ANNEXE V

Raiſons qu'on peut apporter pour prouver le mouvement de la Terre.

IL faut ou que tous les Corps celeſtes tournent en 24. heures autour de la Terre, ou que la Terre tournant ſur elle-même attribuë ce mouvement aux Corps celeſtes. Examinons lequel des deux eſt le plus vraiſemblable.

Toutes les Planetes font leurs grandes revolutions autour du Soleil, mais ces revolutions ſont inegales entr'elles ſelon les diſtances où les Planetes ſont du Soleil. Les plus éloignées font leurs cours en plus de tems, ce qui eſt fort naturel. Cet ordre s'obſerve même entre les Planetes ſubalternes qui tournent autour d'une grande. Les quatre Satellites de Jupiter, les cinq de Saturne font leurs cercles en plus ou moins de tems autour de leur grande Planete, ſelon qu'elles en ſont plus ou moins éloignées.

De plus les Aſtronomes ont remarqué que les Planetes ont des mouvemens ſur leur centre. Ces mouvemens ſont encore inégaux. On ne ſçait pas bien ſur quoi ſe regle cette ingalité, ſi c'eſt ſur la differente groſſeur des Planetes, ou ſur la differente vîteſſe des Tourbillons particuliers qui les renferment, & des matieres fluides où elles ſont portées; mais enfin l'inégalité eſt certaine, & en général tel eſt l'ordre de la nature, que ce qui eſt commun à pluſieurs choſes, ſe trouve en même-tems varié par des differences particulieres.

Or ſi les Planetes tournoient autour de la Terre, elles tourneroient en des tems inégaux ſelon leurs diſtances, ainſi qu'elles font autour du Soleil. Leurs diſtances inégales à l'égard de la Terre, leurs differentes groſſeurs, & la differente vîteſſe des Tourbillons particuliers où elles ſont renfermées, devroient produire des differences dans ce mouvement prétendu autour de la Terre, auſſi-bien que dans tous les autres mouvemens; & les Etoiles fixes, qui ſont ſi prodigieuſement éloignées de la Terre, ſi fort élevées au-deſſus de tout ce qui pourroit prendre autour de nous un mouvement général, du moins ſituées en lieu où ce mouvement devroit être affoibli; n'y a-t-il pas bien de l'apparence qu'elles ne tournent pas autour de nous en 24. heures, comme pourroit faire la Lune qui en eſt ſi proche? Les Cometes qui ſont étrangeres dans notre Tourbillon, qui y tiennent des routes ſi differentes les unes des autres, qui ont auſſi des vîteſſes ſi differentes, ne devroient-elles pas être diſpenſées de tourner autour de nous dans ce même tems de 24. heures?

Tout bien conſideré, cette inégalité ſi exacte qui nous paroît dans le mouvement diurne de tous les Corps celeſtes, eſt un grand préjugé à faire croire que c'eſt plûtôt la Terre qui tournant ſur elle-même en 24. heures, leur attribuë ce mouvement.

A quoi nous ajoûterons, que ſi les Cieux tournent en 24. heures autour de la Terre, la vîteſſe de leur mouvement eſt inconcevable, puiſque ſuivant les diſtances de la Terre aux Planetes, rapportée ci-devant, le Soleil feroit en une heure de tems 8250000.

En finiſſant ce Chapitre & l'explication des differens ſyſtêmes du Monde, il faut avertir ceux qui aiment l'Aſtronomie de ne pas trop s'embaraſſer à déterminer quel eſt le veritable : car quoique les ſyſtêmes de Copernic, de Tycho & de Martianus Capella different entr'eux, ils s'accordent neanmoins en ce qu'ils donnent tous la même ſolution, c'eſt-à-dire qu'ils expliquent parfaitement bien les phenomenes ou aparences tant du premier que du ſecond

14 DE LA SPHERE DU MONDE.

mouvement des Aſtres, quoiqu'il y en ait qui les démontrent plus facilement les uns que les autres, comme eſt celui de Copernic; c'eſt juſqu'où la connoiſſance humaine peut aller: car il eſt impoſſible de découvrir & de montrer de quelle maniere le Createur du Monde a fait mouvoir les Aſtres quand il les a tirez du neant, & quel eſt l'ordre & la diſpoſition qu'il leur a donnée dans le ſyſtême qu'il en a fait, pouvant diverſifier en une infinité de manieres; il eſt impoſſible, dis-je, de ſçavoir lequel eſt celui qui eſt en uſage dans la nature; cela fait qu'il faut ſe contenter de ce que l'on en peut ſçavoir, & entre ces ſyſtêmes chacun peut choiſir celui qui lui revient le mieux: & même plaçant immobile au centre du Monde telle Planete qu'on voudra ſuppoſer, & faiſant tourner toutes les autres autour d'elle, on fera autant de ſyſtêmes qu'il y a de Planetes differentes, leſquelles quoique fort diſſemblables, pourroient tous donner le même lieu des Planetes dans le Ciel, & expliquer également bien toutes les apparences des mouvemens celeſtes.

quelques pages de "L'usage des globes ~~célestes~~ célestes et terrestres, et des sphères suivant les différents systèmes du Monde"

par le Sieur Bion,

PARIS. 1739.

MUSIQUE ET MATHEMATIQUES

Anne BOYE IREM de Nantes

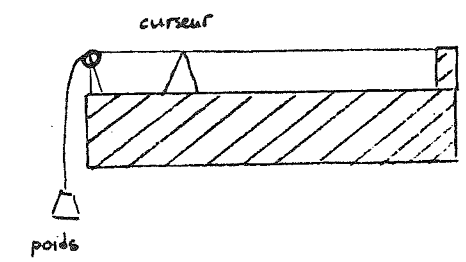
Il s'agit ici à travers quelques textes d'esquisser une brève approche de la construction des gammes et de la théorie des consonances dans la musique occidentale, de donner quelques clés à ceux qui voudraient par la suite approfondir ce domaine.

Il est acquis à la plupart d'entre nous sans doute que musique et mathématiques sont liées, au moins sur le plan théorique. La lecture de ces textes permettra de mesurer quel fut le cheminement commun de ces deux "arts", comment se sont mêlées au cours des temps les considérations physiques, esthétiques, philosophiques et mathématiques et, pour reprendre d'Alembert, comment la musique a été considérée sous le double point de vue "de l'art qui a pour objet l'un des principaux plaisirs des sens et de la science par laquelle cet art est réduit en principes".

Le premier texte *La division du Canon* que l'on peut trouver en annexe des *Livres arithmétiques d'Euclide* traduits et commentés par Jean Itard, va nous permettre d'aborder quelques aspects de la musique grecque antique. Il n'est pas bien sûr ici question d'étudier au plein sens du terme cette musique, mais de donner quelques points de départ pour une étude plus approfondie.

Le texte d'Euclide se présente comme tout autre texte mathématique et les propositions énoncées sont l'exacte réplique de certains des éléments arithmétiques, si ce n'est le vocabulaire ; l'axiome de départ indique que sont consonants les sons qui ont entre eux un intervalle multiple ou superparticulier (un nombre superparticulier est un nombre formé de l'unité plus une fraction de l'unité comme 1 + 1/2, 1 + 1/3, etc). A partir de là, il s'agit de comparer et de composer les intervalles pour savoir comment obtenir des consonances.

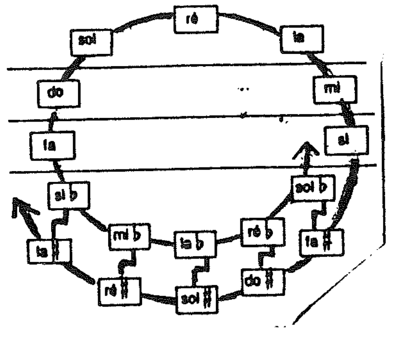
Ce petit texte est dans l'exacte tradition de la musique pythagoricienne, qui a fixé la musique sur des bases numériques. La musique a d'évidence une base expérimentale, un instrument de musique très répandu et très privilégié pour l'étude des sons et leur théorisation est le monocorde, simple corde tendue sur un chevalet (ou canon harmonique, d'où le titre division du canon).



A l'aide du curseur, on peut faire varier la longueur de la corde et étudier la différence de hauteur de sons qui en résulte et l'on constate qu'il existe une correspondance entre la hauteur des sons et la longueur de la corde. Les longueurs des sons sont inversement proportionnelles aux intervalles des sons . Puis on fera varier la tension de la corde grâce au poids. Ce qui ressort, essentiellement, c'est que l'étude des sons revient à l'étude de rapport de nombres.

Certains rapports simples se mesurent facilement. Ainsi quand la longueur est multipliée par deux, on obtient le même son plus grave. Et l'intervalle obtenu de 2 à 1 s'appelle octave. Si l'on prend une fois et demi la longueur de corde initiale, on obtient un nouveau son et l'intervalle obtenu de 3 à 2 s'appelle une quinte. Le complément de la quinte à l'octave caractérisé par le rapport $\frac{2}{1} : \frac{3}{2}$ soit $\frac{4}{3}$ s'appelle quarte.

Le système pythagoricien est basé sur la quinte.



Cependant le système n'est pas fermé : le produit de 12 quintes est légèrement supérieur à 7 octaves. La différence est :

$$\left(\frac{3}{2}\right)^{12} : 2^7 = \frac{531441}{524288} \approx \frac{74}{73}$$

Pour déterminer les "notes" d'une gamme, on ramène les rapports à l'octave en les divisant autant de fois que nécessaire pour obtenir un nombre compris entre 1 et 2. Pour la gamme de Pythagore, on obtient :

do	ré	mi	fa	sol	la	si	do
1	$\frac{9}{8}$	$\frac{81}{64}$	$\frac{4}{3}$	$\frac{3}{2}$	$\frac{27}{16}$	$\frac{243}{64}$	2

La "différence" entre une quinte et une quarte, $\frac{3}{2} : \frac{4}{3}$ soit $\frac{9}{8}$, est un *ton.* Il y a 5 tons, tous égaux.

Avec le cycle des quintes ascendantes, on obtient les notes dièses, avec le cycle des quintes descendantes on obtient les notes bémols. Par exemple entre do et ré vont s'installer:

do $\quad$ ré^b $\quad$ do# $\quad$ ré

do# $\quad$ correspond au rapport $\left(\frac{3}{2}\right)^7$ ramené à l'octave: $\frac{3^7}{2^{11}}$

ré^b $\quad$ correspond au rapport $\left(\frac{2}{3}\right)^5$ ramené à l'octave: $\frac{2^8}{3^5}$

La "différence" entre do# et ré^b est $\frac{3^7}{2^{11}} : \frac{2^8}{3^5} = \frac{3^{12}}{2^{19}}$ qui est le rapport précédemment trouvé pour la différence entre 12 quintes et 7 octaves. Cet intervalle est appelé *comma*

pythagoricien. Nous ferons une dernière remarque sur la gamme pythagoricienne : toutes les notes sont des nombres de type $2^a 3^b$. Ceci aura une importance pour la suite.

On ne peut bien sûr réduire la musique grecque à ce bref aperçu. Le texte sur la division du canon reflète l'école d'Eudoxe et d'Archytas ; il y en a d'autres comme celle d'Aristoxène de Tarente (354-300), élève d'Aristote, qui, à l'encontre des Pythagoriciens, ne veut pas se référer au nombre, mais seulement à l'expérience auditive. Culturellement, c'est cependant le point de vue pythagoricien, transmis à travers l'oeuvre de Platon, qui sans doute nous a marqués, les quatre sciences fondamentales devenant géométrie, arithmétique, astronomie et musique. Je conseillerai à ceux et celles qui désirent approfondir les rapports entre ces quatre sciences, la lecture d'un néo-platonicien, Théon de Smyrne, assez facile à aborder.

Avant d'en venir au deuxième texte, tiré de "*Compendium musicae*" de Descartes, il est nécessaire de faire le point sur l'évolution de la gamme.

Zarlino (*Istitutioni harmoniche*, Venise, 1558) tente de rassembler tous les accords en une opposition entre majeur (do-mi-sol) et mineur (ré-fa-la). Ces deux accords lui apparaissent "naturels", donc conformes au principe de "l'imitation de la nature". Il recommande aussi de doubler la basse par l'orgue. C'est le principe de la basse continue. (cet usage de la basse continue perdra son importance au milieu du XVIII° siècle, parce que trop rigide.). Le système de Zarlino est basé sur la succession de la quinte et de la tierce. La tierce pythagoricienne do-mi $\left(\frac{81}{64}\right)$ n'est pas consonante. La tierce majeure zarlinienne sera do-mi $\left(\frac{5}{4}\right)$. La différence avec la quinte $\left(\frac{3}{2} : \frac{5}{4}\right.$ soit $\left.\frac{6}{5}\right)$ sera la tierce mineure zarlinienne. Nous avons donc :

do	ré	mi	sol	si
1	$\frac{9}{8}$	$\frac{5}{4}$	$\frac{3}{2}$	$\frac{15}{8}$

Le si de Zarlino est voisin du si pythagoricien : la différence est $\frac{243}{128} : \frac{15}{8}$, soit $\frac{81}{80}$, donc un comma. Le ré est conservé ; il manque un fa et un la. Une quarte à partir de do $\left(\frac{2}{3}\right)$ donne le même fa que Pythagore (ramené à l'octave: $\frac{4}{3}$). A partir de si, un ton descendant $\left(\frac{15}{8} \times \frac{8}{9}\right.$ soit $\left.\frac{5}{3}\right)$ donne la. Le la zarlinien est donc différent du la pythagoricien : la différence $\frac{27}{16} : \frac{5}{3}$, soit $\frac{81}{80}$ est encore d'un comma. Nous obtenons finalement :

do	ré	mi	fa	sol	la	si	do
1	$\frac{9}{8}$	$\frac{5}{4}$	$\frac{4}{3}$	$\frac{3}{2}$	$\frac{5}{3}$	$\frac{15}{8}$	2

Nous constatons que toutes les notes sont du type $2^a 3^b 5^c$.

Le problème de la transposition était difficile avec la gamme de Pythagore. Il est ici devenu quasi insoluble. Si l'on transpose par exemple en commençant par sol,

1	$\frac{10}{9}$	$\frac{5}{4}$	$\frac{4}{3}$	$\frac{3}{2}$	$\frac{5}{3}$	$\frac{16}{9}$	2
sol	la	si	do	ré	mi	fa	sol
$\frac{3}{2}$	$\frac{5}{3}$	$\frac{15}{8}$	2	$\frac{9}{4}$	$\frac{5}{2}$	$\frac{8}{3}$	3

différences :

$$\frac{9}{8} \qquad\qquad\qquad\qquad \frac{15}{8}$$

La première n'est pas une consonance, mais la note obtenue pour la seconde est trop basse. Il faut faire intervenir un fa dièse.

Par conséquent, une fois de plus, le cycle n'est pas fermé. C'est la raison des recherches de gammes tempérées. Au départ, tous les tempéraments étaient inégaux. Citons les efforts en ce sens de Képler (1619), Huygens (1691) etc. Construire une gamme, c'est un compromis entre trois exigences : justesse, jouabilité, variété possible dans la musique par la tonalité et les modulations. Un des tempéraments les plus connus est le tempérament mésotonique, qui donne la priorité à la tierce sur la quinte. On forme la tierce exacte do-mi ($\frac{5}{4}$) et à partir de do, un cycle de quatre quintes : do-sol-ré-la-mi. Si x est le rapport d'une quinte, on doit donc avoir $x^4 = \frac{5}{4} \times 2^2$ (pour deux octaves), donc

$$x = \sqrt[4]{5} \approx 1{,}495 \text{ (au lieu de 1,5)}$$

On accorde les notes restantes en tierces exactes. Une quinte peut être particulièrement dissonante : sol dièse-mi bémol. Son rapport est de :

$$2 \times \frac{4}{5} \times \frac{4}{5} \times \frac{4}{5} \times \sqrt[4]{5} \approx 1{,}531$$

Elle est appelée la quinte du loup.

Le tempérament égal s'obtient en divisant l'octave en 12 demi-tons égaux. Chaque demi-ton vaut donc $\sqrt[12]{2}$. Ce tempérament est attribué à Stevin (1596) ou encore à Werckmeister (1691), mais il est peut-être plus ancien.

Revenons au texte de **Descartes** tiré du *Compendium musicae* rédigé en 1618. Ce n'est pas un texte majeur dans l'histoire de la musique, ni dans l'oeuvre de Descartes. C'est un texte de jeunesse, qui illustre cependant la place qu'occupait alors la musique dans la formation intellectuelle.

Descartes commence par huit remarques :

1° Tous les sens sont capables de quelque plaisir.

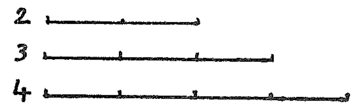
2° Ce plaisir des sens consiste en une certaine proportion et correspondance de l'objet avec le sens.

3° Pour plaire, l'objet ne doit "tomber" ni trop différemment, ni trop confusément.

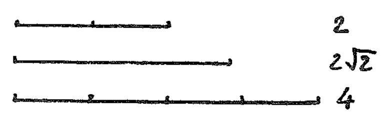
4° l'objet est plus aisément perçu si les parties ne sont pas trop différentes entre elles.

5° Les parties de l'objet entier doivent être dans des proportions faciles à reconnaître.

6° Ces proportions doivent être arithmétiques et non géométriques



est plus aisé
à percevoir
que

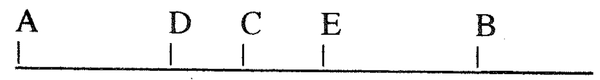


7° Parmi les objets sensibles, le plus agréable à l'âme n'est pas celui qui est le plus facilement perçu ni le plus difficilement ; il faut une juste mesure.

8° En toute chose, la variété est agréable.

Descartes va traiter ensuite des consonances, des degrés et des dissonances. On ne peut s'empêcher de penser que ses affirmations sont quelque peu arbitraires, sans vrai fondement théorique ou expérimental.

a) les consonances : Pour que deux sons soient consonants, le plus grave doit contenir l'autre, comme on peut le remarquer sur les cordes d'un luth : Si une corde est touchée, les cordes plus aigues résonnent aussi, pas les autres. " Le son est au son comme la corde est à la corde. " On obtient donc l'aigu par division du grave.



AB vaut deux octaves, AC une octave; AE (AE/AB = 2/3)est la quinte; AD est l'octave de la quinte(do-do-sol) etc..

Par divisions successives, il construit ainsi le premier tableau

Prima Figura.

$\frac{1}{2}$	*Octava.*								
$\frac{1}{3}$	*Duodecima*	$\frac{2}{3}$	*quinta.*						
$\frac{1}{4}$	*Decima 5^a.*	$\frac{2}{4}$	*Octava.*	$\frac{3}{4}$	*Quarta*				
$\frac{1}{5}$	*Decima 7^a.*	$\frac{2}{5}$	*10^a maj.*	$\frac{3}{5}$	*6^a maj.*	$\frac{4}{5}$	*Ditonus.*		
$\frac{1}{6}$	*Decima 9^a.*	$\frac{2}{6}$	*12^a*	$\frac{3}{6}$	*Octava.*	$\frac{4}{6}$	*Quinta.*	$\frac{5}{6}$	*Tertia min.*

Son deuxième tableau donne les consonances dans l'ordre des qualités : la quinte est la plus agréable de toutes (principe 7). La quarte est la consonance la plus malheureuse. Elle est très proche de la quinte et perd ainsi toutes ses qualités (c'est le complément de la quinte à l'octave).

Secunda figura.

	Consonantiae simplices		Compositae primae		Compositae secundae	
Octavae.		$\frac{1}{2}$		$\frac{1}{4}$		$\frac{1}{8}$
Quintae.	$\frac{2}{3}$		$\frac{1}{3}$		$\frac{1}{6}$	
Ditoni.		$\frac{4}{5}$		$\frac{2}{5}$		$\frac{1}{5}$
Quartae.	$\frac{3}{4}$		$\frac{3}{8}$		$\frac{3}{16}$	
Sextae majores		$\frac{3}{5}$		$\frac{3}{10}$		$\frac{3}{20}$
Tertiae minores	$\frac{5}{6}$		$\frac{5}{12}$		$\frac{5}{24}$	
Sextae minores		$\frac{5}{8}$		$\frac{5}{16}$		$\frac{5}{32}$

b) les degrés : c'est une théorie très compliquée de Descartes. Il s'agit des degrés nécessaires pour passer d'une consonance à une autre. Par exemple prenons la quarte et la quinte : le rapport des intervalles est de $\frac{8}{9}$. Il fait intervenir ce qu'il appelle la distance des intervalles qui est la différence à 1, ici $\frac{1}{9}$. Cette distance devra être divisée en degrés : "*les degrés ne sont autre chose qu'un certain milieu compris entre les termes des accords pour adoucir la rudesse de leur inégalité.*" etc..

c) les dissonances : les intervalles qui ne sont pas consonants sont dissonants.

Le troisième texte de **Galilée** (*Discorsi* (1638) fin de la 1ère journée) est d'un tout autre style. Le père de Galilée était un musicien reconnu, ce qui est sans doute une des raisons de l'intérêt de Galilée pour la musique.

Il essaye ici d'appuyer sur des expériences mesurables le phénomène musical, pour étayer sûrement la théorie qui de fait sera naturellement établie sur des rapports de nombres. La matérialisation des vibrations par les "*minces virgules*" de laiton sur sa plaque est assez spectaculaire et marque le début d'une recherche différente des raisons du plaisir musical: "*Je dis que la raison première et immédiate dont dépendent les intervalles musicaux n'est ni la longueur des cordes, ni leur tension, ni leur grosseur, mais la proportion existant entre la fréquence des vibrations, et donc des ondes qui en se propageant dans l'air, viennent frapper le tympan de l'oreille en le faisant vibrer aux mêmes intervalles de temps. Ce point étant établi, peut-être pourrons-nous déterminer pour quelle raison précise certains couples de sons , même dans des tons différents, sont reçus avec un grand plaisir par notre sensorium et d'autres avec un plaisir moindre, tandis que d'autres enfin nous frappent très désagréablement.*"

Les recherches qui suivront s'inscriront dans cette perspective: déterminer de façon précise comment sont émis les sons, puis les raisons physiques du plaisir musical, enfin fonder la théorie sur des bases solides.

J. Sauveur en 1701 établit la théorie des harmoniques; Rameau en 1722 publie son *Traité de l'Harmonie réduite à ses principes naturels* où il dégage le principe de la basse fondamentale ; Tartini en 1754 met en évidence l'existence des sons résultants (quand deux sons émis ensemble en font entendre un troisième en dessous : f_1 et f_2 font entendre aussi $f_2 - f_1$).

Les instruments mathématiques et physiques, s'ils ne sont pas encore tout à fait suffisants, ont cependant progressé. En déclarant que "*La musique est une science qui doit avoir des règles certaines ; ces règles doivent être tirées d'un principe évident et ce principe ne peut nous être connu sans le secours des mathématiques*", Rameau situe assez bien la musique dans son siècle. Les batailles d'écoles cependant ne sont pas absentes. La querelle des Bouffons opposant la musique à l'italienne soutenue par Rousseau entre autres et la musique à la française représentée par Rameau est une des péripéties les plus célèbres, d'autant qu'elle aura des retentissements dans les articles sur la musique de l'Encyclopédie rédigés par Rousseau.

Le texte de D'Alembert, tiré des *Eléments de Musique suivant les principes de M. Rameau* de 1762 reflète un peu cet état d'esprit.

En effet, tout en reprenant le principe de la basse fondamentale de Rameau, d'Alembert fait cependant la part des choses ; certes la musique est basée sur l'arithmétique, mais d'une part cette arithmétique est élémentaire, d'autre part il ne faut pas trop s'appesantir sur ce sujet. On peut faire de la musique sans en posséder la théorie et la musique ne peut être réduite à de simples calculs. "*Je n'ai point cherché à multiplier les calculs ; j'aurai même voulu les supprimer s'il eut été possible ; tant il me paraît à craindre que la plupart des lecteurs ne prennent le change sur ce sujet, et qu'ils ne croient ou qu'ils ne me soupçonnent de croire toute cette arithmétique très importante pour former un artiste (...). N'imitons pas ces musiciens qui, se croyant géomètres, ou ces géomètres qui se croyant musiciens, entassent dans leurs écrits chiffres sur chiffres, imaginant peut-être que cet appareil est nécessaire à l'art. En qualité de géomètre , je crois avoir quelque droit de protester ainsi contre cet abus ridicule de la géométrie dans la musique. Je le puis avec d'autant plus de raison, qu'en cette matière les fondements des calculs sont hypothétiques jusqu'à un certain point et ne peuvent même être qu'hypothétiques.*"

Tout à fait à l'opposé, le texte d'Euler, pris dans le *Tentamen novae theoriae musicae* publié en 1739, se veut délibérément scientifique pour "*démontrer*" en quelque sorte les principes premiers de la théorie de la musique à partir de considérations fondamentales sur le plaisir musical. "*Il résulte clairement*, écrit Euler, *des bons et mauvais jugements dont nous venons de parler, qu'il doit y avoir une théorie qui, se basant sur les principes les plus certains, peut expliquer pourquoi telle musique plait ou déplait*" avant de noter plus loin : "... *Nous avons établi que deux ou plusieurs sons produisent un effet agréable, lorsque l'ouïe distingue le rapport qui existe entre les nombres des vibrations faites dans le même temps.*"

A partir de là, il va établir une théorie des "*degrés d'agrément*" qui lui permettra de construire les gammes, les modes, les principes d'écriture de la musique, le rythme et l'intensité des sons n'étant pas oubliés bien sûr.

L'ouvrage est assez impressionnant par son ampleur et le haut degré de technicité des calculs arithmétiques dans la recherche des PGCD et des PPCM entre autres. Le génie calculatoire d'Euler apparait ici brillamment. D'une rigueur absolue, sa démonstration pour nos yeux du vingtième siècle peut sembler critiquable. Euler ne connait pas par exemple les séries de Fourier et n'a à sa disposition que la physique et la biologie de son temps. Il marque cependant un esprit de très grande ouverture, car il invente d'autres gammes et d'autres modes possibles, rejoignant en ce sens d'Alembert, qui disait : "*Dans l'article "fondamental" de l'encyclopédie, j'ai proposé un grand nombre d'accords, jusqu'ici non pratiqués, et sur lesquels j'ai exhorté les musiciens à faire des expériences, persuadé que je suis des progrès que l'art peut encore faire, si ceux qui le cultivent veulent bien ne s'entêter d'aucun système et ne se laisser captiver par aucune routine.*"

Ainsi Euler dans un de ces derniers ouvrages sur la musique osera même faire intervenir le nombre 7 dans l'expression des fréquences, alors qu'il avait écrit précédemment, en accord avec le "grand Leibniz" qu'il suffit de savoir compter jusqu'à 5 pour faire de la musique (comme nous l'avons vu précédemment, toutes les notes jusqu'ici pouvaient s'écrire sous la forme $2^a \times 3^b \times 5^c$). Un orgue sera même conçu pour jouer ces sons nouveaux inventés par Euler. Qu'aurait-il fait s'il avait eu à sa disposition un ordinateur ou un synthétiseur ?

L'histoire de la musique et des mathématiques ne s'arrête pas là bien sûr. Le chemin vous est ouvert. Cet aperçu, trop court, devrait cependant vous permettre de le poursuivre seuls.

BIBLIOGRAPHIE

Musique et Mathématiques (Bernard PARZYSZ), Publications de l'APMEP, 1983

Eléments de musique suivant les principes de M. Rameau (D'ALEMBERT, 1762) Réédition : Ed. d'Aujourd'hui , 1984

ARISTOXENE DE TARENTE et ARISTOTE : Le Traité d'Harmonique (Anne BELIS) Klincksieck , 1986

La division du canon,Traduction partielle dans Les Livres arithmétiques d'EUCLIDE (Jean ITARD), Hermann, 1961

Mathématiques utiles pour la connaissance de PLATON (THEON de Smyrne), Culture et Civilisation, Bruxelles

Compendium Musicae (René DESCARTES), Traduction française, PUF

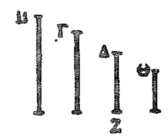
I. *Si un intervalle multiple, composé deux fois, fait un intervalle, ce dernier est aussi multiple.* Soit l'intervalle $B\Gamma$, et soit B un multiple de Γ, et soit

fait Γ à B comme B à Δ : je dis que Δ est multiple de Γ. Car, puisque B est multiple de Γ, Γ mesure B et comme Γ est à B comme B à Δ, Γ mesure aussi Δ. Donc Δ est multiple de Γ.

II. *Si un intervalle deux fois composé donne un intervalle multiple, cet intervalle est lui-même multiple.* Soit l'intervalle $B\Gamma$ et soit fait Γ à B comme B à Δ, et que Δ soit multiple de Γ. Je dis que B est aussi multiple de Γ.

Car puisque Δ est multiple de Γ, Γ mesure Δ. Mais nous avons appris que si autant de nombres qu'on voudra sont proportionnels et si le premier mesure le dernier, il mesure aussi les moyens. Γ mesure donc B et B est multiple de Γ.

III. *Dans un intervalle superparticulier ne tombe ni un, ni plusieurs nombres moyens proportionnels.* Soit l'intervalle superparticulier $B\Gamma$. Soient ΔZ et Θ les plus petits dans le même rapport que B, Γ. Ils n'ont comme commune mesure que l'unité. Que l'on ôte HZ égal à Θ. Comme ΔZ est superparticulier à Θ, l'excès ΔH est une commune mesure de ΔZ et de Θ. ΔH est donc



l'unité. Ainsi il ne tombe entre Θ et ΔZ aucun nombre moyen, car s'il en tombait un il serait plus petit que ΔZ, plus grand que Θ et l'unité serait divisée, ce qui est impossible. Il ne tombe donc aucun moyen entre ΔZ et Θ. Mais autant il tombe, de moyens entre les deux plus petits dans un rapport donné, autant il en tombe entre ceux qui ont le même rapport. Comme il n'en tombe aucun dans ΔZ, Θ, il n'en tombe aucun dans $B\Gamma$.

IV. *Si un intervalle non multiple est composé deux fois, le tout n'est ni multiple, ni superparticulier.* Soit l'intervalle non multiple $B\Gamma$, et soit fait Γ à B comme B à Δ. Je dis que Δ n'est ni multiple de Γ, ni superparticulier. Car, tout d'abord, si Δ était multiple de Γ, nous avons montré que si

lorsqu'on compose deux fois un intervalle, l'intervalle total est multiple, l'intervalle donné l'est aussi. B serait multiple de Γ, ce qui n'est pas. Il est donc impossible que Δ soit multiple de Γ. Mais il n'est pas non plus superparticulier, car dans un intervalle superparticulier il ne tombe pas de moyen proportionnel, alors que dans Δ Γ tombe B. Il est par suite impossible que Δ soit multiple de Γ ou superparticulier.

De toutes ces choses il s'ensuit que toutes les consonnances se doivent réduire à trois espèces : la première est simple, l'autre est composée d'une simple et d'une octave, et la troisième est composée d'une simple et de deux octaves. Et on n'ajoute pas à ces trois une autre espèce de consonnance qui soit composée de trois octaves et d'une consonnance simple, d'autant que ce sont les bornes ou notre faculté peut aller, qui ne peut s'étendre au-delà de trois octaves, parcequ'alors les nombres des proportions se multiplieroient trop

Nous avons ici ajouté la sexte mineure, que nous n'avions pas encore trouvée entre les autres ci-dessus ; mais on la peut tirer de l'octave, car en ayant ôté le diton, ce qui restera sera la sexte mineure. Mais nous en parlerons incontinent plus clairement.

Or il ne faut pas s'imaginer que ce soit sans fondement qu'on ait dit qu'il n'y a que la quinte et le diton qui s'engendrent de la division de l'octave, et que les autres ne s'engendrent que par accident ; car j'ai reconnu par expérience dans les cordes de luth ou de quelque autre instrument que ce soit, que si vous en touchez une, la force du son ébranlera toutes les autres cordes qui seront plus aiguës d'une quinte ou d'un diton, sans que j'aie pu observer que la même chose soit arrivée dans les quartes ou autres accords. Or cette force des accords ne peut venir sans doute que de leur perfection ou imperfection, en ce que les premiers, sont des accords essentiellement et par eux-mêmes, au lieu que les autres ne le sont que par accident, en tant qu'ils viennent et descendent de ceux-là.

De la quinte

Voici le plus agréable et le plus doux de tous les accords ; c'est pourquoi on a coutume de le faire régner dans toutes les chansons, dans lesquelles il tient toujours le premier rang. C'est de lui que naissent les modes, et auquel convient ce que nous avons dit en la septième remarque faite au commencement de ce traité ; car soit que nous tirions la perfection des consonnances de la division d'une corde ou du rapport de leurs nombres, il n'y en a proprement que trois, entre lesquelles la quinte tenant le milieu, elle aura ce tempérament, qu'elle ne frappera pas les oreilles si aigrement que le diton ni si mollement que le diapason, mais plaira davantage qu'aucun autre.

GALILEE - DISCOURS SUR DEUX SCIENCES NOUVELLES (1ère journée)

Et comme il est impossible de compter les vibrations d'une corde en raison de leur grande fréquence, j'aurais continué à ignorer s'il est vrai que, dans un accord d'octave, la corde la plus aiguë présente dans le même temps un nombre de vibrations double de la corde la plus grave, si précisément les ondes renouvelables à volonté que l'on obtient en faisant résonner et vibrer un verre, ne m'avaient directement montré comment à l'instant même où le ton monte d'une octave pour l'oreille, on voit surgir d'autres ondes plus petites qui, avec une infinie netteté, partagent en deux chacune des ondes précédentes

si après avoir disposé une corde sur un monocorde on la fait vibrer tout entière, puis seulement sa moitié, en plaçant un chevalet à mi-longueur, on perçoit bien l'octave, alors que si le chevalet est placé au tiers de la corde, en faisant résonner la corde entière puis les deux-tiers, on obtient la quinte ; en foi de quoi ils déclarent que l'octave est dans le rapport de deux à un et la quinte dans celui de trois à deux. Cette explication, dis-je, ne me semblait pas satisfaisante pour établir sans conteste que les rapports de deux à un et de trois à deux sont bien les rapports de l'octave et de la quinte, et voici pourquoi. Il y a trois manières de rendre plus aigu le son d'une corde : la raccourcir d'abord, l'étirer ou plutôt la tendre davantage ensuite, enfin l'amincir.

SALV. Elle fut le fait du hasard ; mon seul rôle fut de noter l'observation, de l'apprécier à sa valeur, puis d'y percevoir la confirmation d'importantes spéculations, encore qu'en elle-même elle fut fort banale. Je raclais en effet avec un ciseau de fer tranchant une plaque de laiton dans le but d'enlever quelques taches, lorsqu'en déplaçant avec rapidité mon ciseau j'entendis à une ou deux reprises, entre les nombreux coups ~~donnés,~~ un sifflement très fort et clair ; regardant la plaque, je vis alors une longue suite de minces virgules, parallèles entre elles et séparées par des intervalles rigoureusement égaux. Passant et repassant le ciseau un grand nombre de fois, je m'aperçus que des marques apparaissaient sur la plaque seulement lorsqu'un sifflement était émis, et qu'il n'y avait pas la moindre trace de ces petites virgules quand le raclage ne s'accompagnait d'aucun bruit. Je recommençai plusieurs fois le même jeu en faisant glisser mon ciseau tantôt plus vite et tantôt moins vite : le sifflement obtenu était d'un ton parfois plus aigu et parfois plus grave ; j'observai aussi que les traces laissées à l'occasion d'un son plus aigu étaient plus serrées, et à l'occasion d'un son plus grave plus espacées ; d'autres fois encore, si le passage du ciseau avait été plus rapide à la fin qu'au début, on entendait le son devenir plus aigu, et l'on voyait les petites virgules devenir plus denses, mais toujours elles conservaient leur grande netteté et leur parfaite équidistance ; de plus, chaque fois qu'un sifflement se produisait, je sentais le fer trembler dans mes doigts en même temps qu'une sorte de frisson parcourait ma main. Ainsi le fer nous laisse-t-il voir et entendre exactement ce que nous accomplissons, pour notre part, lorsque nous parlons d'abord à voix basse puis à voix très haute

Mais revenons à notre sujet principal : je dis que la raison première et immédiate ** dont dépendent les rapports des intervalles musicaux n'est ni la longueur des cordes, ni leur tension, ni leur grosseur, mais la proportion existant entre les fréquences des vibrations, et donc des ondes qui, en se propageant dans l'air, viennent frapper le tympan de l'oreille en le faisant vibrer aux mêmes intervalles de temps.

D'ALEMBERT : ELEMENTS DE MUSIQUE SUIVANT LES PRINCIPES DE M. RAMEAU

DISCOURS
PRÉLIMINAIRE.

ON peut conſidérer la Muſique, ou comme un Art qui a pour objet l'un des principaux plaiſirs des ſens, ou comme une ſcience par laquelle cet Art eſt réduit en principes. C'eſt le double point de vue ſous lequel on ſe propoſe de la traiter dans cet Ouvrage.

Il en a été de la Muſique comme de tous les autres Arts inventés par les hommes ; le hazard a d'abord appris quelques faits ; bientôt l'obſervation & la réflexion en ont découvert d'autres ; & de ces différens faits, rapprochés & réunis, les Philoſophes n'ont pas tardé à former un corps de ſcience, qui s'eſt enſuite accru par degrés.

Les premiers Ouvrages que nous connoiſſons ſur les lois de l'harmonie, ne remontent qu'à environ deux ſiecles ; & ils ont été ſuivis de beaucoup d'autres. Mais aucun de ces ouvrages n'étoit capable de ſatisfaire l'eſprit ſur le principe de l'harmonie : on s'y étoit preſque uniquement borné à recueillir des regles, ſans en donner les raiſons ; on n'en avoit point vu l'analogie & la ſource commune ; une expérience aveugle étoit l'unique bouſſole des Artiſtes.

M. Rameau a le premier commencé à débrouiller ce chaos. Il a trouvé dans la réſonnance du corps ſonore l'origine la plus vraiſemblable de l'harmonie, & du plaiſir qu'elle nous cauſe : il a développé ce principe, & montré comment les phénomenes de la Muſique en naiſſent : il a réduit tous les accords à un petit nombre d'accords ſimples & fondamentaux, dont les autres ne ſont que des combinaiſons & des renverſemens. Il a ſu enfin appercevoir & faire ſentir la dépendance mutuelle de la mélodie & de l'harmonie.

Tout corps ſonore fait entendre, outre le ſon principal, la douzieme & la dix-ſeptieme majeure de ce ſon. Cette réſonnance multiple, connue depuis long-temps, eſt la baſe de toute la théorie de M. Rameau, & le fondement ſur lequel il éleve tout le ſyſtême muſical.

Nous avons d'ailleurs banni de cette édition, comme nous l'avions fait de la premiere, toutes conſidérations ſur les proportions & progreſſions géométriques, arithmétiques & harmoniques, qu'on voudroit chercher dans la réſonnance du corps ſonore ; perſuadés comme nous ſommes, que M. Rameau auroit pu ſe diſpenſer d'avoir aucun égard à ces proportions, dont nous croyons l'uſage tout-à-fait inutile, & même, ſi nous l'oſons dire, tout-à-fait illuſoire dans la théorie de la Muſique.

La théorie de l'harmonie demande quelques calculs arithmétiques, néceſſaires pour qu'on puiſſe comparer les ſons entr'eux. Ces calculs ſont très-courts, très-ſimples, & j'ai fait enſorte de les rendre ſenſibles à tout le monde ; ils n'exigent aucune opération qui ne ſoit clairement expliquée, & qu'un enfant ne puiſſe faire avec la plus légere attention. Cependant, pour épargner même cette peine à ceux qui voudroient s'en diſpenſer, je n'ai point inſéré ces calculs dans le texte ; je les ai rejetés dans des notes, qu'on pourra ne pas lire, ſi on le juge à propos, en ſe contentant de ſuppoſer comme vraies les propoſitions énoncées dans le texte, & dont la preuve ſe trouve dans les notes.

EULER - TENTAMEN NOVAE THEORIAE MUSICAE

De nos jours, on pourrait peut-être douter avec beaucoup plus de fondement de la possibilité d'établir une théorie musicale capable d'expliquer pourquoi telle ou telle mélodie plait ou déplait ; car, non-seulement nous ne pouvons entendre sans une extrême répugnance la musique des peuples barbares, qui a pour eux beaucoup de charmes, mais à leur tour ces peuples ne trouvent absolument aucun agrément dans la nôtre. Cependant celui qui voudrait conclure de là que les sensations agréables que nous procure la musique, n'ont pas de cause, jugerait certainement avec trop de précipitation. La musique d'aujourd'hui étant composée de parties pour ainsi dire innombrables, on ne peut porter un jugement bien fondé, soit sur notre approbation, soit sur l'aversion des peuples barbares, qu'après avoir considéré et examiné attentivement chacune de ces parties. Si pour commencer notre jugement, nous partons des consonnances les plus simples dont toute musique se compose, telles que l'octave, la quinte, la quarte, les tierces et les sixtes tant majeures que mineures, nous trouvons toutes les nations

parfaitement d'accord sur leur effet ; nous trouvons en outre que toutes jugent ces intervalles plus agréables à l'oreille que les dissonnances, telles que la quinte diminuée, les septièmes, les secondes et d'autres sans fin que l'on peut former. Cet accord unanime, dont il n'a été donné aucune explication et qui ne peut être attribué uniquement à l'habitude, mérite qu'on en recherche la cause véritable.

Nous laissons à d'autres de juger combien nous avons contribué à la solution d'une question que nous n'avons pas traitée dans toute son étendue ; cependant nous dirons que les préceptes qui découlent de notre théorie, s'accordent tellement bien avec la musique généralement approuvée, qu'il nous est impossible de douter de la solidité et de la vérité de nos principes. Pour obtenir cet accord nous avons rempli nous-même la tâche du physicien, et nous avons poussé nos investigations sur les véritables causes de ce qui, d'après l'opinion commune, contribue à rendre la musique agréable ou désagréable.

La théorie de la musique est fondée sur deux principes. Le premier, qui consiste dans l'exacte connaissance des sons, appartient à la physique ; nous l'avons amplement développé dans le 1er chapitre de ce traité. L'autre, puisé dans la métaphysique, a pour but de définir comment il se fait que l'ensemble de plusieurs sons simultanés ou successifs, éveille en nous le sentiment du plaisir ou de l'aversion. Conduit par le raisonnement et par l'expérience, nous avons résolu cette question, et nous avons établi que deux ou plusieurs sons produisent un effet agréable, lorsque l'ouïe distingue le rapport qui existe entre les nombres des vibrations faites dans le même temps ; qu'au contraire leur effet est désagréable, lorsque l'ouïe ne distingue pas ce rapport, ou lorsque celui qui semble devoir se produire, est troublé tout à coup. Ensuite nous avons exposé comment l'ordre des sons, qui consiste dans le rapport des vibrations faites dans le même temps ou dans des temps égaux, était distinctement saisi par l'oreille ; de là nous avons pu conclure qu'il y avait des rapports plus faciles à découvrir que d'autres, et, recherchant la cause de cette différence nous avons formé, pour le plus ou moins de facilité d'appréciation de ces rapports, des degrés qui n'ont pas seulement la plus grande influence dans la musique, mais qui peuvent aussi être d'une très-grande utilité dans les autres arts dont le but est de charmer nos sens.

§ 11. La seconde manière de reconnaître l'ordre se présente surtout dans la musique ; car ce n'est que lorsque nous entendons un chant, que nous pouvons saisir l'ordre qui règne entre les sons, soit qu'ils naissent simultanément, soit qu'ils se succèdent. Un chant nous plaira donc, si nous reconnaissons l'ordre des sons qui le composent ; il nous déplaira au contraire, si nous ne comprenons pas pourquoi chaque son se trouve à la place qu'il occupe, et il nous déplaira d'autant plus que les sons nous paraîtront s'écarter plus souvent de l'ordre suivant lequel nous croyons qu'ils devraient être disposés. Il peut donc arriver que certaines personnes aperçoivent un ordre que d'autres ne distinguent point, et qu'ainsi la même chose plaise à celles-là et déplaise à celles-ci. Mais les unes et les autres peuvent se tromper ; car il peut réellement y régner un ordre que beaucoup de personnes ne saisissent pas ; et souvent aussi quelques-unes croient reconnaître un ordre là où il n'y en a point. Telle est l'origine des jugements si divers qu'on porte à l'égard de la musique.

§ 18. Deux sons étant donnés, nous connaîtrons la relation qui existe entre eux, si nous pouvons saisir le rapport du nombre de vibrations effectuées pour l'un, au nombre de vibrations effectuées pour l'autre dans le même temps. Par exemple, s'il se faisait 3 vibrations pour le premier, pendant que pour le second il y en aurait 2, nous connaîtrions leur relation et par conséquent leur ordre, en observant le rapport des nombres 3 et 2 qui est 3 : 2. Il en serait de même si au lieu de deux sons, il fallait en comparer un plus grand nombre. Une autre source d'agrément résulte aussi de la perception des rapports entre les durées des sons, susceptibles également d'une expression numérique. Il est donc clair que tout plaisir que nous fait éprouver la musique, doit son origine à la connaissance des rapports de plusieurs nombres entre eux.

§ 21. Pour faire mieux comprendre comment on reconnaît l'ordre ou le rapport de deux ou de plusieurs sons, nous allons tâcher d'en faire pour la vue une figure semblable. Nous représenterons les vibrations qui frappent l'oreille, par des points placés en ligne droite, et dont les intervalles correspondront aux intervalles des vibrations, ainsi que la disposition ci-contre en offre des exemples. De cette manière deux sons égaux, c'est-à-dire deux sons qui ont le même degré de grave ou d'aigu pendant toute leur durée, seront représentés par deux suites de points équidistants, comme dans la figure 1.

Dans ces suites le rapport de l'égalité se manifestant partout aux yeux, il n'y a pas de doute qu'on ne puisse comprendre avec la plus grande facilité l'ordre qui règne entre elles. Des sons égaux ou l'unisson, suivant l'expression ordinaire, constituent donc le premier et le plus simple degré de l'ordre ; nous le nommerons le premier degré d'agrément : il est exprimé numériquement par le rapport 1 : 1.

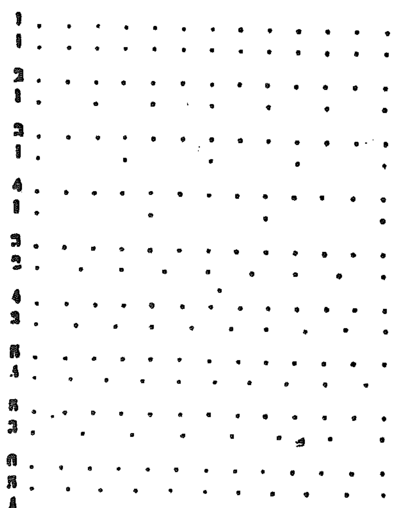


Fig. 1. Fig. 2. Fig. 3. Fig. 4. Fig. 5. Fig. 6. Fig. 7. Fig. 8. Fig. 9.

APPROCHE DE L'INTELLIGENCE ARTIFICIELLE PAR L'HISTOIRE DES SYSTEMES-EXPERTS

Stéphane CALLENS

Pourquoi faire compliquer quand on peut faire simple ? L'histoire des systèmes-experts est un moyen rapide et efficace pour accéder à la compréhension des notions de base de l'Intelligence Artificielle et de saisir l'intérêt des débats qu'elle suscite.

Cette histoire peut être résumée en trois phases :

- au début des années 1970, apparaissent les systèmes-experts, vénérables ancêtres des systèmes ultérieurs : le DENDRAL de Buchanan (1969), le MYCIN de Shortliffe (1974).
- les années 80 font émerger une liste d'applications réussies et l'accès aisé à des Générateurs de Systèmes-Experts hybridant les solutions développées antérieurement.
- enfin, les développements actuels, dits de seconde génération, prolongent cette optique d'hybridation à propos d'une question particulière : il s'agit de trouver la meilleure coopération de différents types de raisonnement pour résoudre un problème.

L'histoire des systèmes-experts est une histoire vivante et ouverte. Chaque nouvelle entreprise en Intelligence Artificielle entraîne une relecture critique des modèles "*historiques*" de systèmes-experts, le développement d'un projet important fait repasser à chacune des phases de cette histoire. Elle constitue même une alternative attrayante pour l'enseignement de l'Intelligence Artificielle, ainsi dégagé de longs préalables de Logique et de débats mal posés.

Nous proposons ici un bref résumé de cette histoire, détaillée en trois époques. Un exemple récapitulatif essaiera de faire percevoir les différentes approches suivies.

SOMMAIRE

1 - ANNEES 70 : LES ANCETRES DENDRAL ET MYCIN

L'Intelligence Artificielle a donné lieu à des définitions diverses, essayons de regarder en coulisse, du côté de ceux qui la mettent en oeuvre dans des applications pratiques. Cela amène à se tourner vers les systèmes experts, une IA sans qualité apparue incidemment vers1970, alors que d'autres poursuivaient le rêve cybernétique, mythe fondateur de l'Intelligence Artificielle.
DENDRAL et MYCIN constituent la première époque des systèmes-experts. Leurs réussites se retrouvent dans les succès ultérieurs. Ils s'occupent de questions délimitées, l'un maîtrisant une explosion combinatoire, l'autre créant une trace dans un marais conjecturel.

2 - ANNEES 80 : ENCYCLOPEDIE DES MOEURS D'EXPERTISE

La multiplication des systèmes-experts s'est faite selon le principe mimétique : le système reproduit la manière de faire de l'expert. Un système-expert d'entraînement à la vente est bavard et non-paramétré, un système-expert comptable est d'une prudence toute comptable, tandis que les systèmes-experts médicaux sont souvent conservateurs, préférant stabiliser les acquis d'un enseignement que s'aventurer dans une recherche nouvelle.

3 - DEVELOPPEMENTS RECENTS

Comment cumuler les diverses approches d'un même problème? Cette question est au coeur des réalisations présentes. Les systèmes-experts dits de seconde génération hésitent entre l'imitation d'un processus d'expertise et de décision et d'un processus dans l'ordre des phénomènes observés.

4 - RECAPITULATION

Un expert, un phénomène : faire au mieux le suivi du phénomène semble être la bonne combinaison du mimétisme et de la performance, les deux principes premiers des systèmes experts.