BIBLIOGRAPHIE

ARCHIMEDE — *Oeuvres* tome 1. trad. MUGLER,C
Les Belles Lettres Paris 1970

CAVEING M. — *La Constitution du type mathématique de l'idéalité dans la pensée grecque*
Thèse d'Etat Paris X 1977
Réimp. Presses de l'Université de Lille III 1982

CHACE A. — *The Rhind mathematical papyrus*
Oberlin Ohio 1927 - 1929
Réimp. abrégée The National Council of Teachers of Mathematics Reston 1979

CHAMPOLLION Le Jeune — *Lettre à M. Dacier*
Firmin Didot Paris 1822

COUCHOUD S. — *Recherches sur les connaissances mathématiques de l'Egypte pharaonique*
Thèse 3è cycle Lyon II 1983

GILLINGS R. — *Mathematics in the time of the Pharaohs*
reed. Dover New York 1982

GUILLEMOT M. — A propos de la "géométrie égyptienne des figures" *Actes du Colloque "La Géomérie des figures à travers les âges"* Oran 1-2-3 juillet 1989

GUILLEMOT M. — Brochure d'accompagnement au film vidéo *"Les Comptes de Bastet"*
Toulouse IREM 1990

HERODOTE, THUCYDIDE — *Oeuvres complètes* trad. BARQUET
La Pleiade Paris 1964 (II, 109, P 183)

PEET T.E. — *The Rhind mathematical papyrus*
Hodder and Soughton London 1923
réimp. Leiden 1977

VOGEL K. — *Vorgrieschische Mathematik* I
Hermann Schroedel Hannover 1958

Numéro spécial Π — Supplément au Petit Archimède n°64-65
1980

UN MEMOIRE D'ALEXIS-CLAUDE CLAIRAUT (1713-1765) :

"SUR LES COURBES QUE L'ON FORME EN COUPANT UNE SURFACE COURBE QUELCONQUE, PAR UN PLAN DONNÉ DE POSITION", ET SUR L'OMBRAGEMENT DES COURBES DU TROISIÈME ORDRE

(in *Mémoires de l'Académie Royale des Sciences*, 1731).

Jean-Pierre LE GOFF — IREM de Basse-Normandie

En 1704[1], Newton fait paraître en anglais un ouvrage bien connu sous le titre : *Opticks*[2]. Il est suivi de deux traités en latin, l'*Enumeratio Linearum tertii ordinis*, et le *Tractatus de Quadratura Curvarum*, qui ont sans doute été rédigés entre 1660 et 1676. Le premier de ces deux textes, le seul qui nous intéresse ici, est programmatique : il s'agit de classer les courbes du troisième ordre, l'ordre étant défini comme *le nombre de dimensions de l'équation entre les ordonnées et les abscisses*, ou encore comme le nombre maximal de points d'intersections de la courbe avec une droite[3].

Newton y donne les grandes lignes d'une marche à suivre pour effectuer cette classification, sans démonstration le plus souvent : tout d'abord il ramène l'équation générale à quatre équations particulières, suivant des considérations géométriques analogues à celles qui président à l'étude des coniques : en particulier l'usage, comme axe de coordonnées, d'un diamètre, défini comme lieu des centres de gravité des points d'intersection de la courbe avec toutes les transversales d'une direction donnée.

Voici ces quatre équations :

(i) $xy^2 + ey = ax^3 + bx^2 + cx + d$
(ii) $xy = ax^3 + bx^2 + cx + d$

---

1 Le texte qui suit, rédigé pour les besoins et comme trace d'un exposé à l'Université d'été de Lille (7-13 juillet 1990), est un prolongement des travaux entrepris depuis quelques années par Denis Lanier et l'auteur du présent article, sur *L'héritage arguésien*. On en trouvera les traces écrites dans *Scholies*, Actes du Séminaire Interdisciplinaire d'Histoire des Sciences du Lycée Malherbe de Caen, numéros 7 & 8 (*L'héritage arguésien*), 9 & 11 (*La perspective dans les pays anglo-saxons*), de février, juin & octobre 1989 & juin 1990 ; dans les *Cahiers de la Perspective* de l'IREM de Basse-Normandie, n° 5, juin 1991 ; ainsi que dans les *Cahiers d'Histoire et de Philosophie des Sciences*, Actes des colloques de Lille et Paris organisés en 1989 par le Séminaire d'*Histoire, Théorie et Pratique de la Perspective*, à paraître. Les mémoires de Clairaut et de Nicole sur les courbes du troisième ordre seront publiés en fac-similé avec introduction et commentaire critique dans la série *Analectes*, IREM de B.-N.

2 *Opticks : or, a Treatise of the Reflexions, Refractions, Inflexions and Colours of Light. Also Two Treatises of the Species and Magnitude of Curvilinear Figures.* London, Printed for Sam. Smith, and Benj. Walford, Printers to the Royal Society, at the *Prince's Arms* in St. *Paul* 's Church-yard. MDCCIV. L'ouvrage connaîtra une seconde édition, latine pour l'optique comme pour les deux traités à la suite, en 1705. L'*Enumeratio* donnera lieu à une réédition par D. Jones, en 1711, dans laquelle.l'ordre et la numérotation des espèces de Newton sont quelque peu modifiés.

3 Il s'agit donc des courbes du troisième dégré, dont l'équation générale peut s'écrire :

$$Ax^3 + Bx^2y + Cxy^2 + Dy^3 + Ex^2 + Fxy + Gy^2 + Hx + Iy + J = 0,$$

ce qui peut s'écrire encore, en privilégiant y :

$$Dy^3 + y^2(Cx + G) + y(Bx^2 + Fx + I) + Ax^3 + Ex^2 + Hx + J = O,$$

et se ramène, moyennant diverses mutations algébriques traduisant des transformations géométriques simples, et suivant la nature des branches infinies de la courbe, étudiée par intersection d'une transversale variable, aux quatre genres définis et analysés par Newton.

(iii) $y^2 = ax^3 + bx^2 + cx + d$

(iv) $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$;

Puis il dresse une typologie selon les critères qu'il a définis pour sa classification : genre et nombre des branches infinies, situation des branches asymptotiques relativement aux asymptotes ou concavité des branches paraboliques, puis nombre et nature des intersections avec l'axe des abscisses[4]. Il aboutit ainsi à 72 espèces dont il donne les figures caractéristiques[5] : (i) fournit 65 espèces, (ii) est fonctionnelle et donne une courbe connue sous le nom de trident, (iii) conduit aux cinq courbes que Newton appelle les paraboles divergentes, et (iv) est l'équation de la parabole dite cubique ou wallisienne (Fig. 1). En 1717, James Stirling[6] rédige un ouvrage sur le même sujet, reprenant le travail de Newton en l'étendant et en le complétant[7] : il y ajoute en particulier quatre espèces ; en 1740, c'est au tour de l'abbé Jean-Paul de Gua de Malves[8] de donner deux espèces supplémentaires à la classification de Newton, dans un ouvrage où il applique l'analyse cartésienne à la reconnaissance des points singuliers et des branches infinies des courbes du troisième ordre[9] ; ce qui porte à 78 les espèces recensées par la méthode newtonnienne[10].

4 Faisant y = 0 dans l'une quelconque des équations réduites, on obtient une équation du troisième degré en x qui a, soit trois solutions réelles distinctes, soit une double et une simple (avec deux ordonnancements possibles), soit une triple, soit une seule solution réelle simple.

5 Cf. *L'héritage arguésien*, op. cit.

6 1696-1770.

7 James Stirling : *Linæ Tertii Ordinis Neutonianæ, sive Illustratio Tractatus Domini Neutoni De Enumeratione Curvarum Tertii Ordinis. Cui Subjungitur, Solutio Trium Problematum.* Authore Jacobo Striling, è Coll. Ball. Oxon. Oxoniæ, E Theatro Sheldoniano, Impensis Eduardi Whistler, Bibliopolæ Oxoniensis, MDCCXVII.

8 1712-1785. Cf. *L'héritage arguésien*, op. cit.

9 L'abbé Jean-Paul de Gua de Malves : *Usage de l'analyse de Descartes pour découvrir sans le secours du calcul différentiel, les propriétés, ou affections principales des lignes géométriques de tous les ordres*, Paris, 1740.

10 D'après Whiteside, Newton aurait eu connaissance des six manquantes dès 1660. Il apparaît néanmoins qu'il ne s'est pas ému de publier un traité, sur ce point défectueux, 44 ans plus tard. Il faut noter enfin que le nombre de 78 espèces est celui obtenu selon les critères de la méthode newtonienne, mais que Julius Plücker établira une typologie de 219 espèces, dans son ouvrage intitulé : *System der analytischen Geometrie*, Berlin, 1835.

[Fig. 1]

Fig. 1a : Le trident (ii). Fig. 1b à 1f : les cinq paraboles divergentes (iii). Fig. 1g : la parabole cubique ou wallisienne (iv). Fig 1h : une courbe du type (i).

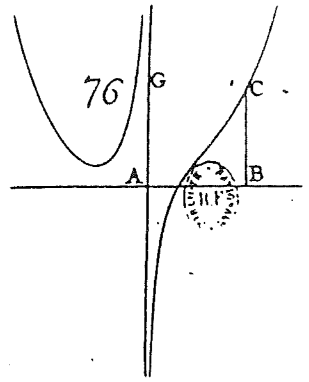


Fig. 1a

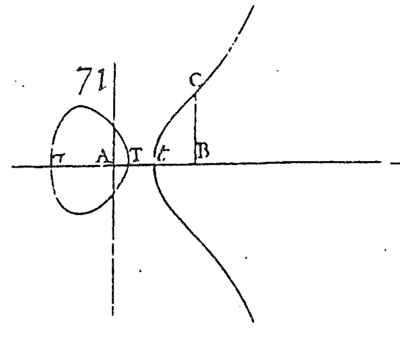


Fig. 1b

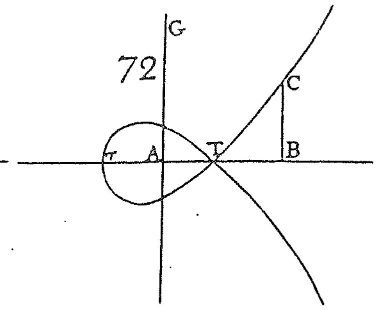


Fig. 1c

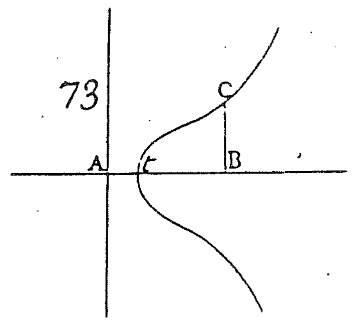


Fig. 1d

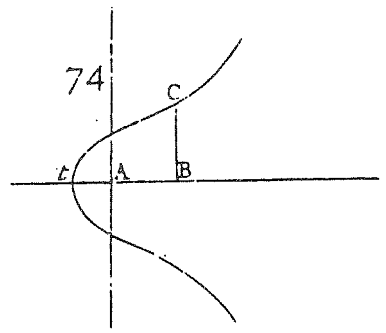


Fig. 1e

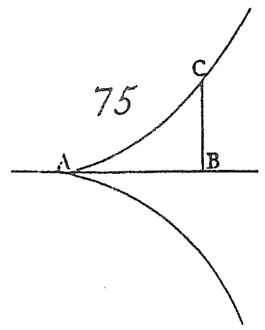


Fig. 1f

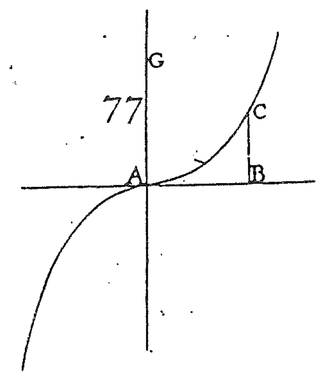


Fig. 1g

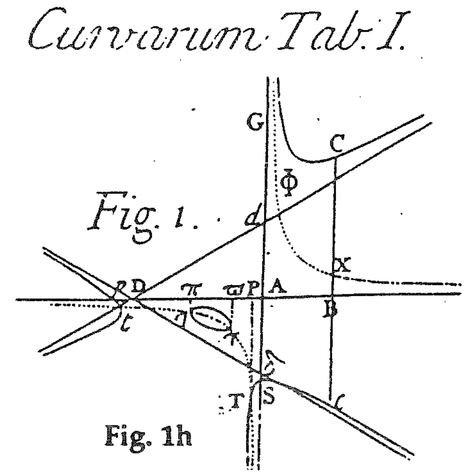


Fig. 1h

L'énumération de Newton comporte une proposition XXIX (p. 157 de l'édition de 1704) intitulée : *Genesis Curvarum per Umbras*, qui devait faire couler beaucoup d'encre ; en voici l'énoncé[11] :

> *"Si l'on projette à partir d'un point lumineux sur un plan infini les ombres de figures illuminées, les ombres des sections coniques seront toujours des sections coniques, celles des courbes du second genre seront toujours des courbes du second genre*[12]*, celles des courbes du troisième genre seront toujours des courbes du troisième genre, et ainsi de suite à l'infini. Et de la même façon que le cercle projetant son ombre engendre toutes les sections coniques, ainsi les ombres des cinq paraboles divergentes engendrent et exhibent toutes les autres courbes du second genre, et de même certaines courbes simples des autres genres peuvent être inventées, qui formeront toutes les autres courbes d'un même genre par leurs ombres portées dans un plan depuis un point lumineux."*

Ce texte énigmatique, livré sans aucune explication, sans démonstration, sans même un exemple de correspondance entre une courbe du troisième ordre et son ombre (le cas des coniques étant peut-être exemplaire dans l'esprit de Newton), devait susciter de nombreuses tentatives d'élucidation : l'abbé de Gua de Malves en donnera une qu'il insèrera dans son traité[9] et qui dérive de son explicitation analytique et géométrique de la classification de Newton ; Patrick Murdoch[13] écrira un traité de la génération des courbes par perspective[14] très inspiré des conceptions pré-projectives de Brook Taylor[15] : il y décrit la génération des coniques, à titre d'illustration, puis reprend la classification des courbes du troisième ordre de Newton, dans les termes indiqués dans la proposition XXIX de l'*Enumeratio* : il met en évidence que chacun des 72 types de cubiques peut être obtenu comme ombre portée au flambeau de l'une des cinq paraboles divergentes, par des considérations géométriques sur le devenir des points doubles et des éléments à l'infini dans diverses situations de la source lumineuse ponctuelle. Il apparaît donc que Newton a

11 Il s'agit de notre traduction du latin du paragraphe suivant : *Si in planum infinitum a puncto lucido illuminatum umbræ figurarum projiciantur, umbræ sectionum Conicarum semper erunt sectiones Conicæ, eæ Curvarum secundi generis semper erunt Curvæ secundi generis, eæ curvarum tertii generis semper erunt Curvæ tertii generis, & sic deinceps in infinitum. Et quemadmodum Circulus umbram projiciendo generat sectiones omnes conicas, sic Parabolæ quinq ; divergentes umbris suis generant & exhibent alias omnes secundi generis curvas, & sic Curvæ quædam simpliciores aliorum generum inveniri possunt quæ alias omnes eorundem generum curvas umbris suis a puncto lucido in planum projectis formabunt.*

12 La notion de genre est reprise ici de celle de Descartes : le genre est défini par le nombre de lignes droites qui interviennent dans le problème géométrique posé et qualifie le type des courbes auxquelles il faut recourir pour le résoudre. Ainsi, le premier genre inclut "nos" premier et second degrés, le second genre inclut le troisième degré, etc... En revanche, ce que Newton et ses épigones appellent ordre, est le degré de l'équation qui définit la courbe : les courbes du troisième ordre sont "nos" cubiques. De ce point de vue, on peut dire, au risque d'être un peu réducteur, que Descartes a répertorié des problèmes de géométrie, tandis que Newton a classé des courbes, adoptant un point de vue plus algébrique que proprement analytique, au sens où le premier ferait de l'analyse algébrique pour résoudre des problèmes de géométrie, et le second de l'algèbre analytique pour étudier les courbes de façon systématique.

13 ?-1774. Cf. *La perspective dans les pays anglo-saxons*, J.-P. Le Goff, in *Scholies*, Actes du Séminaire Interdisciplinaire d'Histoire des Sciences du Lycée Malherbe de Caen, n^{os} 9 et 10, octobre 89 et février 90, et in les *Cahiers de la perspective*, revue apériodique de l'IREM de B.-N., n°5, juin 1991.

14 *Neutoni Genesis Curvarum per Umbras, seu Perspectivæ Universalis Elementa ; Exemplis Coni Sectionum et Linearum Tertii Ordinis illustrata*, Londres 1746.

15 Taylor (1685-1731) est l'auteur de deux traités de perspective dans lesquels la théorie perspective se libère des aspects métriques (distance et orthogonalité) qu'impliquent ses origines optico-géométriques. Sur Taylor et Murdoch, voir : *La perspective dans les pays anglo-saxons*, op. cit.

su adapter les conceptions projectives que le géomètre lyonnais Girard Desargues[16] appliquait aux coniques ; ce faisant, l'illustre savant anglais se reconnaissait implicitement comme l'héritier de la vision arguésienne, plus encore peut-être que les épigones de langue française de Desargues, qui reprirent simplement la théorie des coniques conçues comme perspectives du cercle ou développèrent les notions de pôles et de polaires : Philippe de La Hire[17] et Jacques-François Lepoivre[18].

Avant l'abbé de Gua de Malves et Patrick Murdoch, deux mathématiciens français s'attaquèrent à l'élucidation du passage de l'*Enumeratio* touchant à l'*ombragement* des courbes[19], et en proposèrent chacun une explicitation originale : ce sont François Nicole[20], qui fit une première communication à l'Académie Royale des Sciences sur ce sujet le 1er décembre 1731, et Alexis-Claude Clairaut[21], qui exposa sa propre solution le 12 du même mois : c'est sans doute la prestation de Nicole qui provoqua l'intervention de Clairaut. Néanmoins, ces solutions furent insérées à la suite l'une de l'autre, en ordre chronologique inverse, dans les *Mémoires de l'Académie Royale des Sciences* pour l'année 1731, parus en 1733 : la solution de Clairaut a le mérite - nous semble-t-il - de la clarté et de la concision, ce qui peut expliquer ce choix éditorial.

C'est le mémoire de Clairaut que nous nous proposons de lire et de commenter, car il est une bonne illustration de ce que l'application de la géométrie analytique aux problèmes de l'espace pouvait apporter dès le début du XVIIIème siècle pour la compréhension de la géométrie du solide et pour la mise en évidence de propriétés géométriques qui seront à la base du renouveau de la géométrie synthétique au XIXème siècle.

Car il se trouve que Clairaut est aussi l'auteur d'un ouvrage de première importance pour le développement de la géométrie analytique : il s'agit de ses *Recherches sur les Courbes à double Courbure*, parues en 1731. Sans entrer dans le détail de cet ouvrage, notons seulement que Clairaut y définit les surfaces par une équation du type [$f(x,y,z) = 0$], les surfaces cylindriques élevées au-dessus d'une courbe plane située dans un plan de coordonnées, par une équation à deux variables (du type [$f(x,y) = 0$], par exemple, dans le cas d'une courbe plane du plan xOy), qui est l'équation de la courbe de base dans son plan, et les courbes gauches (qu'il appelle à double courbure dès lors qu'elles ne sont pas descriptibles dans un plan), par deux équations de surfaces cylindriques s'appuyant sur deux projections orthogonales de la courbe gauche obtenues dans deux des trois plans de coordonnées. Ce faisant, il systématise l'emploi des coordonnées spatiales, jusque là peu usitées et dont l'intérêt n'avait été perçu que d'un petit nombre : René Descartes lui-même, Pierre de Fermat, Philippe de La Hire, Antoine Parent, Jean Bernouilli et Henri Pitot[22] ; mais encore, il confère une formulation analytique au procédé graphique dit de double projection (ichnographie et orthographie, ou plan et profil), qui était connue des architectes depuis Vitruve, qui est à la base de l'invention de la perspective linéaire et des procédés de la stéréotomie (ou coupe des pierres), et qui conduira, de pratique en théorie, des procédés graphiques de la stéréotomie (ou coupe des pierres) à la géométrie descriptive de Monge[23].

La virtuosité de Clairaut en matière de géométrie analytique est très sensible dans ce mémoire sur les sections planes des surfaces, et singulièrement des cônes du troisième ordre : il y manifeste une grande compréhension des rapports existant entre le genre d'une surface et son expression analytique, comme nous le verrons en relisant ce texte qui nous apparaît d'une extrême limpidité et d'une grande qualité pédagogique.

16 1591-1661. Cf. *L'héritage arguésien*, op. cit.

17 1640-1718. Cf. *L'héritage arguésien*, op. cit.

18 ?-1710. Cf. *L'héritage arguésien*, op. cit.

19 Nous reprenons ici le terme qu'Albert Girard avait utilisé pour traduire, en 1634, le terme grec latinisé de *skiagraphia*, dont Simon Stevin use pour nommer la perspective en 1605.

20 1683-1758.

21 1713-1765.

22 On pourra consulter à ce sujet : *L'œuvre scientifique de Gaspard Monge*, de R. Taton, Paris, 1951, pp. 101 à 147.

23 Gaspard Monge : 1746-1818.

En voici le plan général (nous suivons Clairaut, qui a numéroté les articles successifs de son mémoire en chiffres romains), et quelques extraits parmi les plus significatifs[24] :

I°) le problème est posé dans la forme générale qu'induit le titre du mémoire : une surface courbe étant donnée par son équation dans trois axes de coordonnées[25], quelle est la nature de la courbe intersection de cette surface et d'un plan quelconque donné de position ? Dans la figure première de l'unique planche (Fig. 2), le plan donné (VLN) est déterminé par la distance AB, abscisse à l'origine de sa trace (VLB) dans le plan géométral (PAQ), par l'angle (VBT) de cette trace avec l'un des axes (AQ) du repère (AP, AQ, AR), et par l'angle (NLM) du dièdre (VLN,PAQ) d'arête (VLB). L'ouverture de l'angle (VBT) est exprimée par le rapport de BT à VT, donné par le rapport $\frac{m}{n}$, et celle de l'angle (NLM) par le rapport $\frac{p}{q}$; la distance AB est notée "g".

N étant un point de l'intersection cherchée, sa cote "z" est NM, son ordonnée "y" est PM, et son abscisse "x" est AP dans le repère de l'espace ; mais pour caractériser la courbe d'intersection, une fois tirée la perpendiculaire (NL) à (VB), N est repéré dans le plan de coupe (VLN) par des coordonnées rectangulaires : l'abscisse "u", qui est BL, et l'ordonnée "s", qui est LN. Dès lors, par quelques calculs élémentaires, on aura le système de substitution (A, B, C) :

$$\mathcal{A} : z = \frac{qs}{\sqrt{p^2 + q^2}};$$

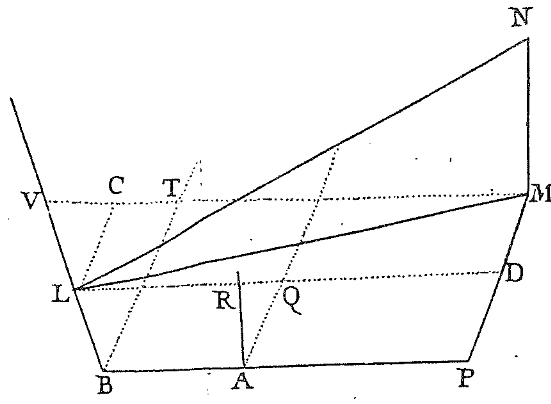
$$\mathcal{B} : y = \frac{nps}{\sqrt{p^2 + q^2}.\sqrt{m^2 + n^2}} + \frac{mu}{\sqrt{m^2 + n^2}};$$

$$\text{et } \mathcal{C} : x = \frac{mps}{\sqrt{p^2 + q^2}.\sqrt{m^2 + n^2}} - \frac{nu}{\sqrt{m^2 + n^2}} - g.$$

24 Dans ces extraits, cités en italiques, nous respectons l'orthographe et la ponctuation, sauf pour les terminaisons "oit" des imparfaits et conditionnels.

25 Qu'une surface ait une équation à trois variables, c'est ce que Clairaut s'est attaché à montrer dans ses *Recherches sur les Courbes à double Courbure* de 1731.

[Fig. 2]



Il ne restera plus qu'à reporter ces "fonctions de u" et "de s" dans l'équation "en x,y,z" de la surface [$f(x,y,z) = 0$] pour obtenir l'équation [$g(u,s) = 0$] de la courbe d'intersection, dans le plan sécant rapporté au repère orthogonal (uBs), l'axe Bu étant le support de (BV) et l'axe Bs étant parallèle à (LN).

II°) Une première remarque intervient alors, touchant au degré de l'équation [$g(u,s) = 0$] : il ne peut être plus élevé que celui de l'équation [$f(x,y,z) = 0$] de la surface courbe, les relations du système (A, B, C) étant linéaires.

III°) Une seconde remarque reprend sous une autre forme un résultat des *Recherches sur les Courbes à double Courbure* : Clairaut, dans cet ouvrage, propose le problème suivant[26] : quelle est l'équation [$f(x,y,z) = 0$] d'un cône de sommet A (que Clairaut appelle le pôle), s'appuyant sur une courbe donnée dans un plan ne contenant pas A, par son équation [$g(u,s) = 0$] dans ce plan ? Une remarque à la suite[27] tire de la solution de ce problème

> "*une propriété commune à toutes les surfaces de cônes en général, qui est que leurs équations dont les coordonnées partent du pôle comme dans celle-ci n'auront jamais de paramètre,* ***j'entends par ce mot toute lettre constante dans une équation, qui exprime une ligne qui doit être absolument donnée pour la construction de l'équation*** [nous soulignons] *comme le paramètre dans la parabole, le rayon dans le cercle, &c. c'est-à-dire que* ***s'il s'y rencontrait des constantes on n'aurait besoin de connaître que le rapport qu'elles auraient entr'elles*** [id.], *ou bien encore que tous les termes de ces équations renfermeraient des variables élevées toûjours ensemble à un même degré comme dans l'équation* axy + bxz = cyy *par exemple, &c.*"

Clairaut ne se contente pas d'énoncer ce dernier point, qui exprime l'homogénéité du degré global des monômes constituant l'équation d'un cône, il démontre qu'il y a équivalence entre la définition géométrique d'un cône et sa définition analytique par une fonction $f(x,y,z)$ homogène : c'est-à-dire en particulier que :

26 Proposition VI des *Recherches...*, article 27, p. 12.

27 Il s'agit de la remarque de l'article 30, p. 14 de l'ouvrage, faisant suite à la prop. VI.

"toute équation à trois variables sans constante[28]*, ou dans laquelle tous les termes sont composés de variables au même dégré, est toûjours à une surface conique*[29]*."*

Dans le mémoire, cette considération est reprise comme conséquence du premier article : les surfaces courbes

"dont les équations n'ont point de paramètres, c'est-à-dire, de constantes qui doivent exprimer nécessairement une ligne, sont toutes à des surfaces coniques, dont le pôle est l'origine des x, y, z, *car les équations* A, B, C, *n'ayant aucun paramètre que* g, *si on veut les faire devenir les formules des sections de la surface par des plans qui passent par le point A, elles n'en auront plus, & par conséquent en les substituant dans l'équation de la surface courbe, on aura des équations à deux variables qui n'auront point de paramètre, & qui seront par conséquent à des lignes droites passant par le point A, ce qui montre alors que la surface courbe n'est composée que de lignes droites qui partent d'un seul point, c'est-à-dire qu'elle est une surface conique."*

Autrement dit, une équation [$f(x,y,z) = 0$] homogène, est équation d'un cône, puisque ses sections par un plan passant par A (ce qui entraîne [$g = 0$] dans la formule C), ont pour équation [$g(u,s) = 0$] homogène, qui définit des droites passant par A ou le point A lui-même ; en effet si $g(u,s)$ est homogène, elle est décomposable en produits de facteurs du premier degré homogènes conduisant à des droites passant par le sommet A du cône, ou du second degré, homogènes et irréductibles, conduisant au seul point A.

IV°) Clairaut développe alors une "*Autre manière d'avoir les équations des Courbes de section des surfaces courbes par des plans donnés de position, en supposant que les coordonnées de la surface courbe font ensemble des angles quelconques*". Ce qui revient à se placer dans un système d'axes non rectangulaires.

Cette fois le plan de section est donné par son équation $\left[\frac{x}{c} + \frac{y}{b} + \frac{z}{a} = 1 \right]$, "$c$", "$b$" et "$a$" étant respectivement l'abscisse, l'ordonnée et la cote des points B, Q et R en lesquels ce plan rencontre sur les axes (AB), (AQ) et (AR) de la figure deuxième de la planche (Fig. 3).

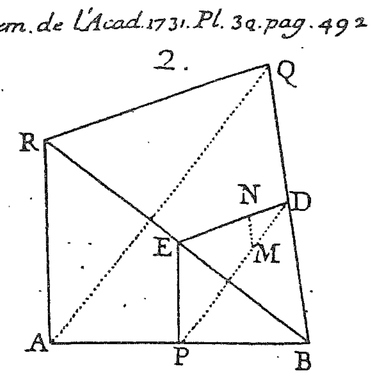
"Ainsi en substituant cette équation dans celle de la surface, on aura, selon celle des trois variables qu'on aura fait évanoüir, l'équation de la Courbe de projection de la Courbe de section sur un des trois plans ARQ, ARB, ABQ, & comme ces Courbes de projection sont de même espèce que la Courbe de section, on aura par-là une équation qui exprimera l'espèce de la Courbe demandée. ***On regarde ici comme Courbes de la même espèce, deux Courbes qui ne diffèrent que parce que leurs coordonnées ne font pas le même angle*** [nous soulignons], *ou bien parce que les abscisses ou les coordonnées de l'une sont toûjours une certaine partie constante de celles de l'autre, ainsi qu'il en est d'une Ellipse à l'égard d'une autre Ellipse dont les axes n'ont pas le même rapport entr'eux."*

---

28 Constante ou paramètre, au sens défini dans la remarque précédente.

29 Article 31 à la suite, qui utilise la similitude des courbes obtenues par intersection de la surface par des plans parallèles d'équation [x = cste].

[Fig. 3]



Et Clairaut de préciser que l'équation propre de la courbe de section s'obtient, à partir de celle d'une courbe de projection, par simple substitution des variables, avec les formules (obtenues dans le cas d'une projection sur xAy) : $\left[x = \frac{cu}{d} \text{ et } y = \frac{bs}{e} \right]$, où "$d$" est RB et "$e$" est RQ, et où "$u$" et "$s$" sont les coordonnées dans le plan de section (mesurant RE et EN).

Là encore, Clairaut fait usage de la notion de courbes de projection d'une courbe plane ou gauche, qu'il a définies dans ses *Recherches...*, puisqu'une courbe à double courbure y est définie par les équations d'au moins deux des trois courbes de projection sur les plans de coordonnées ; ces équations, qui sont à deux variables, sont comprises aussi bien comme équations de surfaces cylindriques s'appuyant sur les courbes de projection (la direction de la projection étant identifiable du fait de l'absence de la troisième variable), que comme équations de ces courbes de projection rapportées aux axes des plan de coordonnées dans lesquel s'effectuent les projections. Certes, les projections parallèles aux axes sont orthogonales dans le traité, en raison du choix primitif d'un repère orthogonal, mais ce passage du mémoire montre à l'évidence que Clairaut maîtrise parfaitement les effets d'un autre choix.

V°) *"Il suit de là que deux surfaces courbes qui ne différeront que parce que leurs coordonnées feront ensemble des angles différents, auront toûjours des Courbes de section qui seront de la même espèce."*

VI°) *"Si l'on fait attention à ce qu'on a dit dans l'Article III. que les équations à trois variables sans paramètre exprimaient toutes des surfaces coniques ; on verra qu'une de ces sortes d'équations sera celle d'un Cone donné, si en supposant dans cette équation* x, y *ou* z *constante, on a l'équation de la Courbe qui sert de base à ce Cone..."*

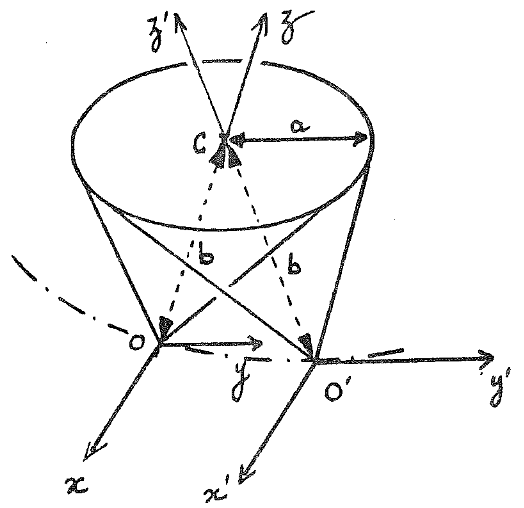
Et de citer pour exemple le cône d'équation [$b^2y^2 + b^2x^2 = a^2z^2$], dont la base est le cercle d'équation [$y^2 + x^2 = a^2$], et "b" est la distance du *pôle* au centre.

VII°) *"Il suit de là que deux Cones qui ont une même Courbe pour base, mais dont la position du Pole à l'égard de la base sera différente, pourront toûjours, pourvû que la distance du Pole à l'origine des coordonnées de la Courbe de base soit la même, être exprimés par la même équation, mais dont les coordonnées feront ensemble des angles différents."*

Autrement dit, si l'on change le repère Oxyz en O'xyz', de façon à conserver la direction des axes Ox et Oy pour O'x et O'y, et si, C étant le centre du cercle de base d'équation [$y^2 + x^2 = a^2$], et la distance O'C égalant OC, l'axe O'z' est choisi comme support de O'C, l'équation des cônes de pôles O et O' et de base commune le cercle, est la même, à savoir [$b^2y^2 + b^2x^2 = a^2z^2$] (Fig. 4).

Il y a là quelque chose d'analogue à la méthode des aires des anciens : deux triangles de même base y ont même surface si leurs sommets sont situés sur une parallèle à la base ; ici deux cônes s'appuyant sur une même courbe auront même équation dans deux repères bien choisis, si leurs sommets sont à même distance de l'origine des coordonnées du plan de la base, c'est-à-dire situés sur une sphère de centre C (Fig. 4). Une telle conception exige de se placer dans un repère non nécessairement orthonormé, ou du moins, dans un premier temps et dans l'exemple choisi, dans un repère dont l'axe des cotes ne soit pas nécessairement orthogonal au plan du cercle de base, d'où sans doute la remarque IV touchant à une méthode alternative dans un repère quelconque.

[Fig. 4]



VIII°) Il résulte de la remarque précédente que deux surfaces coniques ayant même base, peuvent avoir des équations qui ne différeront que de "*la constante qui exprime la distance du Pole à l'origine des coordonnées de la Courbe de base*", et que leurs sections planes seront de même espèce ; ce que Clairaut explicite en précisant les équations de deux plans de coupe qui produiront des courbes de même espèce dans deux cônes dont les pôles sont distants l'un, S_1, de la distance "f", et l'autre, S_2, de la distance "m", de l'origine des coordonnées de leur base commune :

si, pour S_2, le plan s'écrit $\left[\frac{x}{b} + \frac{y}{c} + \frac{z}{a} = 1 \right]$, alors il faut couper S_1 par le plan d'équation $\left[\frac{x}{b} + \frac{y}{c} + \frac{mz}{fa} = 1 \right]$.

Par exemple, il est facile de vérifier que la section de S_2, s'il s'agit du cône d'équation

[$m^2y^2 + m^2x^2 = r^2z^2$], est située dans le cylindre d'équation

$$\left[m^2y^2 + m^2x^2 = r^2a^2.\left(1 - \frac{x}{b} - \frac{y}{c}\right)^2 \right]$$

et que celle de S_1, s'il s'agit du cône d'équation [$f^2y^2 + f^2x^2 = r^2z^2$], s'inscrit dans le cylindre d'équation

$$\left[f^2y^2 + f^2x^2 = r^2a^2.\left(\frac{f}{m} - \frac{fx}{mb} - \frac{fy}{mc}\right)^2 \right]$$

c'est-à-dire dans un cylindre de même équation, et donc de même nature, le repère n'ayant pas changé dans les directions Ox et Oy du plan de base : les sections planes de deux cylindres de même espèce sont de même espèce.

IX°) Ce paragraphe définit l'ombre d'une courbe au flambeau (source lumineuse ponctuelle à distance finie) sur un plan comme la section par ce plan du cône dont le sommet est la source lumineuse et la base la courbe illuminée : l'équation d'une telle surface conique et celles de ses sections planes s'ensuit de ce qui a été dit.

X°) L'ombragement est mutuel, c'est-à-dire : toute ombre peut être considérée comme base du cône d'ombragement ; la base est alors ombre de son ombre. Pour savoir "*si une certaine Courbe peut être formée par l'ombre d'une autre*", il revient au même de chercher si l'une est section d'un des cônes d'ombre de l'autre, ou si la seconde est section d'un des cônes d'ombre de la première.

XI°) L'ombragement est transitif, c'est-à-dire : si une courbe A est ombre d'une courbe B, elle-même ombre de C, et ainsi de suite jusqu'à une courbe P, il est clair que A est ombre directe de P, par un cône adéquat.

XII°) "*Pour avoir toutes les différentes espèces des Courbes qui peuvent être formées par la section d'une surface courbe donnée, on n'aura qu'à substituer dans l'équation de cette surface courbe, l'équation générale d'un plan... et chercher ensuite combien de différentes Courbes peuvent être exprimées par cette même équation.*"

Ce qui se conçoit bien du fait qu'une courbe de section est de même nature que sa projection cylindrique dans un plan de coordonnées, projection dont on a vu qu'elle a même équation formelle que le cylindre projetant. Clairaut entre ensuite dans le vif du sujet :

> "*Si la surface courbe se trouvait être du troisième degré, on pourrait trouver toutes ces Courbes, en se servant des façons de connaître les différentes figures des Courbes du 3.me degré qu'a données M. Newton : Voici à peu-près comme on pourrait faire alors.*"

XIII°) Une première étape de type algébrique explicite la transformation qui permet de "faire disparaître" le terme "en y^3" de l'équation générale [$g(x,y) = 0$], du troisième degré, des projections sur xOy des courbes de section d'une surface du troisième degré[30] :

---

30 Clairaut parle d'ailleurs d'*équation générale des Courbes de sections de la surface courbe*, puisqu'il a montré que ces courbes et leurs projections cylindriques sont de même espèce.

"*ce qui peut se faire aisément, en mettant dans cette équation à la place de* x, x + py, ***ce qui ne change point l'espèce de cette Courbe*** [nous soulignons] *& en égalant à zero le terme où il y aura* y^3, *ce qui se pourra toujours faire avec le secours de l'indéterminée* p *qui sera au 3.*^{e} *degré*".

Puis Clairaut se ramène, "*par des transpositions d'axe*", à l'une "*des quatre équations générales de M. Newton qui sont* [:]

$xyy + ey = ax^3 + bxx + cx +$ [d ,

$yy = ax^3$][31] $+ bxx + cx + d$,

$xy = ax^3 + bxx + cx + d$, $y = ax^3 + bxx + cx + d$ ".

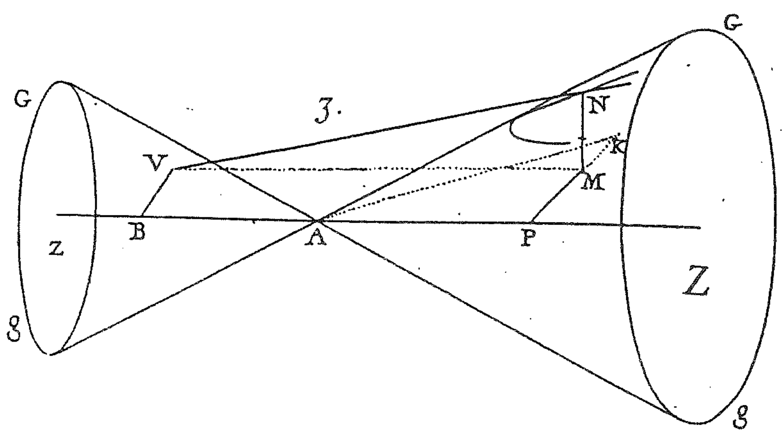
Et il ajoute la remarque suivante, qui montre sa maîtrise du clacul analytique :

"*(il paraît d'abord* [que l'équation obtenue] *ne pourrait se trouver que sous la forme de l'une de ces quatre équations; mais pour peu qu'on y réflechisse, on verra que les différentes valeurs des indéterminées* m, n, q *de l'équation du plan peuvent la faire convenir à plusieurs), & l'on verra ensuite qui entrent dans les coëfficients* a, b, c, d, e, *à combien de différentes Courbes de l'énumération des Courbes du 3.*^{me} *degré de M. Newton, on peut faire convenir les équations que l'on aura euës.*"

Les paragraphes XIV et XV qui terminent ce mémoire sont consacrés à "*faire voir une application de tout ce qui précède*". Clairaut se propose, au moyen des formules de l'article I de trouver l'équation générale des sections coniques, puis, au moyen des remarques qu'il a faites, de démontrer "*l'article V de l'énumération des lignes du 3.*^{me} *ordre de M. Newton*", c'est-à-dire l'article cité en référence et touchant à l'ombre portée de ces courbes.

XIV°) Cet article, consacré au cas des coniques repose sur la figure 3 de l'unique planche (Fig. 5).

[Fig. 5]



Clairaut y parle de deux cônes opposés par la pointe et égaux "z" et "Z", d'axe commun AP (définissant l'axe des abscisses Ax dirigé positivement du côté de Z) et non d'une seule surface conique, mais il définit "z" comme étant le cône *négatif*, preuve qu'il donne une signification géométrique aux abscisses négatives. L'axe des ordonnées (Ay parallèle à PM) est choisi parallèle à la ligne de section du plan coupant (BV dans la

31 Par suite d'une erreur de typographie, au lieu de "... cx + d , yy = ax^3 + bxx + ...", le texte original donne : "... cx + dy = y ax^3 + bxx + ...".

figure, B étant "*sur la partie de l'axe qui appartient au Cone négatif* z") avec le plan de base (parallèle aux plans des cercles de circonvolution Gg). L'axe des cotes, Az est choisi perpendiculaire aux précédents, et la cote d'un point de la section est donnée par MN. Enfin le cône est défini par son angle au sommet, KAP, lui-même donné par son cosinus,

c'est-à-dire par le rapport constant $\dfrac{\mathrm{AP}}{\mathrm{AK}} = \dfrac{f}{i}$.

"*On n'a point mis la position du plan coupant d'une façon plus générale que celle qu'on vient de dire* - ajoute Clairaut -, *parce qu'il est clair que toute autre position de ce plan se rapportera à celle-là, en changeant le plan de la base.*"

L'équation (E) du cône étant [$f^2(y^2+z^2) = i^2x^2$], les équations (A, B, C) de l'article I donnent :

$$\mathcal{A} : z = \frac{qs}{\sqrt{p^2+q^2}} \;;$$

$$\mathcal{B} : y = u \;;$$

$$\text{et } C : x = \frac{ps}{\sqrt{p^2+q^2}} - g \;.$$

Par substitution dans (E), on "*changera*" l'équation du cône "*en celle-ci*" :

$$s^2 + \frac{f^2}{i^2}\cdot\frac{p^2+q^2}{\frac{f^2}{i^2}\cdot q^2 - p^2}.u^2 + \frac{2pg.\sqrt{p^2+q^2}}{\frac{f^2}{i^2}\cdot q^2 - p^2}.s - \frac{g^2.(p^2+q^2)}{\frac{f^2}{i^2}\cdot q^2 - p^2} = 0$$

ou encore :

$$\left(f^2q^2 - i^2p^2\right).s^2 + f^2\left(p^2+q^2\right).u^2 + 2pgi^2.\sqrt{p^2+q^2}.s - g^2i^2\left(p^2+q^2\right) = 0 \;,$$

"*qui est l'équation de toutes les sections coniques, selon les différentes valeurs de* p, *de* q, *de* f, *& de* i.

Il est évident que cette équation appartiendra aux hyperboles opposées[32], *lorsque* ffqq/ii *sera plus petit que* pp. *Mais si* ffqq/ii *est plus grand que* pp, *la section sera une Ellipse décrite dans le cone négatif* z, *& s'il arrive que* ffqq/ii, *&* pp *soient égaux, la section conique sera une parabole décrite dans le cone positif* Z[33]."

XV°) Nous citerons l'essentiel de la partie démonstrative de cet article, préparée par les diverses remarques des articles précédents : elle couronne très élégamment le mémoire de Clairaut.

32 Clairaut se place ici dans le cadre de la théorie apollonienne : les deux branches d'une hyperbole (section plane des deux nappes d'un cône, telle que Desargues la définit), y sont qualifiées d'hyperboles opposées.

33 Cône positif que Clairaut, ou son imprimeur, note "z" par erreur.

"*Pour démontrer* que les cinq paraboles divergentes donnent par leur ombre toutes les courbes du troisième ordre, *ou ce qui revient au même, pour prouver que tous les Cones qui ont des Courbes du troisième ordre pour base, peuvent toûjours donner des paraboles divergentes, en les coupant d'un certain sens par des plans, on remarquera qu'un Cone fait sur une ligne qui a des points d'inflexion a des côtés d'inflexions, c'est-à-dire, des côtés qui séparent des parties convexes d'avec des parties concaves, & que la section faite par un plan aura autant de points d'inflexions que ce plan coupera de côtés d'inflexion ; de façon que pour que cette section perde une ou plusieurs inflexions, il faut que le plan qui la donne soit parallèle à un ou plusieurs côtés d'inflexions : d'où on tirera que dans tous les Cones du troisième degré, il ne peut y avoir plus de trois côtés d'inflexions, & que quelque Cone du troisième degré que l'on ait, on pourra toûjours trouver un certain sens de le couper, qui donnera une de ces lignes du troisième ordre qui ont deux inflexions, ou qui n'en ont point.*

Ainsi voilà déjà toutes les Courbes du troisième degré trouvées par l'ombre de celles qui n'ont que deux inflexions, ou qui n'en ont point ; il ne reste donc plus (Art. XI.) *pour prouver le Théorème de M. Newton, qu'à trouver ces Courbes à deux ou sans inflexions par l'ombre des paraboles divergentes.*

Or, toutes ces Courbes à deux ou sans inflexions, sont celles qui sont exprimées par l'équation $xyy = ax^3 + bxx + ex + d$ [34], *excepté les seules paraboles divergentes ; ainsi* ***faisant de cette équation*** $xyy = ax^3 + bxx + ex + d$, ***l'équation*** $xyy = ax^3 + bxxz + exzz + dz^3$ ***qui exprimera*** **(Art. VI.)** ***tous les Cones qui ont ces Courbes pour base*** [nous soulignons], *& remarquant ensuite que si l'on y fait* x *constante, on a l'équation des paraboles divergentes*[35], *on verra que toutes les Courbes représentées par l'équation* $xyy = ax^3 + bxx + ex + d$, *se trouvent par l'ombre des cinq paraboles divergentes, & que par conséquent toutes les Courbes du troisième degré se trouvent par l'ombre de ces cinq Courbes, comme l'avait dit M. Newton.*"

Clairaut achève cet article par une reformulation très synthétique de l'énoncé de Newton - "*quelque Courbe du troisième degré que l'on prenne pour base, on ne peut former que l'une des cinq espèces de Cones, qui ont pour bases les cinq paraboles divergentes ; en sorte qu'il n'y a dans le troisième degré que cinq espèces de Cones*" -, et par diverses remarques sur ces surfaces et leurs sections, qui conduisent à l'énoncé suivant : "*généralement dans les cinq Cones du troisième degré, les paraboles divergentes sont toûjours dans des plans parallèles aux plans qui touchent la surface aux côtés d'inflexions*". Ceci résulte de ce que (Fig. 6) :

1°) un cône s'appuyant sur une parabole divergente possède un "*côté d'inflexion*" parallèle à la direction de ses branches paraboliques et donc au plan de cette courbe : il suffit de faire courir un point sur ces branches pour "voir" la génératrice qui le joint au sommet du cône s'élever jusqu'à devenir parallèle au plan de la parabole ; en cette droite viennent "se souder" les deux nappes du cône engendré aussi bien par la courbe que par sa symétrique par rapport au sommet du cône ; et :

2°) qu'un plan parallèle au plan de la parabole de base et passant par cette génératrice d'inflexion est tangent au cône ;

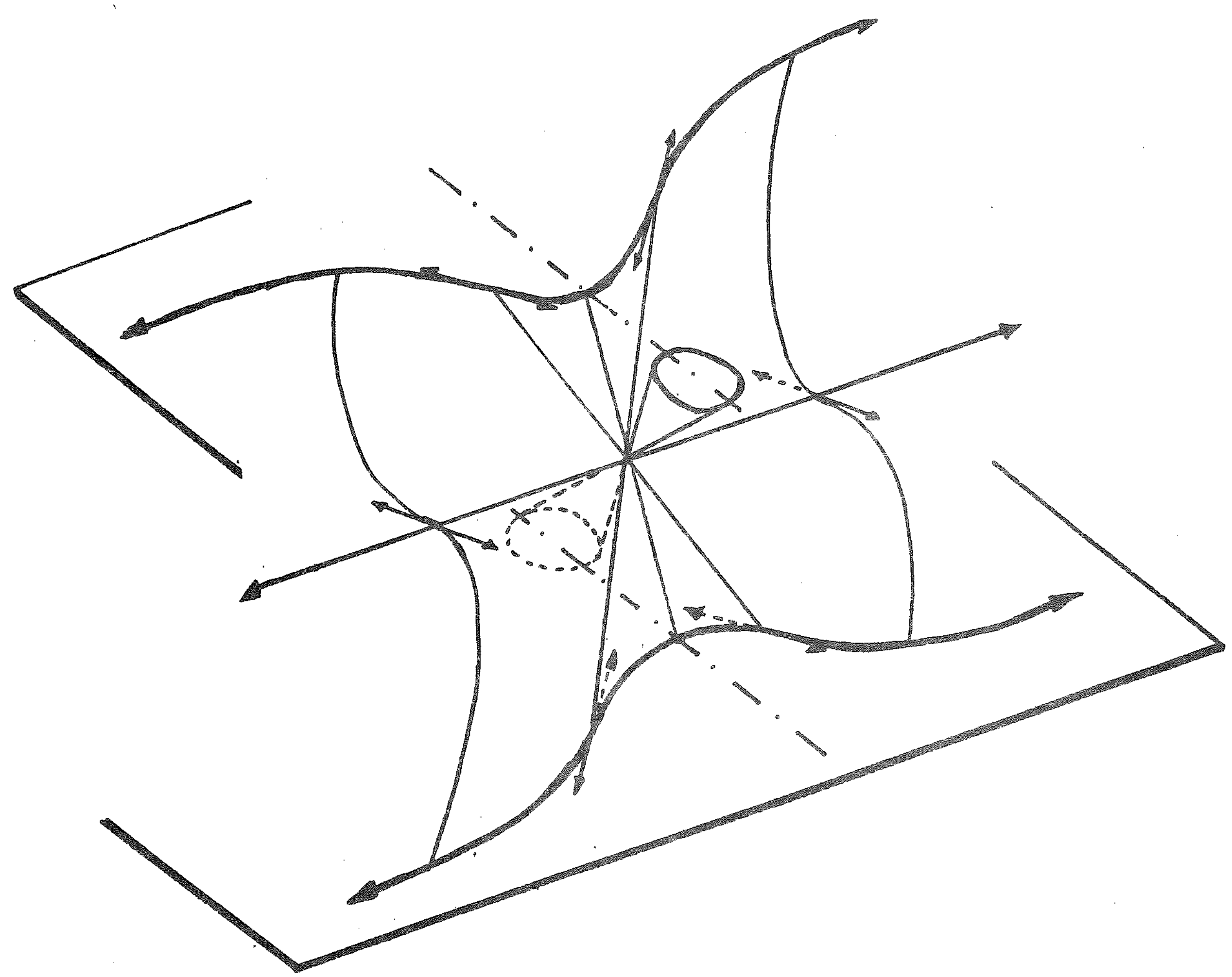
3°) dans un plan de section parallèle à un "*côté d'inflexion*", le point de la courbe que produit cette génératrice singulière du cône est à l'infini puisqu'elle ne rencontre pas le plan, et un point courant dans un plan parallèle au plan tangent à cette génératrice produira

34 Cette équation est un cas particulier du type (i) ; Clairaut n'indique pas les raisons de cette sélection : elles se trouvent dans l'*Enumeratio* de Newton.

35 C'est-à-dire (si x = c) : $cy^2 = ac^3 + bc^2z + ecz^2 + dz^3$, qui est du type (iii) dans un repère yOz.

deux branches paraboliques de sens opposé dans cette direction, du fait du changement de concavité de la surface de part et d'autre du *côté d'inflexion*.

[Fig. 6]



Ces quelques pages de Clairaut mettent en évidence le niveau de virtuosité technique auquel étaient parvenus certains géomètres dans le maniement de la méthode analytique, sans pour autant avoir perdu de vue la signification proprement géométrique des transformations algébriques utilisées : nul doute d'ailleurs que celles-ci ne proviennent de l'observation et du rapprochement d'écritures rencontrées dans un calcul et de leur interprétation géométrique permanente, seule capable, pour un Newton par exemple, de rendre compte des phénomènes constatés au cours d'un calcul ou des résultats obtenus à son terme.

Cela est en particulier sensible dans le dernier article de ce mémoire, lorsque Clairaut utilise le procédé algébrique d'homogénéisation des variables pour écrire l'équation d'un cône s'appuyant sur un certain type de courbes bien choisi, et pour y "découvrir", par section parallèle à un plan de coordonnées, l'équation générale des cinq paraboles divergentes de Newton : l'ingéniosité du procédé le distingue comme un jalon entre le moment de la révolution arguésienne et celui du renouveau de la géométrie synthétique par Monge, Poncelet[36] et Chasles[37], qui conduira, entre autres, à l'invention des coordonnées homogènes par Möbius[38], Plücker[39] et Von Staudt ; Clairaut préfigure ici un type nouveau de mathématicien, à la fois géomètre et analyste, dont Monge et Poncelet seront des représentants[40], au delà de la querelle entre tenants des géométries synthétique et analytique.

* * * * *
* * *
*

BIBLIOGRAPHIE.

SOURCES.

- CHASLES, M., *Aperçu historique sur l'origine et le développement des méthodes en géométrie...*, Paris, 1837 (2de éd. 1875, 3ème éd. 1889), pp. 144 à 153, et 348 à 350.
- CLAIRAUT, A.-C., *Recherches sur les courbes à double courbure*, Paris, 1731.
- CLAIRAUT, A.-C., *"Sur les courbes Que l'on forme en coupant une surface courbe quelconque, par un plan donné de position"*, in *Mémoires de l'Académie Royale des Sciences*,Paris, 1731, pp. 483 à 493 et 8 figures en une planche (n°30 du volume, insérée en p. 492).
- de GUA de MALVES, (L'abbé) J.-P., *Usage de l'analyse de Descartes pour découvrir sans le secours du calcul différentiel, les propriétés, ou affections principales des lignes géométriques de tous les ordres*, Paris, 1740.
- JACQUIER, F. (le père, de l'ordre des minimes), *Elementi di Prospettiva secondo i Principi di Brook Taylor...*, Rome, 1755.

36 Jean-Victor Poncelet : 1788-1867.
37 Michel Chasles : 1793-1880.
38 Augustus-Ferdinand Möbius : 1790-1868.
39 Julius Plücker : 1801-1868.
40 Monge préconisait l'usage des deux points de vue. Poncelet, aussi, en dépit de ses prises de position vers la fin de sa vie : n'a-t-il pas rédigé, vers 1814 dans la prison de Saratov, des *Applications d'Analyse et de Géométrie*, parues en 1862, *qui ont servi, en 1822, de principal fondement au Traité des Propriétés Projectives des Figures* ?

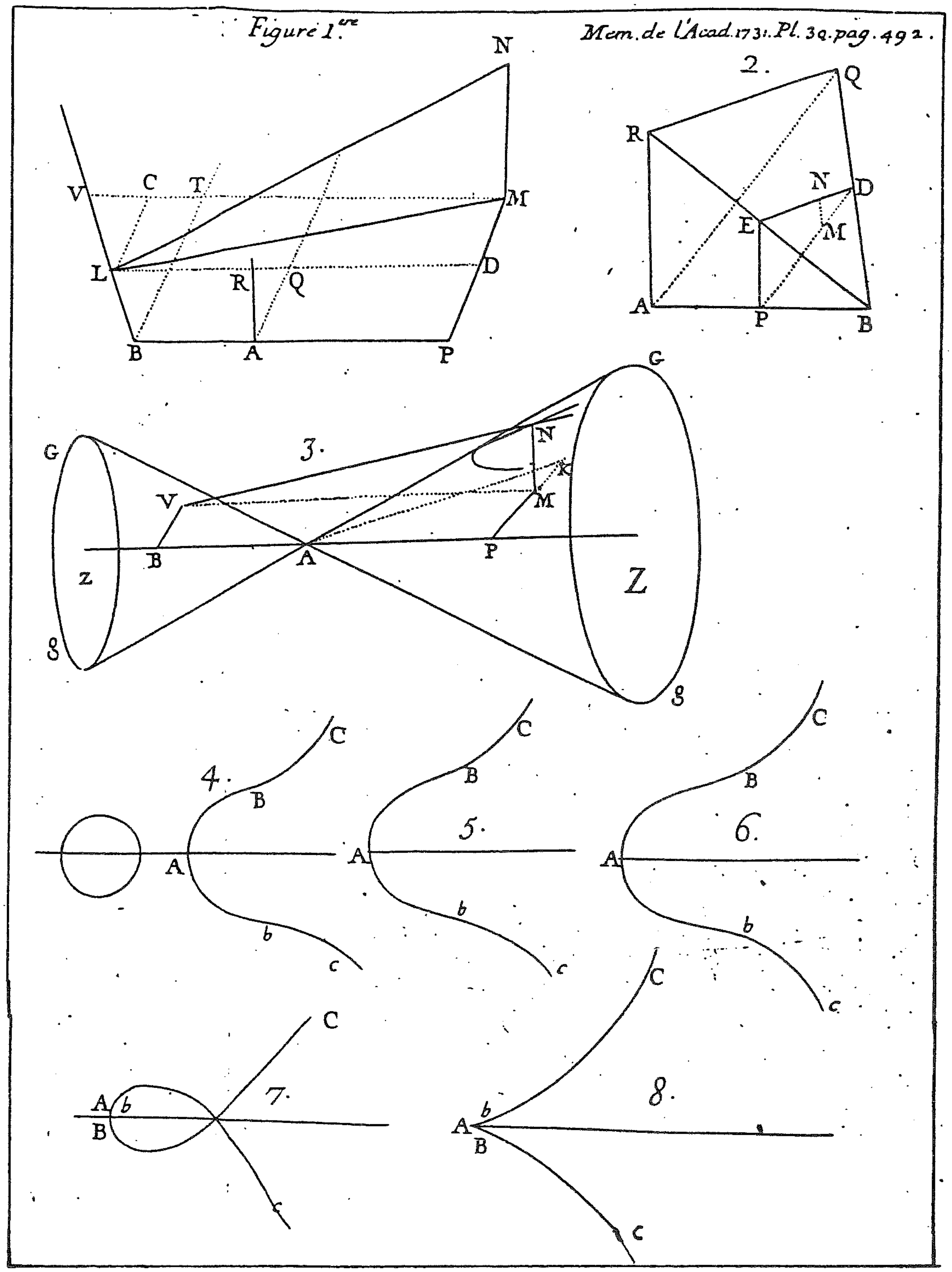
- de JONQUIERES, *"Traduction du Traité de MacLaurin sur les courbes du troisième ordre, avec des notes et additions"*, in *Mélanges de Géométrie pure*, Paris, 1856.
- MACLAURIN, C., *Geometria Organica : sive Descriptio Linearum Curvarum universalis*, Londres, 1720.
- MURDOCH, P., *Neutoni Genesis Curvarum per Umbras, seu Perspectivæ Universalis Elementa ; Exemplis Coni Sectionum et Linearum Tertii Ordinis illustrata*, Londres 1746.
- NEWTON, I., *Enumeratio Linearum Tertii Ordinis*, à la suite d'*Opticks*, Londres, 1704. Une autre édition de l'*Enumeratio* fut publiée en 1711 par D. Jones[41].
- NICOLE, F., *"Maniére D'engendrer dans un Corps solide toutes les lignes du troisiéme ordre"*, in *Mémoires de l'Académie Royale des Sciences*, Paris, 1731, pp. 494 à 510 et 14 figures en trois planches (n^{os} 31 à 33, insérées en page 510).
- PLÜCKER, J., *System der analytischen Geometrie*, Berlin, 1835.
- STIRLING, J., *Lineæ Tertii Ordinis Neutonianæ, sive Illustratio Tractatus Domini Neutoni De Enumeratione Curvarum Tertii Ordinis*. Oxford, 1717. Edition française par Duprat, Paris, 1797 (d'après Chasles).
- TAYLOR, B., *Linear Perspective, A new Method*, Londres, 1715.
- TAYLOR, B., *New Principles of Linear Perspective*, Londres, 1719.

BIBLIOGRAPHIE SECONDAIRE.

- BRUNET, P., *La vie et l'œuvre de Clairaut (1713-1765)*, Paris, 1952.
- FIELD, J.V., & GRAY, J.J., *The Geometrical Work of Girard Desargues*, New-York, 1987, ch. III, pp. 31 à 46.
- LANIER, D., LE GOFF, J.-P., *"L'héritage arguésien"*, in *Scholies*, Actes du Séminaire Interdisciplinaire d'Histoire des Sciences du Lycée Malherbe de Caen, numéros 7 & 8, février & juin 1989, in *Cahiers de la Perspective* de l'IREM de Basse-Normandie, n° 5, Caen, 1991; et à paraître dans les *Cahiers d'Histoire et de Philosophie des Sciences*, Actes des colloques de Lille et Paris organisés en 1989 par le Séminaire d'Histoire, Théorie et Pratique de la Perspective.
- LE GOFF, J.-P., *"La perspective dans les pays anglo-saxons"*, Actes du Séminaire Interdisciplinaire d'Histoire des Sciences du Lycée Malherbe de Caen, numéros 10 & 11, février & juin 1990, et *Cahiers de la Perspective*, n° 5, Caen, 1991.
- STRUIK, D.J., *A Source Book in Mathematics*, Harvard, 1969, pp. 168 à 178.
- TATON, R., *L'Œuvre scientifique de Gaspard Monge*, Paris, 1951.

* * * * *
* * *
*

41 Cette édition diffère quelque peu de l'originale, en particulier quant à la numérotation des espèces de courbes. P. Murdoch donne, dans son ouvrage de 1746 (op. cit), la correspondance entre les numéros d'ordre des figures dans l'édition de Jones (1711) et dans l'édition princeps de l'*Enumeratio* qui fait suite à l'Optique de Newton (1704).



Hors-texte : Planche du *Mémoire*... de Claude-Alexis Clairaut (1731).

L'UNIFORMITE, UN CONCEPT IMPLICITE EFFICACE CHEZ CAUCHY

Henri LOMBARDI

IREM de Besançon

Résumé : Nous analysons plusieurs définitions et preuves du cours d'Analyse de Cauchy en relation avec la notion d'uniformité (fonction uniformément continue sur un intervalle, uniformément dérivable sur un intervalle, suite uniformément convergente de fonctions).
Les preuves de Cauchy sont réputées fautives, mais elles sont parfaitement correctes si on utilise l'interprétation "uniforme" des définitions. En outre, les preuves sont particulièrement simples et claires. Enfin, les définitions uniformes ont, contrairement aux définitions "ponctuelles", un réel caractère opératoire, constructif.
Le problème épistémologique suivant se pose donc: Pourquoi a-t-on, à un certain moment, décidé de faire compliqué quand on pouvait faire simple ?
En d'autres termes : pourquoi a-t-on choisi comme concepts de référence des concepts qui d'une part sont non opératoires et, d'autre part, rendent les preuves inutilement subtiles et compliquées ?

Introduction

Le but de cet article n'est pas de "réhabiliter" les preuves de Cauchy, ni de soutenir la thèse selon laquelle Cauchy "pensait uniforme", au sens moderne de la chose. Les preuves de Cauchy peuvent aussi bien être rendues correctes par une lecture "non-standard" que par notre lecture "uniforme" [1]. Mais la thèse selon laquelle Cauchy aurait pensé ceci ou cela est futile et de peu d'intérêt. L'état des mathématiques à son époque, avant toute définition claire des nombres réels, avant l'introduction des quantificateurs et bien avant l'invention d'une analyse non-standard formalisée, ne permettait tout simplement pas de penser "uniforme" ou "non-standard" au sens où nous l'entendons aujourd'hui.

Cauchy passait à l'époque aux yeux de certains pour un coupeur de cheveux en quatre et un dangereux faiseur de contre-exemples, mais la clarté de son exposition finit par convaincre. Il eut l'immense mérite de commencer à fonder l'analyse sur des bases simples, en fournissant des définitions relativement précises pour les notions de limite, de continuité, de dérivabilité, et surtout en élaborant des preuves pour des résultats considérés par les uns comme évidents et par les autres comme parfaitement obscurs. Bien que certains de ses théorèmes "souffraient[2] des exceptions", au moins des preuves relativement précises étaient-elles en place[3], qu'il suffirait d'examiner à la loupe pour faire évoluer définitions, énoncés des théorèmes, et interprétations sémantiques des résultats obtenus.

La thèse que nous défendons est que la manière la plus simple de rétablir les preuves de Cauchy dans les canons de la rigueur contemporaine est de n'y pas toucher et de procéder au contraire à une lecture "uniforme" systématique des définitions qu'il donne.

Les infiniments petits comme "manière de parler" d'autre chose

Nous commençons par examiner un premier passage où Cauchy introduit la notion d'infiniment petit. Comme on peut le constater, il ne s'agit pas d'un infiniment petit en acte, d'une quantité infinitésimale, mais bien d'une "manière de parler" d'une quantité variable tendant vers 0. Il s'agit donc plutôt d'une notion dynamique, où la variable *varie effectivement*. Notons à ce sujet que cette notion si intuitive de variable

---

[1] Au sujet de l'intérêt et des abus d'une lecture non-standard de Cauchy, on lira "Imre LAKATOS : Cauchy and the Continuum, the Significance of Non-Standard Analysis for the History and Philosophy of Mathematics" in *Math. Intelligencer*, 1978, vol 1, n°3, p 151-161.

[2] selon l'expression d'Abel.

[3] On consultera Lakatos "Preuves et Réfutations" (chez Hermann) au sujet de la place centrale des preuves, plutôt que les théorèmes, dans l'activité mathématique, ainsi que sur le sujet plus précis des "théorèmes prouvés mais souffrant des exceptions" chez Cauchy.