱ 2 ■
8 []	8 [] carré	2 ● 8 ■
7 []	7 [] carré	[1 ●] 3 ✱ 8 ■
6 []	[6 [] carré]	1 ● 1 ✱ 2 ■
5 []	5 [] carré	5 ✱
4 []	4 [] carré	3 ✱ 2 ■
3 []	3 [] carré	1 ✱ 8 ■
2 []	2 [] carré	8 ■
1 []	1 [] carré	2 ■
5 ■	5 ■ carré	1 ■ 1 [] 1 []
4 ■	4 ■ carré	2 [] 3 []
3 ■	3 ■ carré	1 [] 3 []
2 ■	2 ■ carré	[]
1 ■	[1 ■ carré]	[]
5 []	[5 [] carré]	[]
..... (cassé)		

VAT 12593

Cette table, lorsque elle était complète, s'étendait de 1 [] à 1 [], c'est-à-dire, d'environ 300 mètres à 50 centimètres. Ici le signe ✱ est un développement de l'ancien ●, le cercle extérieur étant remplacé par quatre traits croisés « cunéiformes ». C'est un simple exemple de la « cunéiformisation » croissante de l'écriture en général — y inclus les signes numériques — typique de cette période. De plus en plus, les lignes incurvées gravées de la vieille forme semi-pictographique de l'écriture, difficiles à tracer dans l'argile, sont remplacées par les traits plus rapides et plus simples taillés par le calame.

Un document contemporain témoigne d'une étape supplémentaire dans cette discrétisation de l'écriture; il s'agit d'une table, elle aussi de longueurs et d'aires⁵. On y trouve une suite de cases couplées par paires dans laquelle la première de chaque paire contient une mesure linéaire indiquant le côté d'un carré et la seconde la mesure de sa surface. Voici le commencement de cette tablette :

[1 []] <i>kùš</i> est le côté du carré.	[1] SA ₁₀ <i>mana</i> 1 ■ 5 [] <i>gín</i>
2 [] <i>kùš</i> est le côté du carré.	2 [] <i>gín</i> moins 1 [] <i>mana</i>
[3 []] <i>kùš</i> est le côté du carré.	[4 []] <i>gín</i> moins <i>igi</i> -4 []
4 [] <i>kùš</i> est le côté du carré.	6! [] <i>gín</i> 2 [] <i>mana</i>
5 [] <i>kùš</i> est le côté du carré.	1 ■ <i>gín</i> 1/3 < 1 ■ > 5 []
6 [] <i>kùš</i> est le côté du carré.	1 ■ [5 []] <i>gín</i>

OIP 14 70

Plusieurs changements sont à l'œuvre ici. Au niveau de l'écriture, la « cunéiformisation » s'est développée. Le vieux signe des unités [] est conservé pour les mesures de longueur (colonne de gauche dans la transcription) mais est remplacé par le signe cunéiforme [] dans une partie du système de mesures de surface pour marquer le nombre de *gín* (mais on notera le maintien du vieux []

photo.

⁵ Copie: LUCKENBILL 1930, n° 70; traduction allemande et commentaire dans EDZARD 1969.

pour les dizaines de *gin* de même que le signe ∇ pour le nombre de *mana*⁶.

Mais le changement le plus important est dans la même manière même de présenter l'information métrologique. Au lieu d'ensembles séparés de signes numériques pour chaque système métrologique, nous assistons ici à une certaine autonomisation des nombres : un ensemble standard de nombres (le choix en l'occurrence est celui du vieux système S) est couplé avec le nom de l'unité pour indiquer à quelles unités ces nombres sont attachés. Ceci nous rappelle évidemment le processus par lequel les signes numériques s'étaient détachés des signes qualitatifs des objets.

III. AKKADE (2350-2200)

L'ultime vainqueur dans la bataille pour l'hégémonie parmi les cités-états combattantes ne fut aucune de celles qui semblaient favorisées au début. La victoire revint à cette fraction de la population qui parlait une langue sémitique — l'akkadien — et dont les traces précédentes ne consistent pour nous qu'en des noms de scribes dans quelques textes écrits en sumérien. Avec une nouvelle capitale, Akkade, et un nouveau nom — Šarrum-kīn, qui signifie « le roi est établi », a en effet peu de chances d'être son nom originel — l'homme que nous appelons maintenant Sargon fonda le premier véritable empire en Mésopotamie vers 2350. S'étendant à son apogée du golfe arabo-persique à la Syrie et au Liban, le modèle ainsi créé et son créateur devaient avoir un impact durable sur l'imagination mésopotamienne.

La nouvelle administration centralisée de l'empire sargonique introduisit deux innovations qui nous intéressent plus particulièrement : elles concernent l'écriture et la métrologie. Les deux sont uniformisés sur toute l'étendue du territoire et les besoins croissants de gestion et de communication induisent une simplification rapide des signes utilisés pour améliorer la vitesse et la fiabilité de l'enregistrement.

Ces phénomènes peuvent être illustrés par le petit texte scolaire suivant⁷ :

4 ∇ 3 ∇ est la longueur.

(La) largeur (est telle qu'il y ait) 1 ∇ (comme) surface.

Sa largeur

est à trouver.

PUL 31

Les unités de longueur utilisées dans le texte — ∇ et ∇ remplaçant les anciens ∇ et ∇ — nous frappent par le niveau de cunéiformisation atteint. La complexité des systèmes d'unités demeure pourtant, et ce jusqu'à la fin de la civilisation mésopotamienne. Le système métrologique pour les surfaces surtout conserve sa pléthore d'unités comme en témoigne l'exercice scolaire suivant (problème + solution — fausse ! — de l'élève)⁸ :

1 ∇ 5 ∇ moins 1 ∇ *kùš-numun* est le côté du carré.

Sa surface : 2 ∇ + *gal* 2 ∇ 4 ∇ 9 ∇ 5 — 1 ∇ *aša* 5 — ∇ *sar* 1

∇ *gin* ∇ *ša*
a été trouvée.

PUL 28

⁶ Peut-être est-ce dû au fait que cette mesure est une adaption du système de poids aux petites unités du système de surface.

⁷ LIMET 1973, n° 39: pl. X et p. 67. Cf. POWELL 1975.

⁸ LIMET 1973, n° 37: pl. IX et p. 65. Cf. WHITING 1983, p. 61sqq.

Comment comprendre ce texte ? La première ligne contient deux unités de longueur du même système, le *nindan*, dont le nom n'est pas explicité séparément des signes numériques (pas plus que dans le texte précédent) et le *kùš-numun* qui en est un sous multiple et dont le nom est juxtaposé au signe numérique; cette ligne se lit donc ainsi : 1 ∇ 5 ∇ (= 15 *nindan*) moins 1 ∇ *kùš-numun*.

La seconde ligne met en œuvre différentes unités du système de surface; là encore, certaines (*sar*, *gin*, *ša*) sont marquées par leur nom, signe spécifique accolé à un signe purement numérique, d'autres ne sont pas dissociables du nombre représenté (attention : le mot *gal* n'est pas une unité mais marque la taille du chiffre précédent ! ∇ est le signe utilisé à l'époque akkadienne pour l'archaïque ∇ , ∇ + *gal* représente un « grand » ∇ , l'ancien ∇). Les deux groupes sont séparés par le mot *aša* (lit. surface). On notera aussi dans ce texte des signes pour des « fractions », ∇ (1/2) et ∇ (2/3)⁹.

Ainsi apparaissent dans ce court texte huit unités différentes, chacune avec sa manière particulière d'écrire les nombres. Là encore aucune méthode de solution n'est donnée et l'on ne peut que deviner les détails de la multiplication effectuée.

Nous avons toutefois des informations supplémentaires, grâce à une autre tablette¹⁰ :

2 ∇ 8 ∇ moins 1 ∇ *šu-dù-a* est le côté du carré.

(Assigné à) Meluhha.

1 ∇ 5 ∇ moins 1 ∇ *kùš-numun* est le côté du carré.

(Assigné à) Ur-Išaran.

A 5446

Nous reconnaissons le deuxième problème, celui assigné à l'élève Ur-Išaran, comme celui qui nous intéresse. Il semble bien que nous avons ici un exemple (le seul) d'une tablette de maître associée à une réponse d'élève.

IV. UR III (2200-2000)

L'empire sargonique s'écroule après seulement une centaine d'années, en partie sous les effets de l'invasion des Gutis venant de l'est. Mais cette occupation dure peu de temps, plusieurs cités-états (Lagaš, Uruk, ...) réussissant à reconquérir leur indépendance. Le combat contre les Gutis et la résurgence des guerres intestines occupèrent en priorité la classe dirigeante de ces états. Sous la direction d'Ur-Nammu, la cité d'Ur reconquit une grande partie de la Mésopotamie vers 2100 et un nouvel empire centralisé fut établi.

Contrairement à la période troublée qui précède, l'empire dit d'Ur III nous a légué une énorme quantité de tablettes, plusieurs centaines de milliers, dont une petite fraction seulement a été publiée. Parmi elles une écrasante majorité est formée de textes de nature économique (comptes, textes d'administration). Ce n'est que récemment qu'un petit nombre de textes scolaires, surtout des compositions littéraires, a été édité. La presque totalité des textes est écrite en sumérien, qui est déjà une langue morte (elle joue un rôle analogue à celui du latin pendant l'époque médiévale en Europe). Quant aux textes mathématiques, aucun texte de problèmes n'a encore été identifié. Cette circonstance est particulièrement malheureuse car nous avons un début de preuve (provenant d'un texte économique) pour croire que durant au moins la période d'Ur III les calculs mathématiques étaient faits dans un système sexagésimal de position¹¹.

⁹ Pour les fractions dans les textes mésopotamiens voir BENOIT, CHEMLA & RITTER 1991.

¹⁰ WHITING 1983, p. 65.

¹¹ Cette analyse est due à POWELL 1976.

Le texte en question est une tablette de comptabilité pour la réception d'argent. Seules les cinq premières lignes nous intéressent ici :

1	1 4	5 4	
2	2 9	5 6	5
3	1 7	4 3	4
4	3	5 3	2
5	Total : 1 1/2 <i>mana</i> 3 1/2 <i>gín</i> moins 7 <i>še</i> d'argent.		

YOS 4 293

Ici l'évolution des signes numériques du vieux Système S est complète. Il n'en reste que deux — 4 (l'ancien  et ) et 1 (autrefois  et ) — le premier valant 10 fois le second et la valeur « absolue » de chacun dépendant de sa position dans le nombre. Ainsi, la seconde ligne est composée de trois « chiffres », vingt-neuf, cinquante-six, et cinquante; leur juxtaposition signifie donc 29 de l'unité la plus grande plus 56 de l'unité intermédiaire plus 50 de l'unité la plus petite.

Pour comprendre la signification de ce petit texte, nous avons besoin du diagramme des mesures de poids durant la période d'Ur III :

<i>mana</i>	— 60 —	<i>gín</i>	— 180 —	<i>še</i>
-------------	--------	------------	---------	-----------

Si nous interprétons les entrées de ligne 1 à 4 comme étant écrites en notation sexagésimale de position, leur somme donne 1 33 27 50, c'est-à-dire $(1 \times 60^n) + (33 \times 60^{n-1}) + (27 \times 60^{n-2}) + (50 \times 60^{n-3})$. Sans informations supplémentaires, il n'est pas possible de déterminer la valeur de n dans cette expression et donc d'obtenir sa valeur « absolue », autrement dit, de savoir où placer la « virgule » (l'usage en assyriologie est en fait d'utiliser un point virgule pour séparer la partie entière de la partie sexagésimale).

Ce que nous pouvons faire est de récrire le poids total d'argent donné ligne 5 — 1 1/2 *mana* 3 1/2 *gín* moins 7 *še* — dans une notation sexagésimale de position, en adoptant provisoirement le *gín* comme unité de base. Puisque, par le diagramme ci-dessus :

$$1 \text{ mana} = 60 \text{ gín} = 1.00 \text{ gín}, \\ 1 \text{ še} = 1/(3 \times 60) \text{ gín} = 1/3 \times 1/60 \text{ gín} = 1/3 \times 0;01 \text{ gín} = 0;00.20 \text{ gín},$$

la conversion de la ligne 5 s'ensuit :

$$1 \frac{1}{2} \text{ mana} = 1 \frac{1}{2} \times 1.00 \text{ gín} = 1.30 \text{ gín} \\ 3 \frac{1}{2} \text{ gín} = 3 \frac{1}{2} \times 1 \text{ gín} = 3;30 \text{ gín} \\ 7 \text{ še} = 7 \times 0;00.20 \text{ gín} = 0;02.20 \text{ gín}.$$

La somme des deux premières équations moins la troisième fournit un résultat $1.33;30 - 0;02.20 = 1.33;27.40$. Celui-ci coïncide presque avec le calcul fait plus haut. La différence — 0;00.10 (0,003%) — peut être expliquée par le fait que le *še* étant la plus petite unité de poids disponible, la réponse exacte — 1 1/2 *mana* 3 1/2 *gín* moins 6 1/2 *še* — ne pourrait être exprimée sans fraction et a donc été probablement arrondie. Nous avons donc une interprétation immédiate de cette portion de tablette : le poids total d'argent indiqué dans les lignes 1 à 4, écrite en base soixante, avec une notation de position, a été additionné et traduit dans les unités métrologiques conventionnelles, ce qui est inscrit ligne 5.

Le problème de la valeur de n est ainsi résolu, au moins partiellement. Ou bien l'unité utilisée est le *gín*, $n = 2$ et le point virgule suit le 3 ou bien l'unité est le *mana* et, avec $n = 1$, le même calcul montre que le point virgule suit le 1. Seul

le *še* comme unité de base est exclu, comme on le voit à partir du diagramme.

Cette appellation de « système sexagésimal de position » est peut-être un peu déconcertant pour le lecteur ou la lectrice moderne. Nous avons l'habitude, dans notre système décimal de position, d'utiliser un symbole unique pour chacun des 10 chiffres. Les Mésopotamiens, ayant aplati la distinction de taille qui distinguait autrefois les traits verticaux du Système S les uns des autres, ont utilisé les 4 (avec valeur 10) et les 1 (avec valeur 1) pour composer les 59 (il n'y a pas de zéro) « chiffres » nécessaires pour un système sexagésimal.

Nous ne manquons pas non plus de tables à cette période; nous avons même les premiers représentants d'une classe importante de tables, celle des *inverses*.

Voici une partie d'un de ces textes¹² :

4 2	inverse	aucun
4 3	inverse	aucun
4 4	inverse	aucun
4 5	inverse	1 2 4
4 6	inverse	aucun
5 moins 3	inverse	aucun
5 moins 2	inverse	1 1 4 5
5 moins 1	inverse	aucun
5	inverse	1 1 4 2

Ist. T 7375

Les entrées à gauche de la tablette, écrites dans un système sexagésimal de position, vont de 2 1 à 1 1, c'est-à-dire de deux à soixante. Dans la dernière colonne figure soit un nombre, l'inverse correspondant, soit le mot *nu* (négarion en sumérien) qui indique qu'il n'y a pas d'inverse, c'est-à-dire pas d'inverse exprimable sous forme sexagésimale finie. Dans les tables d'inverses plus tardives, du II^e et I^{er} millénaire, les nombres sans inverse ne figurent plus.

L'existence d'une telle table implique probablement que la méthode classique de division babylonienne, la multiplication par l'inverse du diviseur, est déjà en place dès la période Ur III. Comme nous avons déjà eu des témoignages pour l'existence de l'addition, de la soustraction, de la multiplication et de l'extraction de racines (au moins carrées), il est clair que la panoplie complète des techniques arithmétiques mésopotamiennes était disponible à cette époque.

D'un autre point de vue, peut-être plus important, nos textes d'Ur III révèlent une différence majeure avec les textes précédents, qui les rapprochent des textes mathématiques qui seront utilisés en Mésopotamie jusqu'à la fin de cette civilisation. Les nombres sexagésimaux utilisés dans ces textes ne sont plus liés à un système métrologique. Les signes cunéiformes utilisés sont ceux du vieux Système S, mais ils sont libérés de leur attache exclusive à ce système : l'indépendance du nombre et de la mesure est complète.

V. ÉPOQUE PALÉOBABYLONIENNE (2000-1600)

Contrairement à ce que l'on dit souvent, l'histoire ne se répète pas : c'est d'Ouest, cette fois, que viennent les envahisseurs amorrites ! Après l'écroulement de l'empire d'Ur, les rivalités de cités-états et l'installation dans la plupart de dynasties d'origine amorrite qui adoptent le langage et les coutumes locales, émerge une cité d'importance moyenne, jusque là peu connue, Babylone. Elle atteindra l'apogée de sa puissance au début du dix-huitième siècle, sous le gouvernement de Hammurapi. Une fois de plus, celui-ci bénéficie d'un royaume étendu, fortement centralisé, avec de nombreux fonctionnaires spécialisés formés

¹² DELAPORTE 1912, n° 7375, r. IV:1-9. De Girsu (Tello).

par un système scolaire bien organisé.

Nous avons ainsi hérité d'une importante quantité de textes scolaires, en particulier mathématiques, qui témoignent de la maturation des connaissances progressivement apparues au cours des époques précédentes et permettent de fixer les traits caractéristiques des mathématiques mésopotamiennes classiques. Les quatre opérations arithmétiques de base sont l'addition, la soustraction, la multiplication et l'inversion, effectuées par consultation de tables qui forment l'un des deux grands groupes de textes disponibles. L'autre est constitué de textes de procédure. Ceux-ci sont des problèmes suivis de leur solution donnée sous la forme d'un algorithme **rhétorique** (c'est-à-dire sans symbolisme autre que les chiffres) et **numérique** (c'est-à-dire avec des valeurs particulières). Leur structure particulière peut être également décelée dans des textes de certains autres domaines, dessinant ainsi les limites et les traits caractéristiques de ce que j'ai appelé ailleurs les « pratiques rationnelles » : les disciplines concernées sont la **médecine**, la **divination** et la **jurisprudence**¹³. Nous voyons au passage à quel point les catégories modernes (par exemple, celle de « science », qui recouvre à la fois pour nous des comportements sociaux, des formes écrites particulières, des relations à l'expérimentation codifiées) sont mal adaptées à l'étude de l'Antiquité. Des liaisons formelles et professionnelles entre mathématiques et certaines de ces disciplines ont aussi été mises en évidence dans le cas de l'Égypte (médecine et divination) et de l'Italie de la Renaissance (jurisprudence)¹⁴.

Le point principal est de couvrir tout le domaine du possible par une **grille d'exemples typiques**, procédé qui permet à l'étudiant (et plus tard au scribe praticien) de placer dans ce cadre tout nouveau problème, et de le résoudre par comparaison avec des problèmes voisins. L'approche babylonienne de la généralisation n'était pas comme la nôtre de découvrir et d'énoncer une « règle » dans laquelle englober chaque cas, mais d'**interpoler** (par une méthode bien déterminée, elle aussi enseignée) à partir de modèles de résultats connus. Nous allons donner quelques exemples.

Le premier exemple est un **manuel de maître** : nous disposons en effet pour cette période d'une série de textes mathématiques dans lesquelles aucune solution algorithmique n'apparaît; il s'agit généralement d'une suite de problèmes (liés), souvent présentés sous une forme sommaire avec un usage presque exclusif de signes sumériens en guise d'abréviations. S'y ajoutent parfois, mais rarement, les réponses. Un exemple de ce type est l'extrait suivant¹⁵ :

- 9 La surface était un *eše*
 - 10 $\frac{2}{3}$ de la longueur et 5 *nindan*
 - 11 par un facteur j'ai multiplié :
 - 12 1 *iku* était la surface.
 - 13 La longueur excédait le facteur de 5.
 - 14 $\frac{1}{6}$ de (ce dont) la longueur excédait la largeur
 - 15 à la première longueur j'ai ajouté : 31 40.
-
- 16 j'ai doublé (et)
 - 17 à la première longueur j'ai ajouté : 33 20.
-
- 18 de la première longueur j'ai soustrait : 28 20.

YBC 4715

Les lignes dans la traduction correspondent aux lignes tracées sur la tablette elle-

¹³ Voir, par exemple, BOTTÉRO 1987 et RITTER 1990.

¹⁴ Voir G. CIFOLETTI, ces Actes.

¹⁵ Copie : NEUGEBAUER 1935-7, II pl. 60. Voir aussi THUREAU-DANGIN 1938, p.

190-194; NEUGEBAUER 1935-7, I p. 478-485.

même, séparant les parties de cette liste elliptique de problèmes, chacun partageant les données des lignes 9-14, mais différant précisément par un élément additionnel indiqué ligne 15, resp. 16-17, resp. (16+) 18... Autrement dit, il y a trois problèmes distincts ici, dont les énoncés correspondent respectivement aux lignes

9-14 + 15, 9-14 + 16-17, 9-14 + 16 + 18.

Nous disposons donc clairement d'une sorte de manuel du maître, contenant des exercices modèles du même type que ceux donnés aux étudiants, développement d'une longue tradition dont nous avons déjà rencontré un avatar paléoakkadien.

Les sujets abordés dans tous ces problèmes traitent de **mensuration** (hauteur, profondeur, etc.; surface; somme de surface et longueur; volume), de calcul des **paiements** (salaires et intérêt), de **charge de travail** des ouvriers, d'**héritage** et de divisions de biens, etc., de manière plus ou moins réaliste (de moins en moins à mesure du développement de ces problèmes).

Voici ensuite une **tablette d'élève** contenant un unique problème : sa présentation, l'utilisation de la langue akkadienne, les détails de l'algorithme de résolution et même le style de mathématiques « faussement appliquées » sont typiques des textes mathématiques paléobabyloniens¹⁶. Pour clarifier nous avons divisé le texte en étapes numérotées.

Un roseau j'ai pris. Sa mesure je ne connaissais pas. 1 coudée j'ai rompu, puis soixante par la longueur je suis allé. Ce que j'en avais rompu, je lui ai rajouté, puis 30 fois par la largeur je suis allé. 6 15 était la surface. Qu'est la (longueur) originaire du roseau ?
Toi, dans ton procédé :

- 1 Pose 1.00 et 30
- 2 Pour le roseau, que tu ne connais pas, pose 1
- 3a Par 1 les soixante fois que tu es allé tu multiplieras : 1.00 est la longueur fausse
- 3b Multiplie 30 par ce 1 : 30 est la largeur fausse
- 4 30, la largeur fausse, par 1.00, la longueur fausse, multiplie : 30.00 est la surface fausse
- 5 30.00 par 6.15, la surface vraie, multiplie : 3.07.30.00 il te donne
- 6 0;05, qui a été rompu, par la longueur fausse multiplie : 5 il te donne
- 7 5 par la largeur fausse multiplie : 2.30 il te donne
- 8 $\frac{1}{2}$ de 2.30 fractionne (:) 1.15
- 9 1.15 carre (:) 1.33.45
- 10 A 3.07.30.00 ajoute(-le :) 3.09.03.45
- 11 Qu'(en) est la racine carrée ? 13.45 est la racine carrée
- 12 1.15, que tu as carré, ajoutes-y : 15.00 il te donne
- 13 Trouve l'inverse de 30.00 (:) 0;00.02
- 14 0;00.02 par 15.00 multiplie : (0;30).

0;30 est la (longueur) originaire du roseau.

Str 368

Chaque étape comporte un calcul (effectué par recours à une table) à partir des données originelles du problème (D_1 , D_2 , D_3 , D_4 , cf. ci-dessous) et des résultats de calculs d'étapes précédentes.

Données $D_1 = 1$ coudée (= 0;05 *nindan*)
 $D_2 = 1.00$

¹⁶ Photo : NEUGEBAUER 1935-7, II pl. 13; copie : FRANK 1922, n° 11. D'Uruk (?). Voir aussi THUREAU-DANGIN 1938, p. 91-92; NEUGEBAUER 1935-7, I p. 311-314.

$$D_3 = 30$$

$$D_4 = 6.15$$

1	1.00		30
2			1
3	1 x 1.00 = 1.00		1 x 30 = 30
4	30 x 1.00 = 30.00		
5	30.00 x 6.15 = 3.07.30.00		
6	0;05 x 1.00 = 5		
7	5 x 30 = 2.30		
8	1/2 (2.30) = 1.15		
9	(1.15) ² = 1.33.45		
10	3.07.30.00 + 1.33.45 = 3.09.03.45		
11	$\sqrt{3.09.03.45} = 13.45$		
12	1.15 + 13.45 = 15.00		
13	$(30.00)^{-1} = 0;00.02$		
14	0;00.02 x 15.00 = 0;30		

Depuis le travail pionnier de Otto Neugebauer dans les années 1930, il est fréquent de lire les anciens textes mathématiques à la lumière de l'algèbre élémentaire; on suppose, implicitement ou non, que la manière « réelle » d'obtenir les résultats ou de les transmettre était d'assigner des valeurs symboliques abstraites aux données d'un problème et d'arriver à la solution en résolvant des équations plus ou moins complexes. Les Anciens auraient alors, pour des raisons que les analystes de cette école n'éclaircissent guère, déguisé leur activité mathématique et ne l'auraient rendue publique que sous l'aspect d'algorithmes numériques (pour les Babyloniens et les Égyptiens) ou de théorèmes géométriques généraux (pour les Grecs). Dans cette façon de voir les choses, le problème ci-dessus consisterait en fait à poser et résoudre une équation du second degré :

Soit L = longueur du roseau

a = longueur ôtée

n = nombre de fois que le roseau brisé mesure la longueur du

champ.

m = nombre de fois que le roseau entier mesure la largeur du

champ.

S = surface du champ

alors

$$n(L - a) = x$$

$$mL = y$$

$$xy = S$$

$$S = xy = n(L - a) \cdot mL = nmL^2 - nmaL$$

$$\Rightarrow L = \frac{1}{nm} \left[\sqrt{nmS + \left[\frac{1}{2} anm \right]^2} + \frac{1}{2} anm \right]$$

Plus précisément, la méthode est celle de « fausse position ». Ayant choisi une valeur arbitraire — mais simple, toujours, d'ailleurs, 1 — pour la longueur originaire du roseau, on calcule la surface du champ et puis on corrige par rapport à la valeur réelle donnée de cette surface. Il s'agit de trouver le « facteur de correction » c tel que, ayant choisi une longueur « fausse » arbitraire L' , avec $L = cL'$, l'équation à résoudre devient

$$(nmaL'^2)c^2 - (nmaL')c = S.$$

Mais il y a un problème avec une telle interprétation. Les étapes 6–7 de l'algorithme, qui donneraient le terme « linéaire de l'équation », seraient en fait incorrects puisqu'il s'agit là du calcul de $anL' \cdot mL' = nma(L')^2$, plutôt que de $nmaL'$. Puisque, comme toujours, $L' = 1$, on n'est pas induit en erreur du point de vue numérique. L'écriture correcte du terme linéaire du point de vue algébrique aurait nécessité le maniement du concept de coefficient (multiplier la longueur rompue par la longueur fausse du champ et puis par le coefficient de la largeur fausse du champ), quelque chose d'évident symboliquement mais qui n'a aucun sens sans cet appareil et n'a pas d'équivalent algorithmique.

D'autre part, si la réinterprétation algébrique nous paraît naturelle, parce que nous sommes extrêmement habitués à son usage¹⁷, elle n'est pas la seule imaginable. On peut par exemple être tenté de prendre au sérieux le vocabulaire employé — tous ces problèmes font usage d'un vocabulaire géométrique, longueur, surface, etc. — et de réécrire le problème comme un exemple d'« application des aires » dans lequel les différentes étapes représenteraient les transformations géométriques (changement d'échelles, complétion du carré, etc.) qui servent à transformer le rectangle original en un carré de surface connu dont le côté peut alors être calculé par une extraction de racine carrée¹⁸.

Nous préconisons pour notre part la solution la plus simple, qui consiste à prendre au sérieux tout le texte. Les Babyloniens écrivaient leurs solutions sous une forme algorithmique, parce que c'est ainsi qu'ils travaillaient. Il n'y a aucune raison de croire que, s'ils avaient possédé des techniques comme l'algèbre symbolique ou des théorèmes de type euclidien sur les aires, il n'y en aurait aucune trace explicite dans les textes : les mathématiques n'étaient nullement comme on le lit encore parfois un sujet ésotérique — en tout cas, pas plus qu'aujourd'hui ! — à cacher soigneusement des yeux profanes; elles étaient au contraire enseignées, comme une des disciplines majeures du curriculum, à chaque écolier (ce qui ne l'empêchait pas de se plaindre, alors comme maintenant, de leur difficulté).

Une telle approche n'est nullement synonyme de « recettes » au coup par coup. Avec l'avance des études algorithmiques modernes, nous avons commencé à comprendre à quel point les algorithmes pouvaient être des objets mathématiques complexes et généraux. L'interprétation algorithmique des textes babyloniens a plusieurs mérites : d'une part, elle en épouse la forme réelle, d'autre part, elle permet aussi de comprendre et d'apprécier dans quelles directions se fait le développement des mathématiques — son évolution met en évidence une complexité croissante des structures algorithmiques employées (immersion d'une procédure dans une autre, boucles, etc.)¹⁹.

Quant à l'autre grande catégorie de textes, les *tables*, elles se diversifient également : à côté des tables usuelles de multiplication, d'inverses, de racines carrées et cubiques, dont les domaines s'étendent de plus en plus, on trouve également des tables de conversions métrologiques et des tables d'*iggigubû* comme ci-dessous, c'est-à-dire de constantes utilisées dans différentes procédures standard : ainsi l'*iggigubûm* du cercle, 5, intervient dans le calcul de sa surface (la valeur $\pi \approx 3$ que certains veulent à tout prix détecter dans les calculs sur le cercle en Mésopotamie ne correspond donc pas à une quantité réellement mise en valeur par les Mésopotamiens eux-mêmes²⁰).

¹⁷ Il n'est pas inutile de rappeler une fois de plus que l'algèbre dite « élémentaire » ne l'a pas été avant le XVIII^e siècle, de notre ère cette fois-ci !

¹⁸ C'est l'approche adoptée dans HØYRUP 1991.

¹⁹ Voir RITTER 1989.

5	iggigubûm	du cercle
7 30	iggigubûm	du sakkakum
2 13 20	iggigubûm	du panier
1 40	iggigubûm	d'une charge de terre
4 30	iggigubûm	d'une charge de briques
7 12	iggigubûm	d'un tas de briques
6	iggigubûm	du mur
5	iggigubûm	des briques
6	iggigubûm	de ma mesure de grain

IM 49949

CONCLUSION

Bien entendu, l'histoire ne s'arrête pas ici. Bien que la plupart des aspects formels des mathématiques babyloniennes — le concept de nombres abstraits, le système de position sexagésimal, les opérations arithmétiques de base, la séparation des textes en tables et problèmes, la nature des procédures de résolution — soient déjà en place pendant cette période paléobabylonienne, l'extension constante et le raffinement des méthodes et des grilles d'exemples traités témoignent de la vitalité des mathématiques mésopotamiennes et de l'activité de ses praticiens jusqu'aux premiers siècles de notre ère. Une sorte de renaissance eut même lieu pendant la période séleucide (4^e au 1^{er} siècle avant notre ère), lorsque la pratique rationnelle nouvelle de l'astrologie numérique réclama des outils mathématiques appropriés et plus performants, tout comme à l'époque moderne, les interactions entre les mathématiques et d'autres disciplines, la physique ou l'informatique, ont fécondé chaque discipline impliquée.

Ceci étant, même si le champ couvert par ce survol n'épuise pas, tant s'en faut, la totalité des connaissances et des pratiques mathématiques de la Mésopotamie antique, nous avons vu au cours du millénaire et demi étudié des développements spectaculaires s'effectuer. Le lent dégagement du nombre, de l'écriture des objets, puis des systèmes métrologiques, est bien sûr un point crucial. Mais d'autres aspects, moins techniques, peuvent aussi retenir l'attention : ainsi, la place importante des mathématiques dans le système scolaire, deux mille ans avant notre ère.

REFERENCES

*Les textes de synthèse les plus accessibles en français sont signalés par un *.*

ADAMS (Robert McC.) & NISSEN (Hans)
1972 *The Uruk Countryside. The Natural Setting of Urban Societies*, University of Chicago Press, Chicago

BENOIT (Paul), CHEMLA (Karine) & RITTER (Jim)
***1991** *Histoire de fractions, fractions d'histoire*, Birkhäuser, Bâle/Boston/Berlin

BOTTÉRO (Jean)
***1987** *Mésopotamie. L'écriture, la raison et les dieux*, Gallimard, Paris

²⁰ Voir GOLDSTEIN 1989 et RITTER 1989.

BURROWS (Eric)

1935 *Archaic Texts* (Ur Excavation Texts 2), British Museum / University of Philadelphia, Londres

DEIMEL (Anton)

1922-4 *Die Inschriften von Fara. I. Liste der archaischen Keilschriftzeichen. II. Schultexte aus Fara. III. Wirtschaftstexte aus Fara* (Wissenschaftliche Veröffentlichung der Deutschen Orient-Gesellschaft 40/43/45, 3 vols.), J. C. Hinrich's, Leipzig

DELAPORTE (Louis)

1912 *Inventaire des tablettes de Tello conservées au Musée Impérial Ottoman IV. Textes de l'époque d'Ur*, Geuthner, Paris

EDZARD (Dietz Otto)

1969 "Eine altsumerische Rechentafel (OIP 14, 70)" in M. DIETRICH & W. RÖLLIG (éds.), *lišān mithurti. Festschrift Wolfram Freiherr von Soden...* (Alter Orient und Altes Testament 1), Verlag Butzon & Bercker Kevelaer, Neukirchener Verlag, Neukirchen-Vluyn, p. 101-104

EDZARD (Dietz Otto), FARBER (Gertrud) & SOLLBERGER (Edmond)

1977 *Répertoire Géographique des Textes Cunéiformes I. Die Orts- und Gewässernamen der prä-sargonischen und sargonischen Zeit* (Beihefte zum Tübinger Atlas des Vorderen Orients, B 7/1), Ludwig Reichert, Wiesbaden

FRANK (Carl)

1928 *Straßburger Keilschrifttexte in sumerischer und babylonischer Sprache* (Schriften der Straßburger Wissenschaftlichen Gesellschaft in Heidelberg, NF 9), Walter de Gruyter, Berlin/Leipzig

GELB (Ignace)

1970 *Sargonic Texts in the Ashmolean Museum, Oxford* (Materials for the Assyrian Dictionary 5), University of Chicago Press, Chicago

GOLDSTEIN (Catherine)

***1989** "L'un est l'autre : pour une histoire du cercle" in Michel SERRES (éd.), *Éléments d'histoire des sciences*, Bordas, Paris, p. 129-149

GREEN (Margaret) & NISSEN (Hans) [with the collaboration of P. DAMEROW and R. ENGLUND]

1987 *Zeichenlist der archaischen Texte aus Uruk* (Archaische Texte aus Uruk 2), Gebräuder Mann, Berlin

HØYRUP (Jens)

1982 "Investigations of an Early Sumerian Division Problem", *Historia Mathematica* 9, p. 19-36

1990 "Algebra and Naive Geometry, An Investigation of Some Basic Aspects of Old Babylonian Mathematical Thought", *Altorientalische Forschungen* 17, p. 27-69; 262-354

HUOT (Jean-Louis)

***1989** *Les Sumériens. Entre le Tigre et l'Euphrate*, Éditions Errance, Paris

JESTIN (Raymond)

- 1937** *Tablettes sumériennes de Suruppak conservées au Musée de Stamboul* (Mémoires de l'Institut français d'archéologie de Stamboul 3), E. de Boccard, Paris

KEISER (Clarence)

- 1919** *Selected Temple Documents of the Ur Dynasty* (Yale Oriental Studies 4), Yale University Press, New Haven

LE BRUN (A.) & VALLAT (François)

- *1978** "L'origine de l'écriture à Suse", *Cahiers de la Délégation archéologique française en Iran* 8, p. 11-59

LIMET (Henri)

- 1973** *Études des documents de la période d'Agadé* (Bibliothèque de la Faculté de Philosophie et Lettres de l'Université de Liège 206), Les Belles Lettres, Paris

LUCKENBILL (Daniel)

- 1930** *Inscriptions from Adab* (Oriental Institute Publications 14), University of Chicago Press, Chicago

MEEK (Theophile)

- 1935** *Excavations at Nuzi III. Old Akkadian, Sumerian and Cappadocian Tablets from Nuzi* (Harvard Semitic Series 10), Harvard University Press, Cambridge [USA]

NEUGEBAUER (Otto)

- 1935-7** *Mathematische Keilschrift-Texte* (3 vols.), Springer-Verlag, Berlin [réimpression : 1973]

NISSSEN (Hans)

- 1985** "The Emergence of Writing in the Ancient Near East", *Interdisciplinary Science Reviews* 10, p. 349-361
1988 *The Early History of the Ancient Near East. 9000-2000 B.C.*, University of Chicago Press, Chicago

NISSSEN (Hans), DAMEROW (Peter) & ENGLUND (Robert)

- 1990** *Frühe Schrift und Techniken der Wirtschaftsverwaltung im alten Vorderen Orient*, Verlag Franzbecker, Berlin

POWELL (Marvin A.)

- 1975** Book review of LIMET 1973 in *Journal of Cuneiform Studies* 27, p. 180-188
1976 "The Antecedents of Old Babylonian Place Notation and the Early History of Babylonian Mathematics", *Historia Mathematica* 3, p. 417-439

RITTER (James)

- *1989** "Chacun sa vérité : les mathématiques en Égypte et en Mésopotamie" in Michel SERRES (éd.), *Éléments d'histoire des sciences*, Bordas, Paris, p. 39-61
***1990** "Les pratiques de la raison en Mésopotamie" in Jean-François MATTÉI (éd.), *La naissance de la raison en Grèce*, PUF, Paris, p. 99-110

SCHMANDT-BESSERAT (Denise)

- 1977** *An Archaic Recording System and the Origin of Writing* (Syro-Mesopotamian Studies I/2), Undena Publications, Malibu [CA, USA]
***1978** "Les plus anciens précurseurs de l'écriture", *Pour la science* 10, p. 12-22

THUREAU-DANGIN (François)

- 1938** *Textes mathématiques babyloniens*, E. J. Brill, Leyde

WHITING (Robert M.)

- 1983** "More Evidence for Sexagesimal Calculations in the Third Millenium B.C.", *Zeitschrift für Assyriologie und vorderasiatische Archäologie* 74, p. 59-66