

SPHERE ET DUALITE

Le rôle joué par la sphère dans la maturation de l'idée de dualité au début
du XIX^e siècle
Les articles de Gergonne entre 1811 et 1827

Karine CHEMLA

REHSEIS-CNRS

1. Introduction

Dans le journal qu'il a lancé en 1810, les *Annales de mathématiques pures et appliquées*, Joseph-Diaz Gergonne¹ rassemble, entre autres articles, des travaux mettant en évidence une propriété formelle commune à plusieurs domaines de la géométrie. Cette propriété que nous connaissons aujourd'hui sous le nom de dualité, il la dégagera dans un article synthétique qui vient couronner ce parcours éditorial, en 1826². Voici comment il l'introduit alors :

"...nous croyons en avoir dit suffisamment pour mettre hors de toute contestation ces deux points de philosophie mathématique, savoir 1°) qu'il est une partie assez notable de la géométrie dans laquelle les théorèmes se correspondent exactement, deux à deux, ainsi que les raisonnements qu'il faut faire pour les établir, et cela en vertu de la nature même de l'étendue; 2°) que cette partie de la géométrie, qui prendrait une très-grande étendue, si l'on voulait y comprendre les lignes et les surfaces courbes, peut être développée indépendamment du calcul et de la connaissance d'aucune des propriétés métriques des grandeurs que l'on considère..." (p.230-1)

Il précise la nature de cette correspondance entre énoncés dans ce même travail :

"Mais un caractère extrêmement frappant de cette partie de la géométrie qui ne dépend aucunement des relations métriques entre les parties des figures, c'est qu'à l'exception de quelques théorèmes symétriques d'eux-mêmes, (...), tous les théorèmes y sont doubles; c'est-à-dire que, dans la géométrie plane, à chaque théorème il en répond toujours nécessairement un autre qui s'en déduit en y échangeant simplement entre eux les deux mots points et droites; tandis que, dans la géométrie de l'espace, ce sont les mots points et plans qu'il faut échanger entre eux pour passer d'un théorème à son corrélatif." (p. 210)

Et il précise, pour ce qui concerne les démonstrations :

"Nous pourrions fort bien nous borner à démontrer seulement une moitié de nos théorèmes, et à en déduire l'autre moitié, à l'aide de la théorie des pôles. Mais nous préférons les démontrer directement les uns et les autres (...) pour avoir l'occasion de faire remarquer qu'il existe entre les démonstrations de deux théorèmes d'un même couple la même correspondance qu'entre leurs énoncés. Nous aurons même soin, afin de rendre cette correspondance plus apparente, de présenter les théorèmes analogues dans deux colonnes, en regard l'une de l'autre (...) de telle sorte que les démonstrations puissent se servir réciproquement de contrôle." (p. 211, je souligne)

¹ On peut sur la biographie de Gergonne consulter [D. J. Struik]. [A. Dahan], [L. Giard], [M. Otero] sont chacun consacrés à un aspect de son oeuvre. Pour ce qui concerne l'histoire de la géométrie à cette période, on peut se reporter à [M. Chasles] ou [A. Schoenflies].

² Voir [Gergonne 3].

Gergonne s'intéresse donc à la dualité en tant que relation se manifestant systématiquement entre des propositions de la géométrie ainsi qu'entre leurs démonstrations. Et, pour mettre en évidence ce sujet, il rassemble dans le journal qu'il édite des présentations de domaines variés de la géométrie (polyèdres, trigonométrie sphérique, géométrie plane, géométrie dans l'espace...) qui ont pour particularité d'être rédigées de manière symétrique. Il va jusqu'à réécrire les articles dont des auteurs lui confient la publication pour accentuer cette propriété de la forme. Parfois il insiste sur ce point en recourant, comme il le décrit ici, à un artifice de présentation qui consiste à présenter les théorèmes duaux et leurs démonstrations, face à face, dans deux colonnes en regard l'une de l'autre.

Le problème se pose de savoir comment Gergonne en est arrivé à considérer cette propriété formelle que partagent les présentations de diverses disciplines et à le prendre pour sujet d'investigations mathématiques. Nous savons aujourd'hui à quel point l'extension de ce phénomène de dualité est importante en mathématiques. Nous lui associons plusieurs types de pratiques. Mais au détour de quel chemin la question de la dualité en tant que telle a-t-elle commencé à se poser ? Quelles en furent les sources d'inspiration et comment furent-elles mises en oeuvre ? Cet article fournit quelques raisons de penser que les travaux de géométrie concernant la sphère ont pu, au début du XIX^e siècle, jouer un rôle dans cette maturation.

Pourquoi la sphère ? Parce que, comme nous avons déjà eu l'occasion de le démontrer³, un intérêt semblable à celui que Gergonne développe en toute généralité se rencontre dans des travaux de trigonométrie sphérique qui, à la fin du 18^e siècle, proposent des traitements analytiques de cette discipline. Le projet auquel travaillent leurs auteurs consiste à présenter une organisation systématique du corpus de formules, d'énoncés et de démonstrations, concernant les triangles sphériques. Et dans ce contexte, ils rencontrent une symétrie dans le corpus, liée à la question de la dualité. Il était donc naturel de se demander s'ils n'avaient pas été une source d'inspiration pour notre mathématicien. Plusieurs indices, que nous présenterons ici succinctement, incitent effectivement à abonder dans ce sens. Mais, avant de les exposer, esquissons ce qu'il en est mathématiquement de la dualité sur la sphère.

2. Dualité sur la sphère, quelques travaux du XVIII^e siècle.

Nous considérerons ici pour l'essentiel le phénomène de la dualité tel qu'il se manifeste en trigonométrie sphérique. L'objet élémentaire en est le triangle, qu'on peut définir comme formé par les plus courts chemins entre trois points. On parle de droites sur le plan, de grands cercles sur la sphère⁴. On peut aussi considérer le triangle sphérique comme l'intersection d'une sphère et d'une pyramide triangulaire dont un sommet occupe le centre de la sphère (voir figure 1). Six grandeurs lui sont attachées : les mesures des trois angles au centre qui sous-tendent ses côtés (angles sur les faces de la pyramide); et les mesures des trois angles que forment les tangentes en un sommet du triangle aux deux côtés qui le déterminent (angles que font entre elles les faces de la pyramide). C'est Euler qui, en 1753, introduit des notations devenues depuis lors standard⁵ pour traiter de la trigonométrie sphérique, à savoir qu'il nomme a, b, c , les côtés, soit les angles sur les faces de la pyramide, et A, B, C , les angles au sommet qui leur sont respectivement opposés. Trois quelconques de ces grandeurs permettent d'obtenir toutes les autres et, comme on le sait, la trigonométrie sphérique traite des expressions de ce calcul.

³ Voir [Chemla, Pahaut]. Je tiens à exprimer ici ma dette à l'égard de Serge Pahaut, dans la mesure où mon travail en collaboration avec lui a été décisif pour pouvoir avancer certaines idées que je développe ici.

⁴ La première présentation de la trigonométrie sphérique, au XVIII^e siècle, qui donne de ce domaine une construction analytique, [Euler 1], utilise le calcul des variations pour établir, sur la base de cette définition, toute la trigonométrie sphérique.

⁵ Sur ce point, voir [Braunmühl 2]

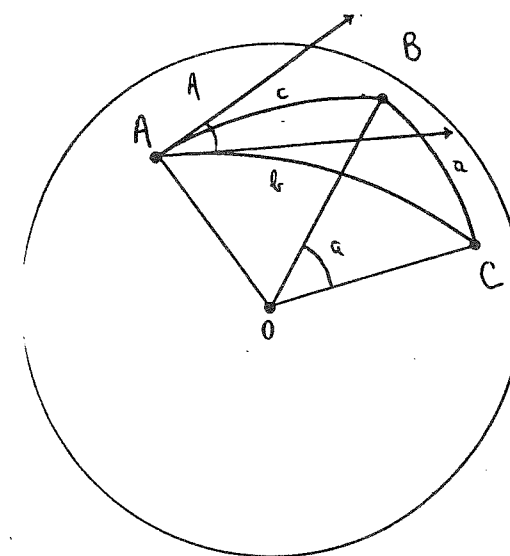


fig. 1

Or il se trouve qu'on peut, sur la sphère, associer, à un triangle donné dont les trois côtés sont a, b, c , et les angles A, B, C , un autre triangle, appelé triangle polaire (ou supplémentaire ou dual), dont les trois côtés ont pour mesure les suppléments des angles du triangle donné et les trois angles pour mesure les suppléments des trois côtés a, b, c .

Par construction, les côtés de ce triangle polaire sont situés sur les équateurs des sommets du triangle donné. Inversement, les côtés du triangle donné sont sur les équateurs des sommets du triangle polaire. Pour analyser les rapports entre ces deux triangles, nous aurons à nous servir de la propriété, illustrée par la figure 2, que les angles du triangle ABC , A par exemple, ont même mesure qu'un arc de cercle que découpent, sur l'équateur, les plans contenant les côtés qui les forment, AB et AC en l'occurrence.

⁶ Le triangle polaire était connu de mathématiciens arabes, qui l'ont introduit dans le cours de démonstrations de certains cas de trigonométrie sphérique. On peut se reporter pour ce point à l'article de M. T. Debnarot "Introduction du triangle polaire par Abu Nasr b. Iraq", *Journal for the History of Arabic Science*, vol. 2, n° 1 (1978), pp. 126 à 136 (et plus généralement, à son livre *Al Bīrūnī, Kitāb Maqālīd 'Ilm al-Hay' a, La trigonométrie sphérique chez les arabes de l'Est à la fin du 10^e siècle*, Damas 1985, Institut Français de Damas. On y trouvera une bibliographie du sujet. Signalons aussi l'article de Mme Debnarot sur la trigonométrie sphérique chez les auteurs de langue arabe (à paraître dans le recueil sur l'histoire des sciences arabes, sous presse chez Sinbad), dans lequel celle-ci montre l'évolution au terme de laquelle le triangle devint, après le quadrilatère, l'objet de base de la trigonométrie. C'est au 17^e siècle que le triangle polaire sera mis en relation avec la présentation symétrique de formules (cf. [A. von Braunmühl, 1 et 2]). Pour la comparaison de traités arabes et latins sur le sujet, on pourra se reporter à N.G. Hairetdinova "On Spherical Trigonometry in the Medieval Near East and in Europe", *Historia Mathematica*, 13 (1986), p. 136-46.

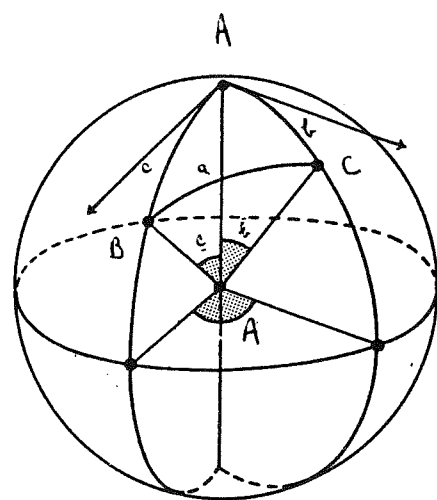


fig. 2

Mais construisons tout d'abord le triangle polaire d'un triangle donné ABC. Chacun des côtés d'un triangle sphérique est situé sur un équateur. Considérons, dans chaque cas, le pôle correspondant à cet équateur et qui se trouve dans le même hémisphère que le troisième sommet du triangle. C'est le cas, sur la figure 3, du pôle α correspondant à l'équateur BC et situé dans le même hémisphère que A. Si l'on répète cette construction pour chacun des côtés du triangle sphérique ABC, le triangle polaire sera justement le triangle $\alpha\beta\gamma$, que montre la figure 4. La figure 5 va nous permettre d'étudier les relations que présentent ces deux triangles. γ étant pôle de AB et β pôle de AC, A est pôle de $\beta\gamma$. Considérons ce qui se passe dans ce plan équatorial $\beta\gamma$. Le plan qui contient le côté AB, équateur de γ , coupe ce plan en OA', tandis que le plan contenant l'arc AC le coupe en OA". Les arcs de cercle A' γ et A" β ont tous deux pour mesure $\pi/2$. A'A", lui, mesure A, en vertu de la remarque illustrée par notre figure 2. Le côté $\beta\gamma$ du triangle polaire a donc pour mesure $2\pi/2 - A$, supplémentaire de l'angle A à l'un des sommets du triangle de départ. C'est ainsi que s'effectue cet échange grâce auquel les mesures des côtés d'un triangle sont les supplémentaires des angles de l'autre.

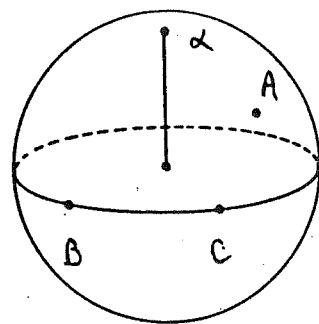


fig. 3

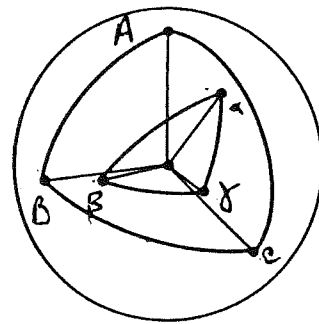


Fig. 4

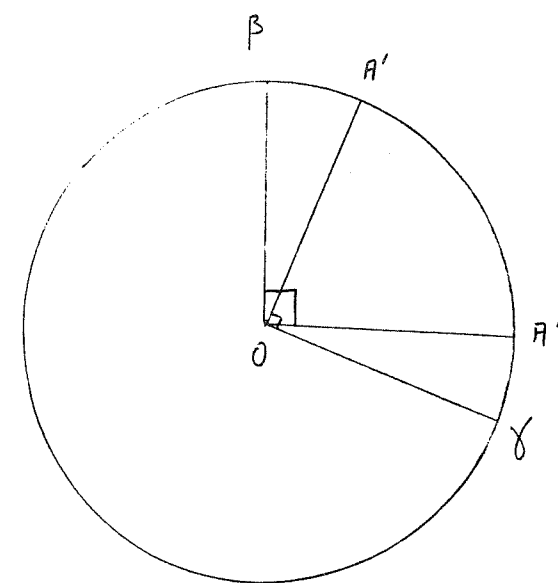


fig. 5

L'existence de ce triangle polaire d'un triangle T est liée à l'existence d'une symétrie dans l'ensemble des formules que l'on peut énoncer à propos de T. En effet, une formule (A), démontrée pour tout triangle, est donc applicable à son triangle polaire, et l'énoncé de cette formule pour le triangle polaire peut être lu comme une autre formule pour le triangle initial.

Prenons l'exemple de la formule

$$\cos a = \cos b \cdot \cos c + \sin b \cdot \sin c \cdot \cos A \quad (A)$$

La même formule, énoncée pour le triangle polaire, donne:

$$-\cos A = \cos B \cdot \cos C - \sin B \cdot \sin C \cdot \cos a \quad (A')$$

qui fournit une autre relation entre les six quantités attachées au triangle initial ; la formule (A') constitue donc *simultanément* la formule (A) énoncée sur un autre triangle et une autre formule, dite alors duale de (A), pour le triangle donné.

La correspondance ainsi établie associe des formules "symétriques" l'une de l'autre : on peut donner une règle simple de transcription (involutive) dont l'application à (A) donnera (A'), ou, plus généralement, une règle dont l'application à une formule donnée donnera la formule "duale". Cette règle prescrit de remplacer chaque angle par le côté opposé, chaque côté par l'angle opposé, et de changer le signe des cosinus. Notons qu'avec les notations introduites par Euler, cet échange des côtés et des angles se traduit, pour ce qui est des formules, par un simple échange des majuscules et des minuscules. C'est l'existence d'une telle règle qui induira une symétrie dans l'ensemble de formules énonçables pour un triangle, symétrie que les artisans d'une organisation de la trigonométrie sphérique vont rencontrer dans la seconde moitié du XVIII^e siècle. Leur projet consiste à identifier un nombre minimal de principes, un nombre minimal de formules, à l'aide desquels, par le simple calcul analytique, déduire l'ensemble des formules nécessaires à la solution de tout problème de trigonométrie sphérique. Ce sera l'occasion pour eux de faire apparaître des parallèles entre formules et même entre démonstrations,

puisqu'elles-ci, dans le contexte de ces travaux analytiques, se présentent comme constituées de suites de transformations algébriques.

Euler apparaît comme l'initiateur de ces travaux, et il proposera successivement deux édifices pour l'ensemble de la trigonométrie sphérique ([Euler 1 et 2]). De nombreux travaux reprendront ce programme, parmi lesquels ceux de De Gua, de Lagrange, de Lacroix... Or la trigonométrie sphérique est un des domaines dont Gergonne, avant sa récapitulation de 1826, donne une présentation mettant en valeur la symétrie. Pour ce faire, il publie un mémoire présenté par Sorlin en 1817 à l'Académie des Sciences, et il semble bien qu'il en retouche le texte pour mieux faire apparaître le phénomène de dualité qui l'intéresse — c'est pourquoi nous le désignons par l'appellation de [Gergonne 2-Sorlin]⁷.

3. Le premier article des *Annales de mathématiques pures et appliquées* en deux colonnes

Du fait de la publication de cet article, associé au nom de Sorlin, nous savons donc avec certitude que Gergonne est conscient dès 1825 de la présence d'un phénomène de dualité en trigonométrie sphérique. Mais, en fait, cette discipline est associée dans les *Annales de Mathématiques Pures et Appliquées* à un événement beaucoup plus important en relation avec la dualité : le premier article à s'y présenter sous forme de double colonne, cet artifice qui sera spécifiquement mis au point pour mettre en valeur la symétrie des présentations que permet la dualité, est un article de Servois, publié en 1811 et qui traite de problèmes de trigonométrie sphérique ([Servois 1]).

Celui-ci reprend les notations introduites par Euler, c'est-à-dire des notations particulièrement bien adaptées pour faire apparaître la dualité, et se propose de démontrer des formules données sans justification par Gauss. Or sa démonstration présente des calculs duaux l'un de l'autre, dans des colonnes qui se font face, et son texte insiste dans son phrasé sur la relation de symétrie qui existe entre ces deux colonnes. On peut remarquer que Servois y semble conscient des travaux analytiques antérieurs en trigonométrie sphérique puisqu'il mentionne : "*Les équations fondamentales de la trigonométrie sphérique sont, comme l'on sait...*". Suit l'énoncé de formules dont une série de travaux de la fin du XVIII^e siècle montre que l'ensemble de la trigonométrie sphérique s'en déduit.

Si, en revanche, on ne sait pas à quel point Gergonne est, lui, averti des travaux de trigonométrie sphérique de la fin du 18^e siècle, il est aisé de prouver qu'il connaît cet article de Servois. Non pas seulement parce qu'il l'inclut dans ses *Annales* mais aussi parce que l'année suivante, il écrit lui-même un article ([Gergonne]) où il met en valeur l'analogie entre trigonométries plane et sphérique, sur cet ensemble même de formules démontrées par Servois dans l'article précité, qu'il mentionne à cette occasion.

Ainsi il semble probable que la présentation en double colonne, où les formules comme leurs démonstrations se correspondent, se manifeste pour la première fois dans un article de trigonométrie sphérique, sans que l'on puisse préciser pour l'instant si c'est du fait de Gergonne, qui réutilisera ce mode de présentation ultérieurement, ou de celui de Servois, qui pourrait donc alors se retrouver à l'origine de ce qui deviendra le "tic de rédaction" de Gergonne. Mais à cela il faut ajouter que, dans le même temps où son journal recourt ainsi à une présentation en double colonne pour la première fois, Gergonne s'interroge, au sujet même du contenu de l'article, sur l'analogie plan/espace, via la comparaison de leurs trigonométries. Il se trouve, de plus, que ce même ensemble de formules constituera la partie II de l'article de 1825 dont Gergonne nous dit qu'il constitue un extrait d'un mémoire de Sorlin et qui, de fait, sera la référence dans les *Annales*, en matière de trigonométrie présentée de manière symétrique.

L'analogie entre plan et sphère est un leit-motiv de la littérature de cette période (on la retrouve soulignée à de multiples reprises à propos de la théorie des transversales

⁷ Sur tous ces points, voir [Chemla, Pahaut].

de Carnot⁸). Elle est souvent explorée sur la base des deux trigonométries. Une fois de plus Gergonne fait allusion à ce thème en 1825, dans l'extrait qu'il donne du mémoire de Sorlin. Il est probablement important qu'elle soit ici mise en lumière alors même que la dualité sur la sphère est en jeu.

De ce premier faisceau d'indices, on peut tirer une conclusion provisoire et faible, sur le rôle joué par la sphère dans la prise en considération de la dualité : la trigonométrie sphérique figure parmi les sujets traités par Gergonne au titre de la dualité, et celui-ci connaissait l'existence de la possible transformation des propositions et des démonstrations dès 1811. Nous verrons, par la suite, qu'il considère cette dualité en trigonométrie sphérique comme connue de tous, ce qui permet d'inférer que ce domaine fut au moins parmi les premiers qu'il considéra sous ce rapport.

Nous voici donc confrontés simultanément à une dualité en trigonométrie sphérique, dont Gergonne est conscient, et à des premiers travaux sur l'analogie plan/sphère. Il est donc tentant de se demander si le rôle conceptuel joué par la sphère s'est limité, simplement, à la reconnaissance de cette dualité, au même titre qu'on a pu la rencontrer dans d'autres domaines, ou si la prise en considération de la dualité a pu bénéficier des comparaisons entre sphère et autres supports géométriques. Il semble bien en fait que nous ayons à choisir cette seconde branche de l'alternative. En effet, les différents sujets que Gergonne rassemble parce qu'ils manifestent cette propriété de dualité interfèrent mathématiquement dans ses travaux. Nous nous proposons d'analyser ces interférences, en nous intéressant spécifiquement à la manière dont la géométrie sphérique interfère avec les autres domaines, sous le rapport de la dualité. Et pour ce faire, nous allons examiner l'article de synthèse publié en janvier 1826.

4. La sphère dans l'article de synthèse de janvier 1826

Répetons-le, dans cet article, Gergonne décrit en toute généralité le phénomène de dualité en mettant en évidence sa présence dans différents domaines de la géométrie. De plus, il y recourt, de part en part, à cette présentation en double colonne, appliquée cette fois non plus à des formules, comme dans l'article de Servois, mais à des énoncés. Ce sont des objets de base qu'il introduit au début de son article qui vont permettre la communication entre les différents substrats de la géométrie que peuvent être la sphère, le plan, l'espace.

4.a Introduction des objets de base

L'article débute par la définition des configurations de la géométrie dont il va traiter : différents objets (droite, point ou plan), en position générale, déterminent des éléments géométriques. Gergonne les introduit en les couplant deux à deux dans des situations duales relativement à la géométrie de l'espace.

C'est ainsi qu'on trouve au départ, dans la colonne de gauche, affectée du numéro 1, l'énoncé suivant : "*deux points, distincts l'un de l'autre, donnés dans l'espace, définissent une droite indéfinie qui, lorsque ces deux points sont désignés par A et B, peut être elle-même désignée par AB.*"

Y fait écho dans la colonne de droite, affectée du même numéro, l'assertion : "*deux plans, non parallèles, donnés dans l'espace, déterminent une droite indéfinie qui, lorsque ces deux plans sont désignés par A et B, peut être elle-même désignée par AB.*" On peut apprécier la syntaxe commune aux deux phrases, ainsi que le jeu des notations duales.

Suivent nombre d'énoncés, à droite et à gauche, qui se répondent de la sorte. Un peu plus loin, les neuvièmes retiendront notre attention dans la mesure où ils s'avèreront jouer un rôle central dans le lien qui sera établi entre tous les phénomènes de dualité. Celui de gauche introduit les polygones :

⁸ voir [Chemla].

"9. Des points en nombre quelconque, situés dans un même plan, peuvent être considérés comme les sommets d'un polygone, dont les côtés sont déterminés par ces mêmes points, pris consécutivement deux à deux, et dans un ordre quelconque, du premier au dernier et de celui-ci au premier."

Celui de droite, lui, par dualité, introduit les angles polyèdres :

"9. Des plans, en nombre quelconque, issus d'un même point de l'espace, peuvent être considérés comme les faces d'un angle polyèdre dont les arêtes sont déterminées par ces mêmes plans, pris consécutivement, deux à deux et dans un ordre quelconque du premier au dernier et de celui-ci au premier."

Ces éléments, polygone et angle polyèdre, sont en fait définis antérieurement dans les *Annales de Mathématiques Pures et Appliquées*, à l'occasion d'un article anonyme de 1819 ([anonyme]), dont nous savons que Gergonne en est l'auteur et où il traite symétriquement de problèmes concernant les polyèdres. Le but de cet article est d'établir quels sont les polyèdres réguliers et les polyèdres semi-réguliers, en un sens qu'il précise. Si leur recherche est présentée d'une manière entièrement symétrique relativement à la dualité, aucune explication n'est donnée pour cette symétrie, pas plus qu'elle n'est commentée, ou annoncée.

L'article en question débute par des analyses symétriques des polygones et des angles polyèdres. Ces deux notions fourniront respectivement les faces et les sommets des polyèdres cherchés, qui reçoivent ainsi une définition où les éléments qui s'échangeront par la dualité sont mis en évidence. Après, donc, avoir défini les polyèdres de manière symétrique pour ce qui concerne la dualité, comme formés de faces et d'angles polyédraux, Gergonne introduit la notion de polyèdres conjugués : "Nous dirons de deux polyèdres qu'ils sont conjugués l'un à l'autre, lorsqu'ayant le même nombre d'arêtes, le nombre de faces de chacun sera égal au nombre de sommets de l'autre et qu'en outre, le nombre des côtés de chaque face de l'un quelconque sera égal au nombre de faces du sommet homologue de l'autre."

La conjugaison peut ainsi être introduite comme un échange face/sommet, donc comme un échange des éléments mis en évidence comme constitutifs des polyèdres. Ces éléments apparaissent conditionner l'introduction de polyèdres duaux l'un de l'autre, et c'est leur correspondance qui permettra un traitement en deux colonnes des propriétés des polyèdres.

4.b Théorèmes sur les triangles et les angles trièdres dans la seconde partie de l'article de 1826

De fait, en 1826, polygones et angle polyèdres sont au coeur de l'article. Les triangles et angles trièdres fournissent la matière des premiers théorèmes duaux l'un de l'autre qui y sont présentés, dans une seconde partie qui s'intitule : "Théorèmes sur les triangles, les quadrilatères, les angles trièdres, les angles tétraèdres." Trois de ces théorèmes et leurs duaux retiendront ici notre attention, car ils concernent directement notre problématique. Donnons tout d'abord leurs énoncés

A gauche, "16. THEOREME : Si deux triangles sont tellement situés dans l'espace que les droites que déterminent leurs sommets correspondants concourent toutes trois au même point, leurs côtés correspondants concourront en trois points qui appartiennent à une même ligne droite." (On reconnaît là le théorème relatif aux triangles homologues, voir figure 6)

A droite, "16. THEOREME : Si deux angles trièdres sont tellement situés dans l'espace que les droites que déterminent leurs faces correspondantes soient toutes trois situées dans un même plan, leurs arêtes correspondantes détermineront trois plans qui se couperont suivant une même ligne droite." (Voir figure 7)

A gauche, "17. THEOREME : Si deux triangles, situés dans un même plan, sont tels que les droites que déterminent leurs sommets correspondants passent toutes trois par un même point, les points que détermineront leurs côtés correspondants appartiendront tous trois à une même droite." (voir figure 6)

A droite, "17. THEOREME : Si deux angles dièdres de même sommet sont tels que les droites que déterminent leurs faces correspondantes sont toutes trois dans un même plan, les plans que détermineront leurs arêtes correspondantes se couperont toutes trois suivant une même droite." (voir figure 7)

A gauche, enfin, "18. THEOREME : Si deux angles dièdres de même sommet sont tels que les plans que déterminent leurs arêtes correspondantes passent toutes trois par une même droite, les droites que détermineront leurs faces correspondantes seront toutes trois dans un même plan." (voir figure 7)

A ceci répond à droite : "18. THEOREME : Si deux triangles, situés dans un même plan, sont tels que les points que déterminent leurs côtés correspondants appartiennent tous trois à une même droite, les droites que détermineront leurs sommets correspondants passeront toutes trois par un même point." (voir figure 6)

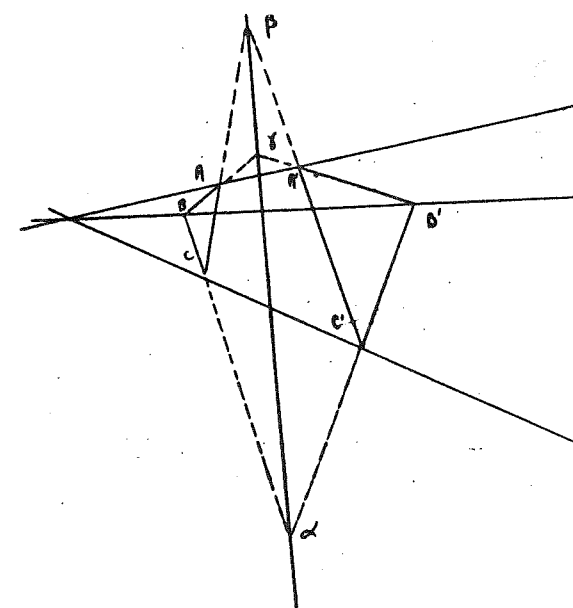


fig. 6

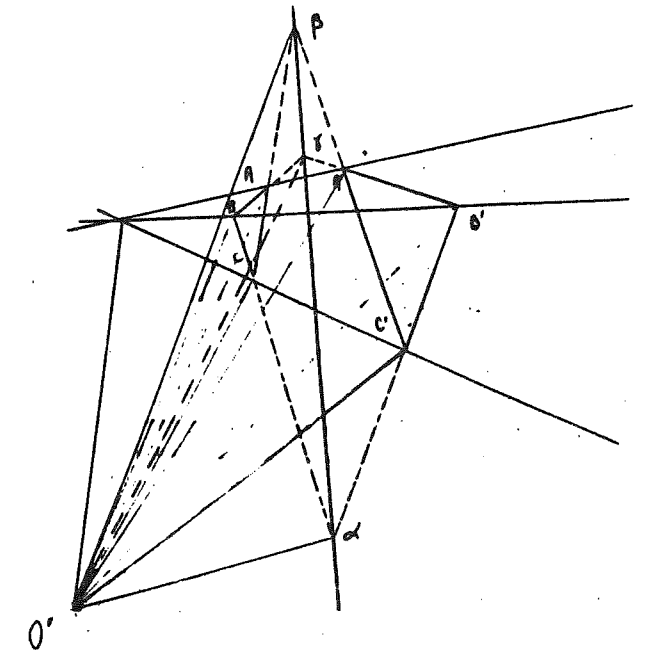


fig. 7

C'est sur cet ensemble de six théorèmes — nous les noterons respectivement 16g, 16d, 17g, 17d, 18g, 18d — que va se nouer, pour la première fois dans cet article,

le noeud unissant les phénomènes de dualité sur le plan, dans l'espace et sur la sphère. En effet, Gergonne poursuit : "La correspondance entre ces divers théorèmes est ici telle que l'exige la géométrie de l'espace". Cependant, dans la géométrie plane, les liens de dualités sont différents : 17g est le dual de 18d. Et ces deux théorèmes, précise-t-il, permettent de résoudre les problèmes suivants, qui fondent la géométrie de la règle et qui sont, par ailleurs, duaux l'un de l'autre (qui fournissent donc à la géométrie de la règle son fondement symétrique relativement à la dualité) :

I : Deux points déterminant une droite inconnue, qu'un obstacle empêche de tracer, trouver sur une droite donnée, en ne faisant usage que de la règle, un troisième point de cette droite.

II : Un point inconnu devant être déterminé par deux droites, qu'un obstacle empêche de prolonger, mener, par un point donné, en ne faisant usage que de la règle, une troisième droite qui passe par ce point.

Mais, poursuit Gergonne, si l'on suppose que le sommet commun des deux angles dièdres devient le centre d'une sphère quelconque, alors 17d devient le dual de 18g, en fournissant sur la sphère des théorèmes analogues aux précédents dans lesquels les droites se trouveront remplacés par des arcs de grands cercles. D'où la possibilité, conclut Gergonne, de résoudre sur la sphère des problèmes analogues aux deux énoncés plus haut, en ne faisant usage que du "Compas-règle".

On trouve ainsi une géométrie de situation sur la sphère, qui présente une dualité dans la mesure où les deux théorèmes qui la fondent sont duaux l'un de l'autre. Ces théorèmes sont, par ailleurs, les mêmes que ceux qui fondent la géométrie de la règle sur le plan.

On a donc ici un schéma d'intrication des propriétés de dualité qui mérite d'être noté : les quatre théorèmes 17 g et d, 18 g et d, sont duaux respectivement l'un de l'autre dans l'espace ; mais on peut les regrouper autrement, en quel cas 17g et 18d, symétriques l'un de l'autre dans le plan, y fournissent la base à la géométrie de la règle, tandis que 17d et 18g, symétriques l'un de l'autre sur la sphère, y fournissent la même base à une géométrie de situation. Ce schéma d'intrication des propriétés de dualité dans l'espace, le plan et la sphère est reproduit, dans la partie suivante de l'article, en ce qui concerne les quadrilatères et les angles quadrièdres.

Ainsi, d'une part, les dualités sont reliées entre elles, et ce, non pas de manière formelle, comme des propriétés partagées par les corpus, mais de manière géométrique, sur les éléments et les théorèmes fondamentaux. D'autre part, les géométries de situation sur différents supports sont articulées l'une à l'autre. De plus, une lumière particulière est jetée sur la relation entre géométrie de situation et dualité. On voit, enfin, le rôle que joue dans cela les éléments fondamentaux que sont les polygones et les angles polyèdres.

La fin de l'article concernera pour l'essentiel les polyèdres. Gergonne poursuit en effet par l'étude de propriétés des tétraèdres, puis d'autres polyèdres ; il obtient en passant des propriétés sur les hexagones. Enfin, il évoque des résultats qu'il a obtenus antérieurement (l'article [Anonyme] de 1819 et [Gergonne 1] de 1825) et suggère qu'ils pourraient être insérés à cet endroit. On peut noter, entre ces deux moments de 1819 et 1825, une évolution dans le traitement de la dualité. Dans l'article de 1819, nous l'avons dit, la symétrie est présente dans la mise en forme du texte, mais n'est pas explicitée. Dans l'article de 1825, Gergonne prolonge des résultats de Legendre en insistant sur le fait que celui-ci n'a pas tenu compte de la symétrie possible des travaux sur les polyèdres. La relation de conjugaison entre polyèdres, qui était introduite *ex abrupto* en 1819 est ici introduite en relation avec une transformation géométrique qui permet de passer d'un polyèdre à un polyèdre conjugué, la transformation par polaires réciproques. Dans le premier article, Gergonne travaillait sur les polyèdres en se servant de la symétrie de l'ensemble des polyèdres. Dans le second, Gergonne établit des théorèmes sur les polyèdres, symétriques les uns des autres. Dans le premier cas, la symétrie affecte l'ensemble des objets ; dans le second l'ensemble des énoncés.

Cette analyse nous amène donc à une seconde conclusion provisoire, pour ce qui concerne la relation entre sphère et autres supports, en matière de dualité : Gergonne met en évidence le fait que les différents domaines (plan, sphère, espace) présentent des propriétés de dualité interagissant les unes avec les autres. De plus, c'est en recourant aux éléments duaux qui constituent les polyèdres qu'il passe du plan à la sphère et lie leurs propriétés de dualité.

Mais, si ces dualités sont présentées comme articulées les unes aux autres, cela ne nous permet pas encore de savoir comment Gergonne conçoit cette liaison, comment il l'a faite travailler réellement. Or on peut préciser ce point : il suffit pour cela de se pencher sur la manière dont il rend compte de la dualité (point sur lequel il s'oppose à Poncelet) et sur un autre des thèmes de sa querelle avec Poncelet, qui, prenant la trigonométrie sphérique comme enjeu, nous apportera des informations historiques.

5. Comment rendre compte de la dualité ?

Pour Gergonne, l'intention de l'article de 1826 est clair. Il s'agit de mettre en évidence les relations de symétrie systématiques qu'entretiennent énoncés et démonstrations. Il précise que, d'un point de vue mathématique, la présentation qu'il choisit est redondante : "nous pourrions nous borner à démontrer seulement une moitié de nos théorèmes et à en déduire l'autre moitié à l'aide de la théorie des pôles." Certes, on passe d'un énoncé à l'énoncé dual au moyen d'une transformation géométrique. Il y insiste ici comme dans tous ses articles. La transformation par polaires réciproques peut rendre compte de la dualité dans les polyèdres par exemple, où elle sous-tend la relation de conjugaison entre les solides ([Gergonne 1]). Ailleurs, en trigonométrie sphérique, c'est le triangle polaire ou supplémentaire qui joue ce rôle ([Gergonne 2-Sorlin]). Transformation par polaires réciproques et triangle supplémentaire mettent tous deux en évidence qu'il est une propriété qui transcende les frontières entre les disciplines et qui, dans chaque cadre, peut être mise en relation avec un événement particulier.

Mais ces différents expédients géométriques ne jouent, pour Gergonne, que le rôle de révélateur de propriétés qui, en fait, se rapportent à l'espace lui-même et qui se manifestent dans les discours mathématiques, pour peu qu'ils reçoivent la mise en forme adéquate. En effet, ces différentes transformations géométriques ne rendent pas compte de la relation particulière et permanente qui se noue entre les propriétés ainsi mises en liaison l'une avec l'autre, et c'est ce lien, avec son aspect linguistique, qui intéresse Gergonne.

En fait, si aucun d'entre eux ne songe à nier qu'il y ait une relation entre ces transformations et la dualité, Gergonne et Poncelet sont en désaccord sur la manière dont il faut l'interpréter. Ils sont tous deux intéressés par la dualité en tant qu'elle est un moyen de transformer des énoncés. Mais, pour Poncelet, la transformation par polaires réciproques exprime une analogie qui est constatée sur les énoncés, elle en fait la théorie rigoureuse. Elle permet de comprendre cette analogie, de même que les principes des projections et de continuité rendent compte d'autres types d'analogies qui se présentent en géométrie. En revanche, pour Gergonne, si ces transformations rendent compte de la dualité, elles ne font que la mettre en évidence : celle-ci est une propriété de l'espace, indépendante des supports qui la révèlent. De fait, il peut y avoir plusieurs moyens géométriques de mettre en évidence cette dualité, aucun d'entre eux n'en donne l'essence.

Or, dans la livraison du *Bulletin de Férussac* de février 1826, Gergonne, signant du nom de Saigey un compte rendu qu'il écrit lui-même de son propre article de janvier 1826 ([Gergonne 4]), s'il faut en croire Poncelet, loin de rapporter le contenu de l'article, le prolonge. Et cette suite nous intéresse ici dans la mesure où Gergonne s'y attache à donner une deuxième manière de rendre compte géométriquement de la dualité dans le plan, et explicite, ce faisant, un moyen géométrique d'articuler dualité sur la sphère et dualité sur le plan. Donnons-lui la parole :

" Soit une figure plane tracée en encre noire sur un plan, et dont la propriété consiste en ce que plusieurs groupes de points y sont en ligne droite, tandis que plusieurs groupes de droites y concourent en un même point.

Concevons que l'on fasse, aussi en encre noire, une perspective de cette figure sur la surface d'une sphère, l'œil étant supposé au centre.

Cette perspective sera une figure sphérique dans laquelle divers groupes de points seront distribués sur des arcs de grands cercles, tandis que divers groupes d'arcs de grands cercles y concourront en un même point.

Concevons que, sur la même sphère, on dessine en encre rouge tous les grands cercles dont les points de la première seront les pôles, ainsi que les pôles de tous les grands cercles de celle-ci ; comme les arcs de grands cercles qui concourent en un même point ont leurs pôles sur un même arc de grand cercle et réciproquement : il arrivera que la figure en encre rouge offrira autant de groupes de points distribués sur des arcs de grands cercles que la figure en encre noire offrait de groupes d'arcs de grands cercles concourant en un même point et que la figure en encre rouge⁹ offrira, à l'inverse, autant de groupes d'arcs de grands cercles concourant en un même point, que la figure en encre noire offrait de groupes de points appartenant à des arcs de grands cercles.

En outre, il y aura autant de points ou d'arcs dans chaque groupe de l'une des figures qu'il y aura d'arcs ou de points dans le groupe correspondant de l'autre figure. Or la figure en encre rouge peut toujours être considérée comme la perspective d'une figure plane tracée sur le plan de la figure primitive ; et si l'on y trace, toujours en encre rouge, cette nouvelle figure plane, on aura sur un même plan, deux figures de couleurs différentes, qui auront évidemment entre elles les mêmes relations que nous venons de remarquer dans les figures sphériques correspondantes, si ce n'est que les arcs de grands cercles s'y trouveront remplacés par des lignes droites.

Il résulte évidemment de ces considérations que si une figure plane composée de points assujettis à être distribués sur des droites et de droites assujetties à concourir en divers points est possible, une autre figure dans laquelle les points en ligne droite seraient remplacés par des droites concourant en un même point, et réciproquement, sera aussi possible.

D'où il suit que les théorèmes relatifs à de telles figures sont toujours doubles ; de telles sorte que les deux d'un¹⁰ même couple ne diffèrent uniquement qu'en ce que les mots point et droite y sont permutés entre eux. Il faut seulement excepter le cas où le théorème serait symétrique par rapport aux points et aux droites, car alors il serait lui-même son correspondant..."

L'expédient géométrique rendant ici compte de la dualité sur le plan recourt à une projection de la sphère, et articule dualité sur le plan et dualité sur la sphère, en montrant leur parallélisme. Nous retrouvons donc, comme dans l'article de 1826, la sphère au centre du dispositif de la dualité, et ceci jette un jour intéressant sur une terminologie introduite, par Servois justement, dans les *Annales de Mathématiques Pures et Appliquées* : ce sont les termes de pôle et polaire qui sont choisis pour désigner les éléments qui se correspondent par la transformation géométrique associée à la dualité. Remarquons aussi que dans ces deux textes, à la différence du cas de la trigonométrie sphérique, la sphère intervient par ses propriétés de position et non plus par ses propriétés métriques.

Dans la suite de son "compte rendu", Gergonne recourra à un autre type de révélateur géométrique de la dualité : la théorie des pôles et polaires. Il précise alors son avantage sur la projection sphérique : elle va lui permettre de rendre compte également de la dualité dans l'espace, et non pas seulement dans le plan.

⁹ En fait, le texte comporte ici l'adjectif "noire", qui est évidemment inexact.

¹⁰ Une coquille met ici "une", dans le *Bulletin de Férussac*.

Le rôle de la sphère se dessine donc plus précisément. Une question cependant demeure : quel est le statut de cette explication de la dualité qui recourt à la sphère ? Un élément de la querelle Gergonne-Poncelet va nous permettre de le préciser plus avant.

6. Dualité des propriétés métriques ou dualité des propriétés de situation

De plusieurs manières, Gergonne insiste sur l'indépendance entre les caractères des propriétés et les caractères de leurs démonstrations. C'est cela qui est en jeu dans la relation de la dualité avec la transformation par polaires réciproques : la manière de mettre en évidence géométriquement la dualité n'est pour rien dans la propriété elle-même, qui a lieu "en vertu de la nature même de l'étendue". C'est encore cela qui est en jeu quand il énonce, toujours dans son article [Gergonne 3], que les propriétés susceptibles d'être duales sont des propriétés de situation. Peu importe si leur démonstration recourt ou non à des relations métriques, ne seront duales, selon Gergonne, que des propriétés par nature "de situation".

Or Poncelet va montrer que les propriétés métriques sont aussi susceptibles d'être mises en dualité. Il présente un mémoire à l'Académie à ce sujet, le mémoire sur les polaires réciproques, en 1824, et à la demande de Gergonne, lui adresse une lettre résumant les conclusions du mémoire, le 10 décembre 1826. C'est le point de départ d'une suite d'événements qui vont nous ramener à la sphère. En effet, Gergonne publie en mars 1827 un extrait de cette lettre dans ses *Annales*. En mai 1827, cet extrait est recensé dans le *Bulletin de Férussac* : Poncelet s'y trouve présenté comme poursuivant la lignée de travaux inaugurés par Gergonne. De plus, la dualité des propriétés métriques qu'il a introduite est mise en relation avec la dualité en trigonométrie sphérique. On y lit en effet : "A la page 112 de notre *Bulletin* de février 1826, nous avons rendu compte d'un mémoire de M. Gergonne [il s'agit de [Gergonne 3] et du compte-rendu que nous avons présenté] ayant pour but de prouver que tous les théorèmes de la géométrie qui ne sont relatifs qu'à la situation respective des parties d'une figure, et non à leur grandeur, doivent nécessairement être doubles, comme le sont en effet les théorèmes relatifs aux hexagones inscrits et circonscrits aux lignes du second ordre et comme le sont aussi tous les théorèmes de trigonométrie sphérique. Dans un mémoire présenté récemment à l'Académie Royale des Sciences, M. Poncelet a repris ce sujet avec de plus amples développements ; il a trouvé qu'un grand nombre de théorèmes relatifs à des relations métriques, soit d'angles, soit de longueurs, étaient, comme les théorèmes de situation, susceptibles de cette sorte de dualité signalée par M. Gergonne..."

Pour Poncelet, ce sera l'amorce de la crise. Août 1827 : il explose dans le *Bulletin de Férussac*. Il souligne que Gergonne ne s'est penché que sur la dualité des propriétés de situation et voit, dans la mention faite à la trigonométrie sphérique, une tentative de ce dernier de s'approprier la paternité de propriétés métriques duales les unes des autres. On lit dans sa réponse : "Le lecteur remarquera que ces recherches de M. Gergonne ne comprennent que les relations de situation du point, de la ligne droite et du plan, dont la réciproque ou la dualité est de première évidence, et que c'est par erreur que l'auteur de l'article cité du *Bulletin* mentionne aussi tous les théorèmes de la trigonométrie sphérique, puisque Monsieur Gergonne ne s'en est pas occupé."

Novembre 1827 : Gergonne reprend dans ses *Annales* (tome XVIII) cet article de Poncelet et l'annote, en guise de défense. Voici la note qu'il introduit en réponse à l'énoncé de Poncelet cité : "Dire que les théorèmes dont je me suis occupé sont doubles, comme le sont ceux de la trigonométrie sphérique, ce n'est point dire (...) que je me sois occupé de ces derniers ; ce que disent là MM. les rédacteurs [du *Bulletin de Férussac*] me paraient n'être que la suite des idées qu'ils avaient mises en avant dans un autre article." Et là de renvoyer au soi-disant compte rendu de son article de janvier 1826 dans ce *Bulletin*, que nous avons longuement cité et qui mettait la sphère au centre de considérations sur la dualité. Il poursuit : "Il aurait été fort inutile d'ailleurs que je m'occupasse de la dualité des théorèmes de la trigonométrie sphérique, car il n'est, je pense, aucun géomètre

pour qui cette dualité soit un mystère." Et là, à nouveau, de renvoyer au mémoire de Sorlin qu'il a inclus dans les *Annales*.

Deux points peuvent être retenus ici. Le premier n'est pas pour nous étonner : Gergonne pense connue de tous la dualité qui se manifeste en trigonométrie sphérique. Le second est plus révélateur. Lorsque Gergonne se défend contre le fait que la mention de la trigonométrie sphérique, dans le compte-rendu de l'article de Poncelet, ait pour but de s'assurer la paternité des propriétés métriques duales, il éprouve le besoin d'explicitier une raison au fait de rapprocher la dualité en général de celle qui se manifeste en trigonométrie sphérique en particulier. Or la raison qu'il donne alors est de renvoyer le lecteur au compte rendu de son propre article, paru en février 1826 dans le *Bulletin de Férussac*. Il s'agit là justement du texte qui vise à rendre compte de la dualité dans le plan par un passage à la dualité sur la sphère. Ceci nous ramène à lire tout autrement l'énoncé incriminé par Poncelet : "nous avons rendu compte d'un mémoire de M. Gergonne ayant pour but de prouver que tous les théorèmes de la géométrie qui ne sont relatifs qu'à la situation respective des parties d'une figure, et non à leur grandeur, doivent nécessairement être doubles, comme le sont en effet les théorèmes relatifs aux hexagones inscrits et circonscrits aux lignes du second ordre et comme le sont aussi tous les théorèmes de trigonométrie sphérique" (je souligne). Si l'on suit ce qu'en dit Gergonne, on peut être tenté de comprendre que la phrase renverrait à la relation géométrique entre les diverses dualités que la projection sphérique permet d'établir. La sphère apparaît ici moins comme un des modèles sur lequel on a de la dualité que comme la raison fondamentale. Elle serait ce à partir de quoi les propriétés de dualité sur d'autres supports se seraient greffées, et semble ainsi avoir contribué à permettre de prendre en considération le phénomène pour lui-même.

Conclusion

Récapitulons-nous. Nous avons pu tout d'abord montrer que Gergonne a travaillé sur la dualité en trigonométrie sphérique, dans le même temps qu'il travaillait à l'analogie entre le plan et la sphère, via la comparaison entre leurs trigonométries. De plus, nous avons vu qu'à l'occasion d'un travail sur les polyèdres, il introduit des éléments géométriques qui permettent une présentation symétrique de recherches sur ces objets mathématiques et les reprend dans son travail de synthèse sur la dualité pour mettre en évidence l'intrication des relations de dualité dans le plan, sur la sphère et dans l'espace, intrication qui va de pair avec la constatation d'une analogie des géométries de situation sur le plan et sur la sphère. Le commentaire qu'il donne lui-même de cet article montre qu'il pense de manière très concrète à la relation entre dualité sur le plan et dualité sur la sphère. C'est une transformation géométrique qui lui permet de passer de l'une à l'autre : la dualité sur la sphère met en évidence la dualité sur le plan de même que le faisait la transformation par polaires réciproques. Le rôle que joue la trigonométrie sphérique dans la querelle avec Poncelet permet enfin de montrer la prééminence, pour Gergonne, du cas de la sphère dans la question de la dualité.

On est ainsi passé de l'analogie entre sphère et plan sur les relations métriques de la trigonométrie à l'analogie de leur propriétés de situation, on est passé du calcul à la géométrie. En fait ce passage du calcul, qui accompagne le traitement analytique, à la géométrie de situation, est celui-là même que manifeste le texte de trigonométrie de Gergonne-Sorlin lorsqu'on le compare aux textes de la seconde moitié du 18^e siècle. De la sphère au plan, du calcul à la géométrie, la dualité a suivi, qui intervient de manière fondamentale dans l'instauration de la géométrie de situation.



BIBLIOGRAPHIE

- [anonyme] "Recherches sur les polyèdres, renfermant en particulier un commencement de solution du problème proposé à la page 256 du VII^e volume des *Annales*", *Annales de mathématiques pures et appliquées*, tome IX, n° 10 (1819), pp. 321-44.
- [A. von Braunmühl 1] "Zur Geschichte des Supplementardreiecks", *Bibliotheca Mathematica*, vol. 13 (1898) pp. 65-72.
- [A. von Braunmühl 2] *Vorlesungen über Geschichte der Trigonometrie*, deux volumes, Teubner, Leipzig, 1903.
- [M. Chasles] *Aperçu historique sur l'origine et le développement des Méthodes en Géométrie*, in 4°, Bruxelles, 1837.
- [K. Chemla] "Remarques sur les recherches géométriques de Lazare Carnot", in J.P. Charnay (sous la direction de), *Lazare Carnot ou le savant-citoyen*, Presses de l'Université de la Sorbonne, 1990, pp. 525-41.
- [K. Chemla, S. Pahaut] "Préhistoires de la dualité : explorations algébriques en trigonométrie sphérique (1753-1825)" in *Sciences à l'époque de la Révolution Française*, sous la direction de R. Rashed, Blanchard, 1988, pp. 151-200.
- [A. Dahan] "Un texte de philosophie mathématique de Gergonne", *Revue d'Histoire des Sciences XXXIX/2* (1986) pp.97-126.
- [M. T. Debarnot 1] "Introduction du triangle polaire par Abu Nasr b. Iraq", *Journal for the History of Arabic Science*, vol. 2, n° 1 (1978), pp. 126-136.
- [M. T. Debarnot 2] *Al Bīrūnī, Kitāb Maqālīd 'Ilm al-Hay' a, La trigonométrie sphérique chez les arabes de l'Est à la fin du 10^e siècle*, Damas, 1985, Institut Français de Damas.
- [L. Euler 1] "Principes de la trigonométrie sphérique tirés de la méthode des plus grands et des plus petits", *Mémoires de L'Académie des Sciences de Berlin*, 9 (1753), 1755, pp.223-257. *Opera Omnia*, vol. XXVII de la première série, (édité by A. Speiser), Lausanne, MCMLIV, pp.277-308.
- [L. Euler 2] "Trigonometria spaerica universa ex primis principiis breviter et dilucide derivata" *Acta Academiae Scientiarum Imperialis Petropolitanae* 3, I (1779), 1782, pp. 72-86. *Opera Omnia*, vol. XXVI de la première série, (édité par A. Speiser), Lausanne, MCMLIII, pp. 224-236.
- [J.D. Gergonne] "Démonstration de quelques formules de trigonométrie rectiligne et de trigonométrie sphérique", *Annales de Mathématiques Pures et Appliquées*, volume 3, (1812) pp.348-52.
- [J.D. Gergonne 1] "Recherche de quelques-unes des lois générales qui régissent les polyèdres", *Annales de Mathématiques Pures et Appliquées*, volume XV, (1825) pp.157-164.

[J.D. Gergonne 2 -Sorlin] "Recherches de trigonométrie sphérique", par M. Sorlin, *Annales de Mathématiques Pures et Appliquées*, volume XV, (1825, pp. 273-305) : Gergonne donne un extrait d'un mémoire de Sorlin (présenté à l'Académie des sciences le 27 octobre 1817).

[J.D. Gergonne 3] "Considérations philosophiques sur les éléments de la science de l'étendue", *Annales de Mathématiques Pures et Appliquées*, volume XVI, (1826) pp. 209-231.

[J.D. Gergonne 4] "Compte rendu des *Annales de Mathématiques Pures et Appliquées* ; par M. Gergonne. Tome XVI, n° 6 et 7, déc. 1825 et janv. 1826." dans *Bulletin des sciences mathématiques, physiques et chimiques* 5, (1826) pp. 108-116.

[L. Giard] "La "dialectique rationnelle" de Gergonne", *Revue d'Histoire des Sciences* XXV (1972) pp.97-124.

[M. Otero] "Mathematical Logic and its Philosophy in the nineteenth century : J.D. Gergonne", exposé présenté au 15th International Conference on the History of Science; un résumé en a été inclus dans les actes.

[A. Schoenflies] "Géométrie projective" (adaptation française d'A. Tresse) in *Encyclopédie des sciences mathématiques*, tome III, vol. 1, fasc. 1, édition française, sous la direction de J. Molk, du tome III (*fondements de la géométrie*) de l'édition allemande rédigée, elle, sous la direction de F. Meyer.

[Servois 1] "Démonstration de quelques formules de trigonométrie sphérique", *Annales de Mathématiques Pures et Appliquées*, tome II, 1811, pp. 84-88.

[D. J. Struik] Notice sur "Gergonne" dans le *Dictionary of Scientific Biography*.

MATHEMATIQUES ET RETHORIQUE

Les algébristes parisiens avant Viète

Giovanna CIFOLETTI

Je présenterai ici ma recherche dans son sens général. Par conséquent, au lieu d'explicitier les détails, comme souvent il serait souhaitable, je me bornerai à indiquer comment plusieurs histoires différentes sont les aspects d'une même histoire.

En outre, je me bornerai ici à prendre en considération l'algèbre après sa transmission du monde arabe en Occident. L'élément principal de la reconstruction historique de la transmission est le traité de Leonardo Fibonacci da Pisa, le *Liber Abbaci* de 1202. Ce texte contient de l'algèbre d'Al Kwarizmi, Al Karaji et Abu Kamil. L'histoire dont je m'occupe commence quand Luca Pacioli, après avoir consulté le manuscrit de Fibonacci, publia un texte de mathématiques abacistes, la *Summa de arithmetica, geometria, proportioni et proportionalita*, publiée à Venise en 1494.

1 - La "révolution algébrique"

Une des certitudes de l'histoire de l'algèbre est que cette partie des mathématiques connût une période de grand développement entre la fin du XVI^e et le début du XVII^e siècle.

Ce développement permit à l'algèbre de se constituer en discipline et de devenir *arsanalytica*, selon l'expression de Viète, ou, selon notre terminologie, l'algèbre symbolique et théorie des équations. Par conséquent, ce développement changea la façon d'écrire non seulement la géométrie, mais l'ensemble des sciences mathématiques, déterminant ainsi la naissance du calcul infinitésimal et de disciplines dérivées, comme la mécanique rationnelle.

Cette perspective, partagée par les historiens, est souvent interprétée d'une manière plus radicale, selon laquelle la transformation de l'algèbre pendant cette période doit être considérée comme une véritable révolution, et une partie fondamentale de la révolution scientifique. L'algèbre de Descartes et de Viète, ou plutôt l'algèbre de Viète vue à partir de l'algèbre de Descartes, acquièrent le statut de modèle de l'algèbre, et la dénomination d'algèbre symbolique. De ce point de vue donc, l'algèbre qui précède ne peut rien expliquer des œuvres de Viète et de Descartes, car elles n'appartiennent ni à un genre ni, plus généralement, à une tradition. Ce qui les précède n'est qu'algèbre cossique, c'est-à-dire un simple calcul avec l'inconnue (*cosa*). En effet, la transformation de l'algèbre fut telle qu'elle la rendit méconnaissable. Il faut dire que ce même problème fut probablement à l'origine du fait que les œuvres de Viète ne furent pas comprises pendant quelques décennies.

D'autre part, on admet l'appartenance, ou du moins un rapport direct, de l'algèbre à la tradition des arithmétiques commerciales, dont l'algèbre cossique serait l'héritage au XVI^e siècle. On parvient ainsi à une thèse historiographique analogue à celle qui concerne le processus d'autres "arts" devenues disciplines (de la dissection à la balistique). Dans le cas de ces dernières, la transformation remarquable qui eut lieu dans cette période est précédée par un grand développement des techniques par les artisans.

La thèse affirme donc que les découvertes qui marquèrent un grand développement de l'algèbre occidentale, comme les formules pour les équations du troisième et quatrième degré, furent faites à l'extérieur du cadre de l'université, dans les écoles d'abaque. Par conséquent, l'algèbre symbolique de Viète et Descartes serait constituée de la fusion des résultats de l'algèbre abaciste, de la redécouverte de Diophante et du regain de l'analyse grecque, et du génie des deux auteurs, tandis que les universités s'occupaient d'enseigner uniquement les *Eléments* d'Euclide. Ma recherche modifie cette thèse de plusieurs façons, mais surtout en soulignant les changements qui eurent lieu pendant le XVI^e siècle. Avant de nous occuper des algébristes parisiens avant Viète, il faudra donc traiter brièvement du rôle de l'algèbre abaciste.