couru plus rapidement que s'il avait été, entre les mêmes extrémités, rectiligne. Peut-être est ce là que naît le principe qu'il énonce alors: la lumière choisit les chemins dont les temps de parcours sont minimaux. Principe finaliste que n'aurait pu accepter Descartes, et qui fera l'objet de maintes critiques, mais qui a su s'imposer par l'élégance de son énoncé. Ayant alors recours à son procédé de recherche des extremums, lequel montre ici toute son efficacité puisqu'aucune autre méthode connue à l'époque n'eût pu venir à bout d'un calcul si complexe (la fonction à minimiser est la somme de deux racines carrées de polynômes), il détermine l'unique trajet éventuellement minimal et constate qu'il vérifie bien la loi des sinus énoncée par Descartes au renversement du rôle des vitesses près. Après quoi il s'assure par un calcul géométrique subtil mais traditionnel que le trajet ainsi trouvé est réellement minimal. L'optique fournira encore bien des controverses entre Huyghens et Newton; c'est Fresnel, en réfutant les affirmations de Newton, qui fera triompher la théorie ondulatoire dont Descartes apparaît comme le promoteur, elle-même remise en cause au début du XX° siècle. Quant au calcul différentiel, tout fragiles que soient restés ses fondements jusqu'à la fin du XIX°, on sait le succès que lui donnera sa grande efficacité, en dépit des hésitations de Descartes.

BIBLIOGRAPHIE

[1]Bernard Maitte: *La lumière*, Le Seuil, Paris...
[2]Descartes: *Discours de la méthode plus la dioptrique, les météores et la géométrie*, (réédition moderne de l'édition originale de 1637), Corpus des oeuvres philosophiques en langue française, Fayard, Paris 1986
[3]Descartes: *Oeuvres*, onze tomes en treize volumes, dont la correspondance, sous la direction d'Adams et Tannery, rééd. Vrin, Paris 1974-83
[4]Fermat : *Opera varia mathematica* (réédition commentée sous la direction de Paul Tannery et Charles Henry, de l'édition originale de 1669. Plus les *Correspondances*, plus les *Ecrits latins* plus l'*Inventum* de J. de Billy plus le *Commercium epistolicum* de Wallis. Gauthiers Villard, Paris 1891-1896

LES ORIGINES DES FONCTIONS HYPERBOLIQUES

Neil BIBBY
School of Education
University of Nottingham, U.K.

Mes recherches se basent sur des inquiétudes pédagogiques que j'ai eues pendant plusieurs années. On peut les résumer par un extrait du livre d'Imre Lakatos, *Preuves et Réfutations*, dans lequel il fait une comparaison entre *l'approche déductiviste et l'approche heuristique*. Il écrit[1] :

> *La méthodologie euclidienne a développé un certain style de présentation obligatoire auquel je ferai référence par l'expression "style déductiviste". Dans ce style on commence par une liste précautionneuse d'**axiomes**, de **lemmes** ou de **définitions**. Les axiomes et les définitions paraissent fréquemment artificiels et d'une complication déroutante. On ne dit jamais comment ces complications sont nées. La liste d'axiomes et de définitions est suivie de **théorèmes** soigneusement mis en mots, encombrés de conditions pesantes ; il semble impossible que quiconque ait jamais pu les inventer. [...] L'étudiant en mathématiques est obligé, dans le rituel euclidien, de suivre ce tour de prestidigitation sans poser de questions sur le contexte ni sur la façon dont est réalisé l'escamotage.*

Il continue ...

> *... Le style déductiviste cache la lutte, dissimule l'aventure. L'histoire toute entière disparaît. Les tentatives successives de formulation du théorème au cours de la procédure de preuve sont vouées à l'oubli cependant que le résultat final est exalté, élevé à une infaillibilité sacrée.*

Ainsi, c'est cet "autoritarisme mathématique" qui me gêne, et le protocole "définition-théorème-preuve" qui l'incarne. Par conséquent, j'ai essayé de donner à mes étudiants l'histoire de chaque sujet qu'ils rencontrent. Lakatos a appelé cette approche "l'approche heuristique". *Preuves et Réfutations* est seulement l'étude d'un cas : la relation d'Euler pour les polyèdres réguliers.

Si on prend le cas des fonctions hyperboliques, on a un bon exemple de l'autoritarisme dont Lakatos a parlé. Une introduction typique est donnée dans un texte anglais de D.Griffiths[2] :

37.1 Introduction The hyperbolic functions are defined in terms of the exponential function, and all their properties may be derived from the properties of exp x; in a sense, therefore, there are not really any new ideas in this chapter. Our discussion of the algebra and calculus of the hyperbolic functions will involve work from many of the earlier chapters, providing a good opportunity for revision. The reader should aim to become as familiar with these functions as with the trigonometric functions or exp x and ln x.

37.2 Definitions and basic properties The functions cosh x and sinh x (sometimes referred to as *hyperbolic cosine* and *hyperbolic sine*) are defined by

$$\boxed{\begin{aligned}\cosh x &\equiv \tfrac{1}{2}(e^x + e^{-x})\\ \sinh x &\equiv \tfrac{1}{2}(e^x - e^{-x}).\end{aligned}}$$

They are often abbreviated to ch x and sh x. Note that sinh is pronounced 'sinsh' (with a long i) or 'shine'.

---

[1]Lakatos (1984), p. 184-185
[2]Griffiths (1984), volume 2, p. 421; la traduction est donnée dans l'Appendice A

By analogy with trigonometric functions, four further hyperbolic functions are defined; for example,

$$\tanh x \equiv \frac{\sinh x}{\cosh x} \equiv \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}},$$

with similar definitions for coth x, sech x and cosech x.

Qu.1 (i) Sketch the graphs of the six hyperbolic functions. (Cosh x and sinh x are shown in Section 37.4.)
(ii) Show that $\mathrm{ch}^2 x - \mathrm{sh}^2 x \equiv 1$, and obtain two further 'Pythagorean' identities.
(iii) Show that $\frac{d}{dx}(\mathrm{sh}\, x) = \mathrm{ch}\, x$, and $\frac{d}{dx}(\mathrm{ch}\, x) = \mathrm{sh}\, x$.
(iv) Find the derivatives of (a) tanh x, (b) coth x, (c) sech x, (d) cosech x.
Qu.2 (i) Sketch the graph of $x = \cosh t$, $y = \sinh t$, where t is a parameter.
(ii) Check your sketch by eliminating t between these equations. (This explains the name 'hyperbolic functions'. For a similar reason, sin x and cos x are sometimes called the 'circular functions'.)
Qu.3 Find the first few terms of the power series expansions of sinh x and cosh x by
(i) using the expansions of e^x and e^{-x};
(ii) using Maclaurin's theorem directly.

Vous pouvez voir que Griffiths a très peu justifié le nom des fonctions - il y a une question (Qu. 2) dans laquelle les étudiants doivent tracer les courbes représentatives des fonctions, mais le rituel inévitable des "applications" aux problèmes d'intégration suit. Il y a de meilleurs textes, par exemple celui de Courant et John, qui essaie de justifier *a posteriori* la nomenclature des fonctions par cette figure[3]:

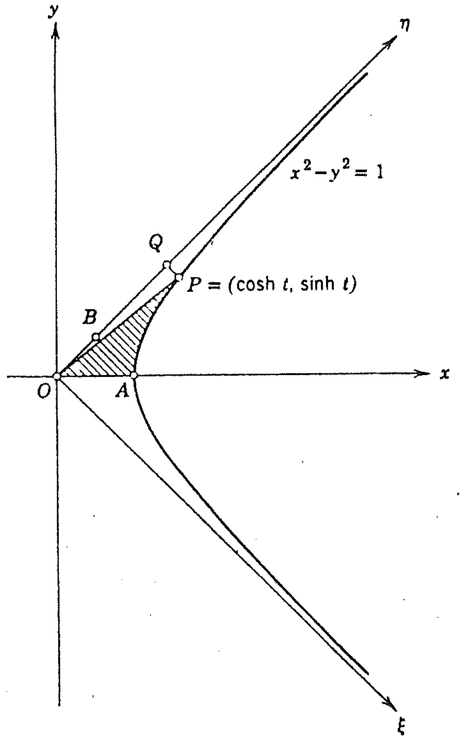


Figure 3.12

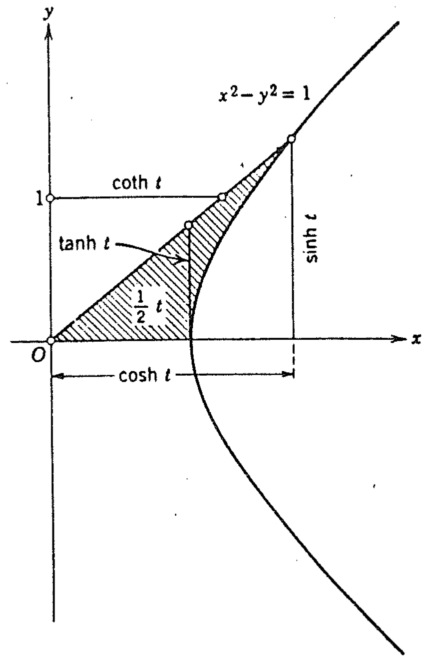


Figure 3.13 To illustrate the hyperbolic functions.

[3]Courant et John (1965), p. 235

J'ai employé une approche qui semble plus appropriée. On démontre que l'hyperbole $x^2 - y^2 = 1$ peut être paramétrée par les fonctions hyperboliques d'une manière analogue à celle du cercle $x^2 + y^2 = 1$ par les fonctions circulaires. Cette approche peut être expliquée par les figures suivantes[4]:

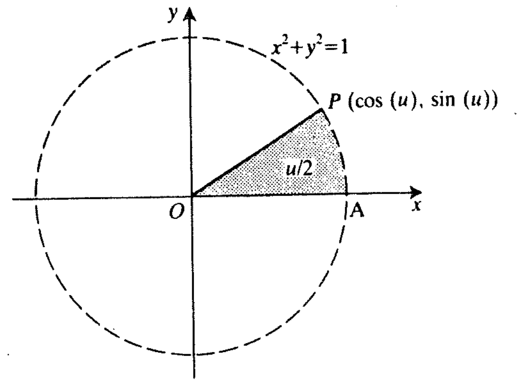


Fig. 1

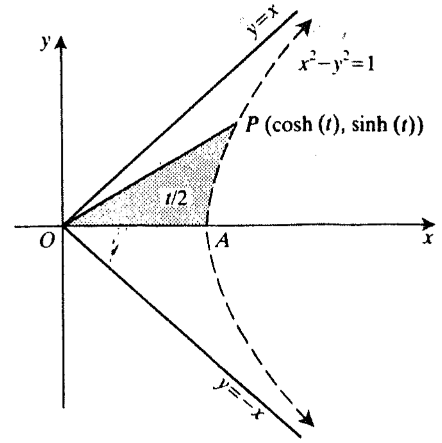
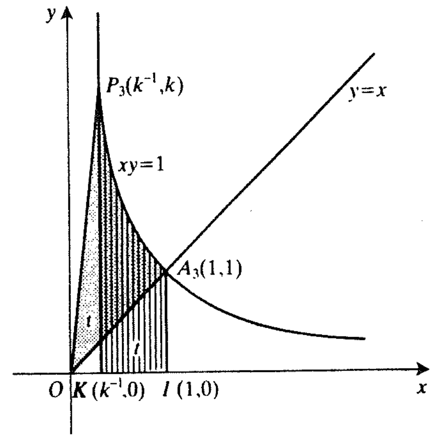


Fig. 2



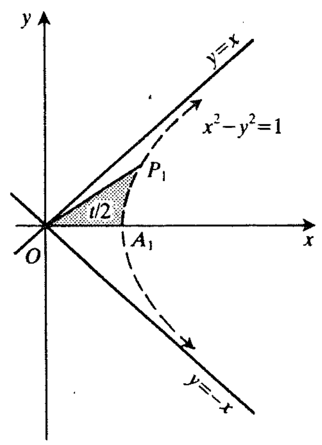


Fig. 7

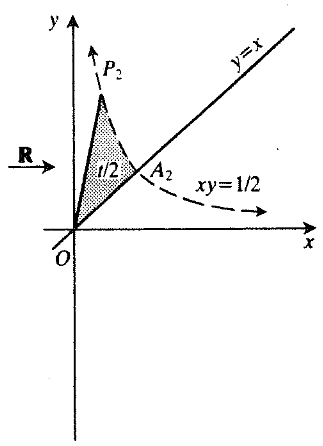


Fig. 8

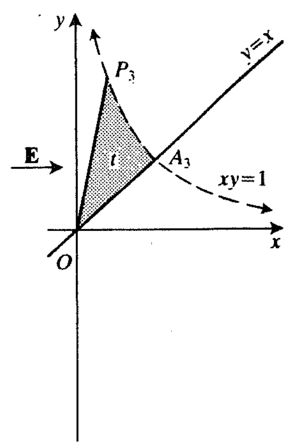


Fig. 9

[4]Bibby and Hoare (1989), p. 24-26

Si nous connaissons les coordonnées de P_3 en termes de fonctions exponentielles de t, nous pouvons rapporter les coordonnées de P_1 à celles de P_3. P_3 est l'image de P_1 par la transformation **ER**, d'où

$$P_1 = \mathbf{R}^{-1}\,\mathbf{E}^{-1}\,(P_3)$$

En termes de matrices, nous avons :

$$\begin{pmatrix}\cosh t\\ \sinh t\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}}\\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}} & 0\\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}e^{-t}\\ e^{t}\end{pmatrix}$$

donc

$$\begin{pmatrix}\cosh t\\ \sinh t\end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix}e^{t} + e^{-t}\\ e^{t} - e^{-t}\end{pmatrix}$$

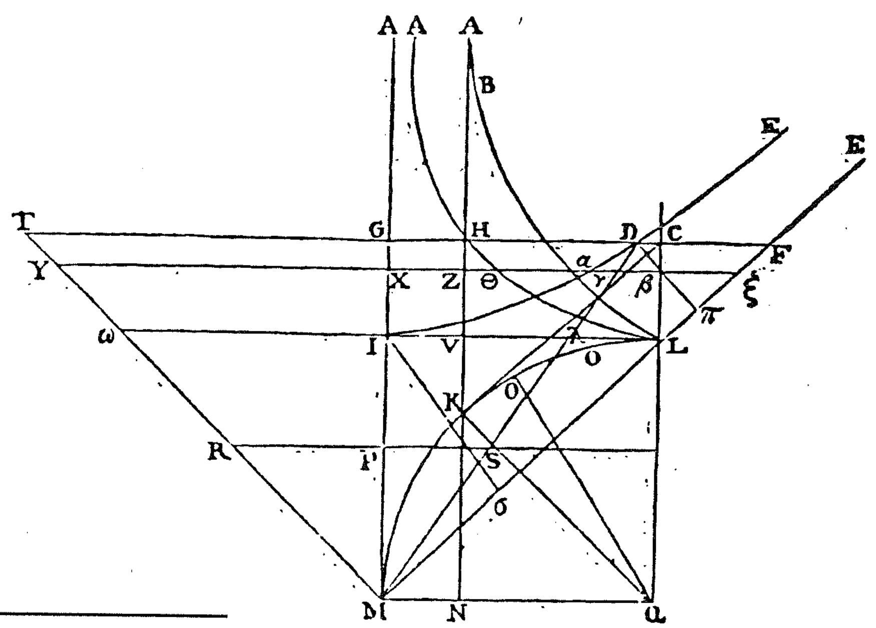
ou

$$\cosh t = \frac{e^{t} + e^{-t}}{2} \qquad \text{et} \qquad \sinh t = \frac{e^{t} - e^{-t}}{2}$$

(Tous les détails de cette approche se trouvent dans l'article de Bibby and Hoare (1989)). Ici, la distinction importante est que les expressions des fonctions hyperboliques en termes de fonctions exponentielles deviennent un théorème, pas une définition, ce qui serait l'approche déductiviste. Graham Hoare, le collègue avec lequel j'ai employé cette approche, et moi-même, nous n'avions aucune idée de son authenticité historique. Mais j'ai décidé de chercher !

Tout d'abord, il s'agit d'établir l'identité entre l'aire d'un espace hyperbolique et celle d'un secteur hyperbolique (voir Fig 10 de Bibby et Hoare). J'ai trouvé une référence à celui-ci dans un travail de James Gregory (1638-75), publié en 1688. Dans cet article, le secteur hyperbolique est dénoté MID et l'espace hyperbolique est dénoté $ID\pi\sigma$[5]:

GREGORII ANALOGIA

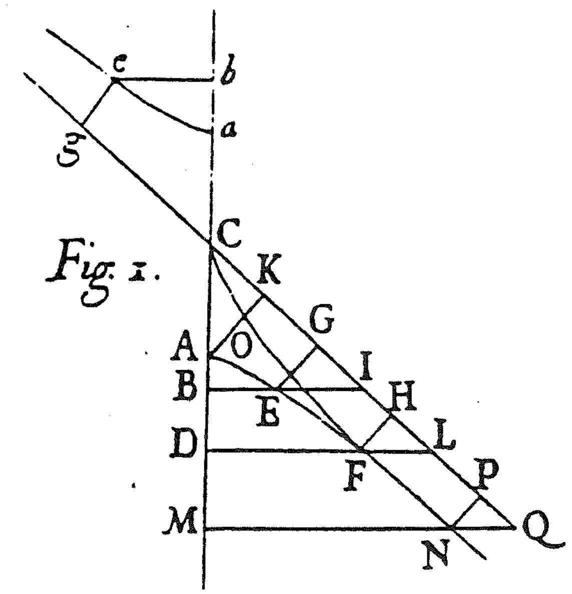


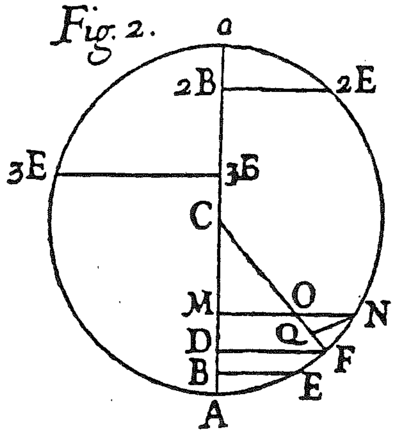
[5]Gregory (1668)

CONSECTARIUM.

Hinc ſequitur, quòd figura BLQN ſemper ſit dupla logarithmi differentiæ inter tangentem & ſecantem arcus KL, poſito radio LI loco unitatis, quod ſic probo. Ex punctis I, D, in aſymptoton ME demittantur perpendiculares $I\sigma$, $D\pi$; ex demonſtratis in Circ. & Hyperb. Quad. manifeſtum eſt ſectorem MID eſſe æqualem figuræ $ID\pi\sigma$, item figuram $ID\pi\sigma$ eſſe logarithmum rectæ $D\pi$ poſitâ $I\sigma$ unitate ; ut autem $I\sigma$ ad $D\pi$ ita IL radius ad DF differentiam inter tangentem & ſecantem, & ideo poſita IL unitate erit idem ſector MID logarithmus rectæ DF, nempe exceſſus quo ſecans arcus KL ſuperat ejuſdem tangentem.

On peut aussi trouver cette identité dans les travaux de Roger Cotes (1682-1716) : la Proposition IV de *Logometria* (1714) montre que le fait était bien connu en ce temps-là. Par conséquent, nous ne devons pas être surpris de trouver encore ce fait dans les travaux de Vincenzo Riccati (1707-1775) : voici un extrait de ses *Opuscules* que j'ai finalement trouvés à la bibliothque de la Royal Society, à Londres. Et c'est très important car nous trouvons ici, pour la première fois, les expressions *cosinus hyperbolicus* et *sinus hyperbolicus*. L'argument qui concerne l'identité entre les aires d'espaces et de secteurs apparaît alors ; Riccati s'exprime très clairement[6]:





[.....] Si dans le cercle, dont le rayon est CA on prend un arc AF et qu'on en tire la normale FD à CA, on sait que, si le rayon ou demi-diamètre CA est appelé le *totus sinus*, la ligne droite FD est appelé le sinus de l'arc AF et la ligne interceptée AD est appelée son cosinus. Mais puisque le secteur ACF est égal à la moitié du rectangle formé par le *totus sinus* et l'arc AF, il est clair que le double du secteur ACF divisé par le *totus sinus* est égal à l'arc AF. Ainsi FD peut appelé le sinus et CD le cosinus du double du secteur divisé par le *totus sinus*.

[6]Riccati (1757)

Par analogie les [notions de] sinus et cosinus peuvent être transférées du cercle à l'hyperbole équilatère. Décrivons une hyperbole équilatère dont le demi-axe CA est égal au rayon du cercle, et du centre C à un point quelconque F situé sur la courbe, tirons une ligne CF, et tirons FD du même poiunt F à CA prolongée. Si CA est appelée le *sinus totus hyperbolicus*, FD pourrait être appelée le *sinus hyperbolicus*, CD le *cosinus hyperbolicus* du double du secteur ACF divisé par le *sinus totus*. Ce sont les définitions des termes.

Mais on peut poser la question : "pourquoi a-t-on dû faire les comparaisons, les analogies entre le cercle et l'hyperbole?". La réponse n'est pas simple, et la question se situe dans un contexte général de problèmes de navigation. Il y a aussi un contexte particulier, dans lequel on a essayé de donner une signification aux quantités imaginaires : il y a eu une attitude sérieusement ambivalente en face de ces quantités, et on a cherché une présentation géométrique, pour les rendre plus "réelles". Deux exemples de cette époque illustreront cette attitude. Cajori (1913 : 111-2) décrit le travail de Karsten, en 1768, dans lequel il a transformé l'hyperbole $x^2 - y^2 = 1$ en le cercle $x^2 + z^2 = 1$ par la substitution $y = z\sqrt{-1}$: il écrit "le cercle est une partie imaginaire de l'hyperbole" et *vice versa.* Il y a aussi le travail de Playfair (1778), cité par Nagel[7]:

> *...he found that the* sine *and the* cosine *of an angle can be stated in terms of the exponential function e with "imaginary" exponents, and hence that many properties of the circle can be formulated in terms of "imaginary numbers"; but he also found that when in such expressions* $\sqrt{1}$ *is substitued for* $\sqrt{-1}$, *true theorems concerning the hyperbola are obtained. Accordingly, the value of "imaginary numbers" lies in their* suggesting *to us, but* not demonstrating, *analogous theorems for other geometric figures.*

Sans doute, l'homme le plus important dans ce contexte a été Johann Heinrich Lambert, 1728-1777. Nous regarderons deux de ses travaux : le premier fut écrit en 1761, et le second en 1768. Nous regarderons, plus particulirement §§ 73-78 du travail de 1761, et §§ 5-14 du travail de 1768.

Le travail de 1761. Ici nous pouvons voir que Lambert fait une analogie entre les développements en série de sinus et cosinus, et ceux de $\frac{1}{2}(e^V - e^{-V})$ et $\frac{1}{2}(e^V + e^{-V})$

> **73. Comparons maintenant *les quantités transcendantes circulaires aux quantités logarithmiques* qui leur sont analogues. Soit *e* le nombre, dont le logarithme hyperbolique est = 1. Et on sait que, si dans les deux suites dont nous nous sommes servis ci-dessus (§ 4)**
>
> $$\sin v = v - \frac{1}{2\cdot3}v^3 + \frac{1}{2\cdot3\cdot4\cdot5}v^5 - \frac{1}{2\cdot3\cdot4\cdot5\cdot6\cdot7}v^7 + \text{etc.}$$
>
> $$\cos v = 1 - \frac{1}{2}v^2 + \frac{1}{2\cdot3\cdot4}v^4 - \frac{1}{2\cdot3\cdot4\cdot5\cdot6}v^6 + \text{etc.}$$
>
> **tous les signes sont pris positifs, elles se changent en**
>
> $$\frac{e^v - e^{-v}}{2} = v + \frac{1}{2\cdot3}v^3 + \frac{1}{2\cdot3\cdot4\cdot5}v^5 + \frac{1}{2\cdot3\cdot4\cdot5\cdot6\cdot7}v^7 + \text{etc.}$$
>
> $$\frac{e^v + e^{-v}}{2} = 1 + \frac{1}{2}v^2 + \frac{1}{2\cdot3\cdot4}v^4 + \frac{1}{2\cdot3\cdot4\cdot5\cdot6}v^6 + \text{etc.}$$

[7]Nagel (1979) p.174

> **Or, en traitant ces deux dernieres suites de la même maniere que nous avons traité les deux premieres (§ 4 et suiv.), l'opération ne différera que dans les signes, qui pour le cas présent seront tous positifs. Comme on peut s'en convaincre sans peine, je n'en rapporterai point le détail.**

Mais aux § 75 et suivants, il abandonne les quantités imaginaires. Il commence[8] :

> *Mais ici il s'agit de voir, jusqu'où cette affinité peut être poussée* ***indépendamment*** *des quantités imaginaires (souligné par moi).*

Puis il présente un ensemble de propositions analogues entre *le cercle* $x^2 + y^2 = 1$ et *l'hyperbole* $\xi^2 - \eta^2 = 1$ et établit les relations entre les coordonnées pour chaque courbe, et les différents paramètres, particulièrement le paramètre AT (= tang Φ) et les paramètres u et v qui sont, respectivement, le double de l'aire du secteur hyperbolique et celui du secteur circulaire. Il donne aussi les fonctions dérivées pour les coordonnées par rapport aux paramètres u et v. Il y a deux faits importants ici : premièrement, Lambert n'emploie pas les expressions "cosinus hyperbolique" et "sinus hyperbolique", et deuxièmement, la façon dont il a établi que les "triangles charactéristiques" sont semblables n'est pas claire.

pour l'hyperbole	pour le cercle
l'abscisse $CP = \xi$	.... $CQ = x$
l'ordonnée $PM = \eta$.......	.... $QN = y$
le segment $AMCA = u : 2$....	.... $ANCA = v : 2$
et il sera	
$\text{tang}\,\varphi = \frac{\eta}{\xi}$	$\text{tang}\,\varphi = \frac{y}{x}$
$1 + \eta\eta = \xi\xi = \eta\eta\cdot\cot\varphi^2$	..... $1 - yy = xx = yy\cdot\cot\varphi^2$
$\xi\xi - 1 = \eta\eta = \xi\xi\cdot\text{tang}\,\varphi^2$	..... $1 - xx = yy = xx\cdot\text{tang}\,\varphi^2$
$CM^2 = \xi^2 + \eta^2 = \xi^2(1 + \text{tang}\,\varphi^2)$ $= \frac{1 + \text{tang}\,\varphi^2}{1 - \text{tang}\,\varphi^2}$	$CN^2 = x^2 + y^2 = x^2(1 + \text{tang}\,\varphi^2)$ $= \frac{1 + \text{tang}\,\varphi^2}{1 + \text{tang}\,\varphi^2} = 1$.
Donc	
$+du = d\varphi\cdot\left(\frac{1 + \text{tang}\,\varphi^2}{1 - \text{tang}\,\varphi^2}\right) = \frac{d\,\text{tang}\,\varphi}{1 - \text{tang}\,\varphi^2}$	$+dv = d\varphi = \frac{d\,\text{tang}\,\varphi}{1 + \text{tang}\,\varphi^2}$
$+d\xi = \frac{\text{tang}\,\varphi\cdot d\,\text{tang}\,\varphi}{(1 - \text{tang}\,\varphi^2)^{3:2}}$	$-dx = \frac{\text{tang}\,\varphi\cdot d\,\text{tang}\,\varphi}{(1 + \text{tang}\,\varphi^2)^{3:2}}$
$+d\eta = \frac{d\,\text{tang}\,\varphi}{(1 - \text{tang}\,\varphi^2)^{3:2}}$	$+dy = \frac{d\,\text{tang}\,\varphi}{(1 + \text{tang}\,\varphi^2)^{3:2}}$
$\xi = \frac{1}{\sqrt{(1 - \text{tang}\,\varphi^2)}}$	$x = \frac{1}{\sqrt{(1 + \text{tang}\,\varphi^2)}}$
$\eta = \frac{\text{tang}\,\varphi}{\sqrt{(1 - \text{tang}\,\varphi^2)}}$	$y = \frac{\text{tang}\,\varphi}{\sqrt{(1 + \text{tang}\,\varphi^2)}}$

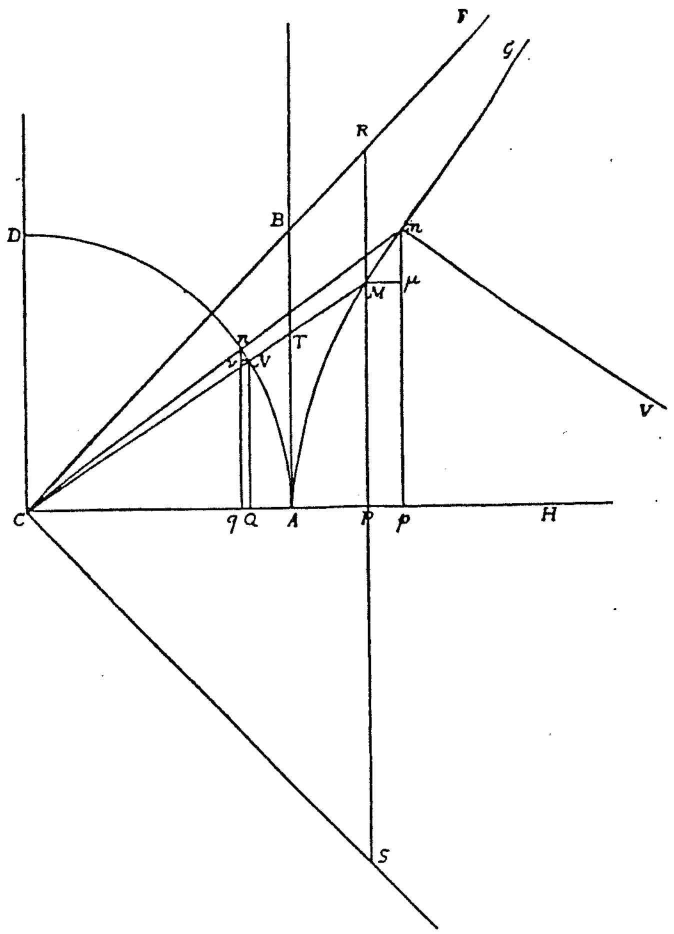
[8]Lambert (1761), p. 147

Donc

$$+\, d\xi : du = \eta \;\ldots\ldots\ldots\ldots \quad\Big|\quad \ldots\; -dx : dv = y$$

$$+\, d\eta : du = \xi \;\ldots\ldots\ldots\ldots \quad\Big|\quad \ldots\; +dy : dv = x$$

$$+\, d\xi = d\eta \cdot \text{tang}\,\varphi \;\ldots\ldots\ldots \quad\Big|\quad \ldots\; -dx : dy = \text{tang}\,\varphi .$$



76. Comme l'angle φ est le même pour l'hyperbole et pour le cercle, il suit des deux dernieres équations qu'il est

$$\text{tang}\,\varphi = d\xi : d\eta = -\,dx : dy = \eta : \xi = y : x \; .$$

Ainsi les angles Mmp, Nnq sont égaux. Ce qui donne

$$Mm : Nn = d\xi : -dx = d\eta : dy \; .$$

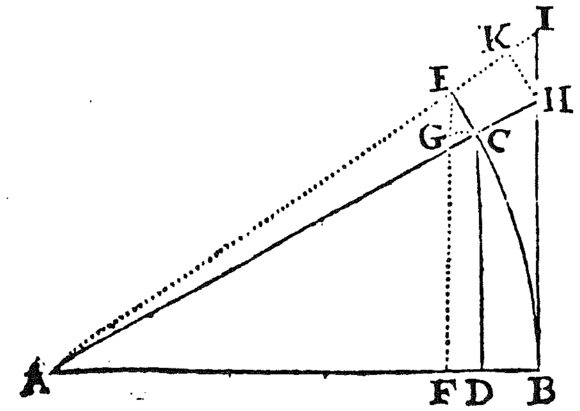
Et les triangles caractéristiques $Mm\mu$, $Nn\nu$ sont semblables. Enfin, comme il est $Cnq = Cmp$ et $Nnq = Mmp$, il sera $Cnq + Nnq = Cmp + Mmp = 90°$. Tirant donc la normale mV, il sera $Vmp + Mmp = 90°$, donc $Vmp = Cmp$. Ainsi la normale mV prolongée jusqu'à l'axe AC est égale à Cm, tout comme dans le cercle la normale Cn est égale à Cn. Voilà donc sur quoi se fonde tout ce qu'il y a de réel dans les comparaisons qu'on a faites enrte le cercle et l'hyperbole.

La méthode par laquelle il établit ses résultats pour les dérivées des coordonnées était bien connue. Par exemple, on peut la trouver dans les travaux de Roger Cotes : dans *Harmonia Mensuarum* (1722) Cotes établit en effet que la dérivée de sinus est égale à cosinus, par la méthode des "triangles caractéristiques". Dans la figure suivante, tirée de l'ouvrage de Cotes, EC : EG :: AC : AD ; ou, employant la notation de Leibniz,

$$dx/d(\sin x) = 1/\cos x .$$

LEMMA I.

Variatio minima cujuſvis arcus circularis eſt ad Variationem minimam Sinus ejuſdem arcus ut Radius ad Sinum complementi.



Ce résultat dit, en effet, que $\sin'(x) = \cos(x)$. On peut montrer, (et dans la version anglaise de ce travail, je l'ai fait) que le choix des "doubles des aires des secteurs" comme paramètres est crucial si l'on veut préserver l'analogie entre les dérivées des fonctions circulaires et celles des fonctions hyperboliques. Par exemple, $\xi' = \eta$ et $\eta' = \xi$ n'est vrai que si, et seulement si, l'on a employé le "double de l'aire du secteur" pour le paramètre.

Le travail de 1768. Dans ce travail, il est clair que Lambert a lu les oeuvres de Riccati. Il nomme, enfin, ξ "*cosinus hyperbolique*", et η "*sinus hyperbolique*" et il insiste sur l'importance du choix du "double de l'aire de secteur" pour paramètre. Il écrit :

> 6. ... *Mais voici ce qu'il faut bien observer. Les* **sinus** *et* **cosinus circulaires** *peuvent se rapporter indifféremment à l'***arc**, *à l'***angle** *et au* **secteur**, *à cause de la proportionnalité constante qui s'y trouve. Il n'en est pas de même pour ce qui regarde les* **sinus** *et les* **cosinus hyperboliques** *pq, Cp. C'est aux secteurs QCqQ que ces fonctions veulent principalement être rapportées, afin d'être à tous égards analogues aux* **sinus** *et* **cosinus circulaires**.

L'innovation de ce travail est l'introduction de "*l'angle de commutation*", ω dans la figure suivante, c'est l'angle PCQ, et on peut voir aussi le secteur QCqQ auquel Lambert fait référence. Il l'emploie pour faire un rapport entre les fonctions hyperboliques et les fonctions circulaires sécante et tangente. On peut employer les deux fonctions sécante et tangente pour paramétrer l'hyperbole, parce que $\sec^2\omega - \tan^2\omega = 1$. Lambert en déduit une relation entre les paramètres ω et u : c'est

$$u = \ln\, \tan\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\omega}{2}\right) \quad (\text{soit } f(\omega))$$

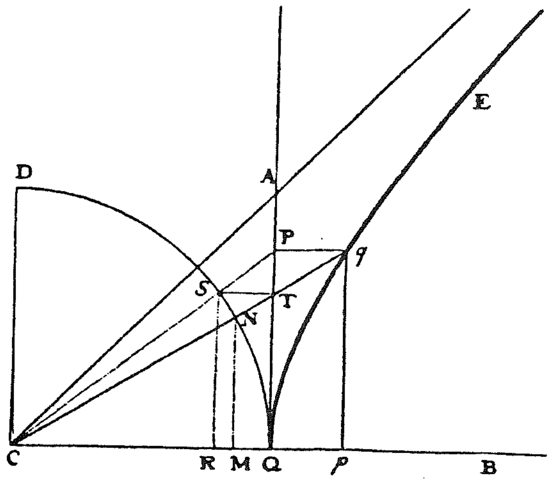
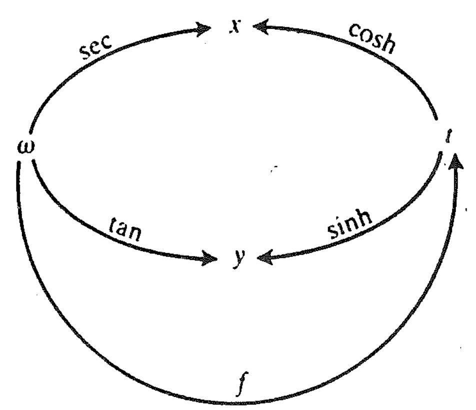


Fig. 2

On peut employer la fonction *f* pour obtenir les tables des fonctions hyperboliques. Simplement, il ajoute une colonne qui contient les valeurs de *u* qui répond aux valeurs de ω. Et voilà ! Au lieu de tang il suffit de lire sinh (ou sin hyp), et on a une table d'une des fonctions hyperboliques. Très simple ! Mais c'est, malgré tout, utile d'apprécier que les cinq fonctions sont reliées de la manière suivante :



T A B L E.

I.	II.	III.	IV.	V.	VI.	VII.	VIII.	IX.
Angle tranſc.	Secteur hyperbolique.	Sinus hyperbol.	Coſinus hyperbol.	Log. du ſinus hyperbol.	Log. du coſ. hyperbol.	Tang. de l'angle commun.	Log. tang. de l'angle commun.	Angle commun.
0	0, 0000000	0000000	1, 0000000	infini négatif	10, 0000000	0000000	infini négatif	0. 0. 0
1	75803	174551	1. 0001523	8. 2419215	10. 0000662	174524	8. 2418553	0. 59. 59, 5
2	151628	349208	1. 0006095	8. 5430838	10. 0002646	349795	8. 5428192	1. 59. 55, 7
3	227500	524078	1. 0013723	8. 7193958	10. 0005956	523360	8. 7188002	2. 59. 45, 2
4	303441	699268	1. 0024419	8. 8446437	10. 0010592	697565	8. 8435845	3. 59. 35, 0
5	379475	874587	1. 0038198	8. 9419518	10. 0016558	871557	8. 9402960	4. 58. 51, 8
6	455626	1051042	1. 0055082	9. 0216202	10. 0023857	1045285	9. 0192346	5. 58. 2, 2
7	531916	1227846	1. 0075099	9. 0891438	10. 0032493	1218693	9. 0858945	6. 56. 54, 0
8	608369	1405408	1. 0098276	9. 1478025	10. 0042472	1391731	9. 1435553	7. 55. 23, 0
9	685011	1583844	1. 0124651	9. 1997125	10. 0053801	1564345	9. 1943324	8. 53. 27, 5
10	761865	1763270	1. 0154267	9. 2463188	10. 0066485	1736482	9. 2396702	9. 51. 3, 9
11	838955	1943803	1. 0187168	9. 2886523	10. 0080534	1908090	9. 2805989	10. 48. 9, 7
12	916308	2125565	1. 0223407	9. 3274745	10. 0095956	2079117	9. 3178789	11. 44. 42, 2
13	993948	2308682	1. 0263039	9. 3633641	10. 0112761	2249511	9. 3520880	12. 40. 39, 8
14	1071902	2493280	1. 0301635	9. 3967711	10. 0130959	2419219	9. 3836752	13. 35. 59, 3
15	1150195	2679492	1. 0352762	9. 4280525	10. 0150562	2588190	9. 4129962	14. 30. 38, 9
16	1228856	2867454	1. 0402993	9. 4574964	10. 0171584	2756374	9. 4403381	15. 24. 36, 7
17	1307911	3057307	1. 0456918	9. 4853390	10. 0194037	2923717	9. 4659353	16. 17. 50, 7
18	1387390	3249197	1. 0514622	9. 5117760	10. 0217937	3090170	9. 4899824	17. 10. 19, 3
19	1467320	3443276	1. 0576207	9. 5369719	10. 0243299	3255682	9. 5126419	18. 2. 1, 0
20	1547732	3639706	1. 0641778	9. 5610658	10. 0270142	3420202	9. 5340517	18. 53. 54, 2
21	1628657	3838640	1. 0711450	9. 5841774	10. 0298483	3583679	9. 5543292	19. 42. 57, 8
22	1710126	4040262	1. 0785347	9. 6064096	10. 0328341	3746066	9. 5735754	20. 32. 10, 6
23	1792171	4244749	1. 0863604	9. 6278519	10. 0359739	3907311	9. 5918780	21. 20. 31, 7
24	1874826	4452287	1. 0946363	9. 6485831	10. 0392598	4067366	9. 6093133	22. 8. 0, 1
25	1958127	4663077	1. 1033779	9. 6686725	10. 0427243	4226183	9. 6259483	22. 54. 35, 3
26	2042108	4877326	1. 1126019	9. 6881818	10. 0463397	4383712	9. 6418420	23. 40. 16, 5
27	2126807	5095254	1. 1223262	9. 7071650	10. 0501190	4539905	9. 6570468	24. 25. 3, 4
28	2212263	5317094	1. 1325701	9. 7256744	10. 0540651	4694716	9. 6716093	25. 8. 55, 4
29	2298515	5543090	1. 1433141	9. 7437520	10. 0581807	4848096	9. 6855712	25. 51. 52, 4
30	2385606	5773503	1. 1547005	9. 7614394	10. 0624694	5000000	9. 6989700	26. 33. 54, 2
31	2473580	6008606	1. 1666334	9. 7787737	10. 0669344	5150381	9. 7118393	27. 15. 0, 7
32	2562480	6248694	1. 1791784	9. 7957692	10. 0715795	5299193	9. 7242097	27. 55. 11, 9
33	2652356	6494076	1. 1923633	9. 8125174	10. 0764086	5446390	9. 7361088	28. 34. 28, 0
34	2743256	6745085	1. 2062180	9. 8289874	10. 0814258	5591929	9. 7475617	29. 12. 49, 0
35	2835233	7002075	1. 2207746	9. 8452268	10. 0866315	5735764	9. 7585913	29. 50. 15, 2
36	2928141	7265426	1. 2360680	9. 8612610	10. 0920424	5877853	9. 7692187	30. 26. 47, 0
37	3022637	7535540	1. 2521357	9. 8771144	10. 0976514	6018150	9. 7794630	31. 2. 24, 7
38	3118182	7812856	1. 2690182	9. 8928098	10. 1034679	6156615	9. 7893420	31. 37. 8, 4
39	3215039	8097840	1. 2867596	9. 9083692	10. 1094974	6293204	9. 7988718	32. 11. 59, 0
40	3313275	8390996	1. 3054073	9. 9238135	10. 1157460	6427876	9. 8080675	32. 43. 56, 4
41	3412960	8692868	1. 3250130	9. 9391631	10. 1222201	6560590	9. 8169429	33. 15. 57, 9
42	3514069	9004041	1. 3456327	9. 9544374	10. 1289265	6691306	9. 8255109	33. 47. 15, 7
43	36169 1	9325151	1. 3673275	9. 9696559	10. 1358725	6819984	9. 8337833	34. 17. 38, 1
44	3721481	9656888	1. 3901636	9. 9848372	10. 1430657	6946584	9. 8417713	34. 47. 10, 0
45	3827757	1. 0000000	1. 0000000	10. 0000000	10. 1505150	7071068	9. 8494850	35. 15. 52, 0

Dans les tables données par Lambert, la colonne I correspond à ω, la colonne II à *u*/ln 10, (parce qu'il a employé $\log_{10}$, pas ln, pour le calcul de f(ω) !) et la colonne IV, par exemple, correspond à cosh (*u*) ou sec(ω). Par le simple expédient de juxtaposer la colonne II, Lambert a construit des tables de fonctions hyperboliques, et a évité la nécessité de faire beaucoup de nouveaux calculs !

J'ai essayé de montrer que le style heuristique peut retrouver la lutte et l'aventure dont Lakatos a parlé. En outre, il semble que l'analogie a une place importante en mathématiques : je crois qu'il serait malheureux si nous présentions le sujet sous un faux jour. Il faut que nous retrouvions les heuristiques pour donner de la vérité à notre sujet.

REMERCIEMENTS

Je voudrais beaucoup remercier Frédéric Métin de l'IREM de Reims pour m'avoir beaucoup aidé à traduire cet article.

APPENDICE A: Traduction de l'extrait de Griffiths (1984) par Frédéric Métin

37,2 **Définitions et Propriétés Fondamentales**

Les fonctions cosh(x) et sinh(x) (parfois appelées cosinus et sinus hyperboliques) sont définies par :

$$\cosh(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2} \qquad \sinh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}.$$

On écrit souvent pour abréger ch x et sh x. [.....]

Par analogie avec les fonctions trigonométriques, on définit quatre autres fonctions hyperboliques: par exemple, $\tanh(x) = \frac{\sinh(x)}{\cosh(x)}$ (= [...]), avec des définitions similaires pour coth(x), sech(x) et cosech(x).

Qu. 1 :

(I) Tracer la représentation graphique des six fonctions hyperboliques.
(II) Montrer que $\mathrm{ch}^2 x - \mathrm{sh}^2 x = 1$, et trouver deux autres identités *Pythagoriciennnes*.
(III) Montrer que sh'(x) = ch(x), et ch'(x) = sh(x).
(IV) Trouver les dérivées des autres fonctions hyperboliques.

Qu. 2 :

(I) Tracer la représentation graphique de $x = \cosh(t)$, $y = \sinh(t)$ où t est un paramètre.
(II) Vérifier le tracé en éliminant t entre les équations (cela explique le nom "fonctions hyperboliques". Pour une raison semblable, cos x et sin x sont parfois appelées "fonctions circulaires").

Qu. 3 :

Trouver les premiers termes des développements en série de cosh x et sinh x :

(I) en utilisant ceux de e^x et e^{-x},
(II) en utilisant directement la formule de Taylor/Maclaurin.

REFERENCES

BIBBY N. et HOARE G. (1989)
"Hyperbolic Functions : an approach by analogy" in *Teaching Mathematics and its Applications*, Volume 8 n° 1

CAJORI F. (1913)
"History of the Exponential and Logarithmic Concepts" in *American Mathematical Monthy*, Volume XX

COTES R. (1722)
"Aestimatio Errorum" in *Harmonia Mensurarum*, Cambridge University Press, Cambridge

COURANT R. et JOHN F (1965)
Introduction to Calculus and Analysis, Intersciences

GREGORY J. (1668)
Excercitationes Geometricae

GRIFFITHS D. (1984)
Pure mathematics, Harrap, London.

LAKATOS I. (1984)
Preuves et Réfutations (traduit de l'anglais par Balacheff), Hermann, Paris

LAMBERT J. H. (1948)
Opera Mathematica, Volume 1, Orell Füssli, Zürich

NAGEL E. (1979)
Teleology revisited and other essays in the philosophy and history of science, Columbia University Press

RICCATI V. (1757)
Opuscules