BOOLE ET LA MATHEMATISATION DES OPERATIONS DE L'ESPRIT[1]

Marie-José DURAND-RICHARD

Chercheur associé. Equipe REHSEIS
UPR 318 du CNRS

La connaissance la plus immédiate que nous ayons aujourd'hui du nom de G. Boole est celle d'une structure mathématique qui porte son nom : l'algèbre de Boole[2], dont le caractère binaire constitue une des spécificités les plus remarquées, parce que constamment à l'oeuvre en informatique[3]. Pourtant, on chercherait en vain la présentation axiomatique d'une telle structure dans l'oeuvre de G. Boole, que ses successeurs expliciteront pendant la seconde moitié du dix-neuvième siècle. Qui plus est, G. Boole, en rédigeant ses deux ouvrages principaux, *The Mathematical Analysis of Logic*, et *An Investigation on the Laws of Thought*, n'a ni l'intention, ni la conscience de produire un nouvel objet ou un nouvel être mathématique[4]. Sur le plan épistémologique, son projet est tout autre. Parce qu'il conçoit le raisonnement comme la mise en oeuvre de procédures symboliques, G. Boole vise à compléter la syllogistique aristotélicienne, et à lui conférer, non seulement une plus parfaite fonction instrumentale, mais le statut d'une science, ceci en traduisant les formes et les procédures de la logique par des expressions mathématiques. Ce faisant, en calquant les symboles logiques sur ceux de l'algèbre, il produit un système déductif qui se présente comme un calcul. Du même coup, il est donc le premier à détacher philosophie et analyse du raisonnement. Le travail de G. Frege (1848-1925) marque la seconde étape fondamentale sur cette voie : partant d'un projet d'explicitation de tous les ressorts logiques de la démonstration, il construira une véritable théorie mathématique de la déduction, présentée sous forme axiomatisée, et qui inverse la relation entre logique

---

[1]Je ne saurais présenter cet article sans dire ma dette à l'égard de S.B. Diagne, d'abord pour sa thèse de doctorat d'Etat : *Philosophie symbolique et Algèbre de la logique*, Paris, Sorbonne, 1988, dont la traduction des *Lois de la Pensée* de G. Boole, qui forme le tome I, a été publiée chez Vrin en 1992 et dont les citations de cet article sont extraites; ensuite pour son ouvrage : *Boole, l'oiseau de nuit en plein jour*, Paris, Belin, 1989. C'est parce que j'avais moi-même travaillé sur l'Ecole Algébrique Anglaise que j'ai été invitée à préparer avec lui les notes et annexes de cet ouvrage. Une récente relecture de G. Boole à la lumière de la philosophie de J. Locke m'a suggéré les pages qui vont suivre. C'est sur la base de ce texte que je suis intervenue le 12 février 1991 au séminaire de l'équipe R.E.H.E.I.S. du C.N.R.S.

[2]Une algèbre de Boole, notée (E,+,*, f) est un ensemble muni des deux lois opératoires notées + et * et d'une application f notée /x telle que $f^2(x) = x$, dont les éléments vérifient alors les propriétés suivantes :
- les deux lois sont associatives et commutatives :
  a+b = b+a , (a+b)+c = a+(b+c) , a*b = b*a , (a*b)*c = a*(b*c)
- elles admettent chacune un élément neutre:
  0+a = a+0 = a , 1*a = a*1 = a
- chacune est distributive par rapport à l'autre:
  a + (b*c) = (a+b) * (a+c) , a *(b+c) = a*b + a*c
- tout élément est idempotent pour chacune des deux lois :
  x + /x = 1 x * /x = 0
- tout couple d'éléments vérifie les lois de dualité de Morgan:
  /(x+y) = /x * /y /(x*y) = /x + /y

d'où il vient que 0 est absorbant pour (*) et que 1 est absorbant pour (+).

[3]Depuis les travaux de G. Birkhoff en 1954, les généralisations de l'algèbre de Boole jouent un rôle important en topologie générale, en géométrie projective, en analyse fonctionnelle, ainsi que dans la théorie ergodique générale et dans celle de la structure des algèbres abstraites. Cf. lettre de G. Birkhoff aux organisateurs de la commémoration du centenaire des *Lois de la Pensée*, in *Proceedings of the Royal Irish Academy*, vol. 57, section A, n° 6, cité par S.B. Diagne, op. cit., 1989, p. 13.

[4]G. Boole, *The Mathematical Analysis of Logic, being an Essay towards a Calculus of Deductive Reasoning*, McMillan, Barclay and McMillan, Cambridge, 1847. & *An Investigation on the Laws of Thought, on which are founded the mathematical Theories of Logic and Probabilities*, Cambridge, McMillan & co, 1854.

et mathématique; la logique des classes y est devenue un cas particulier de la logique des propositions[5].

Relativement au travail de G. Boole, je m'intéresserai très précisément ici aux conditions qui ont présidé à son élaboration, à commencer justement par la spécificité des rapports entre mathématiques et logique dans l'Angleterre de la première moitié du dix-neuvième siècle. En effet, si George Boole peut à juste titre être qualifié d'autodidacte[6], il est essentiel de prendre en compte le fait que le phénomène est alors assez courant[7], et que notre auteur n'est pas un génie isolé travaillant sur ces problèmes sans aucun environnement culturel propre à soutenir sa réflexion. C'est en ce sens que je tenterai de montrer en quoi son calcul logique est directement nourri par les recherches de l'Ecole Algébrique Anglaise[8], qui portent effectivement sur la symbolisation du calcul. Dans ce contexte, l'idée de calcul ne se réfère pas seulement au fait de procéder à des opérations, ou d'en analyser les propriétés. Au-delà de ces aspects techniques, le terme anglais "Calculus" renvoie au calcul infinitésimal, auquel les jeunes mathématiciens de l'Ecole Algébrique Anglaise impulsent un dynamisme nouveau au moment où ils introduisent à Cambridge les acquis de la notation leibnizienne[9]. En ce début du 19ème siècle, dans le cadre de la philosophie naturelle de Newton telle qu'elle vient d'être renouvelée par les travaux de P.S. de Laplace, ce calcul infinitésimal symbolise l'expression même des lois du mouvement dans le "système du monde", c'est-à-dire des lois du monde, puisqu'elles permettent de rendre compte non seulement des lois du mouvement dans le système solaire, mais de celles de la propagation de la chaleur dans un milieu continu[10]. De plus, dans cette Angleterre marquée par les effets de la Révolution Industrielle, les membres de l'Ecole Algébrique Anglaise jouent un rôle de premier plan dans le vaste mouvement de réformes qui va imposer en moins d'un demi-siècle la transformation radicale du rôle et des statuts des anciennes universités anglicanes d'Oxford et de Cambridge. Ils mènent donc de front une double réflexion sur le sens de la notation algébrique et la légitimité des fondements de la connaissance, telle qu'elle doit être enseignée aux élites cultivées pour qu'elles puissent assumer leurs fonctions au sein des nouvelles classes dirigeantes. Le débat fait rage dans les revues de l'époque, notamment *The Edinburgh Review*, la question cruciale est de savoir si la connaissance repose sur des bases strictement logiques, ou sur des bases mathématiques. C'est ce débat qui conduit alors à un regain d'intérêt pour la logique[11], et donne lieu à des avancées nouvelles, suffisamment conséquentes pour que le logicien écossais W. Hamilton les qualifie de "Nouvelle Analytique"[12].

---

[5]Plus essentiellement peut-être, les distinctions nouvelles introduites par Frege sont fondamentales en ce sens qu'elles échappent au découpage aristotélicien de la proposition en termes : elles ont à la fois des raisons logiques et des raisons linguistiques, et libèrent la logique de son asservissement par rapport à la langue. Cf. G. Frege, *Ecrits logiques et philosophiques*, Paris, Seuil, 1971, trad. et introduction C. Imbert, p. 12.

[6]Tel est le titre du premier chapitre de l'ouvrage de S.B. Diagne, op. cit., 1989.

[7]La tradition des "Philomaths", que I. Todhunter qualifiera plus tard de "corps non académique des mathématiciens anglais", est née au dix-huitième siècle. Elle s'exprime dans des revues comme *The Ladies Diary* et *The Gentleman Diary*, dont Olinthus Gregory, un ami de Ch. Babbage, sera éditeur. Dans cette longue tradition des mathématiciens autodidactes, on trouve notamment Ch. Walmesley (1722-1797), E. Waring (1734-1798), J. Landen (1719-1790), W. Spence (1777-1815), W. Horner (1786-1837), P. Barlow (1776-1862). C'est également le cas du chimiste H. Davy (1778-1829), qui sera président de la Royal Society de 1820 à sa mort.

[8] L. Novy, "L'Ecole algébrique anglaise", *Revue de Synthèse*, III° série, n° 49-52, 1968, pp. 211-222.

[9]Dès 1813, Ch. Babbage (1792-1871) et J.F.W. Herschel (1792-1871) publient anonymement, avec quelques autres étudiants, un volume de *Memoirs of the Analytical Society*. Tous deux traduisent en 1816, avec G. Peacock (1791-1858), le *Traité Elémentaire de Calcul Différentiel et Intégral* (1802) de S.F. Lacroix (1765-1843), et en 1820 plusieurs volumes d'exercices à l'usage des examinateurs, et destinés à imposer définitivement la notation leibnizienne dans les examens de Cambridge.

[10]J. Merleau Ponty, "Laplace, un héros de la science normale", *La Recherche*, vol 10, n° 98, 1979, pp. 251-258.

[11]Les auteurs qui nous concernent ici en sont les protagonistes plus ou moins directs. A titre d'exemple, le logicien W. Hamilton (1788-1856) enseigne à l'université d'Oxford, qui a conservé un enseignement fondé sur la logique scolastique, alors que D.F. Gregory (1813-1844), et le logicien-mathématicien A. de Morgan (1806-1871) ont étudié à Cambridge

[12]Sir W. Hamilton, *Lectures on Logic and Metaphysics*, vol. IV, appendice VI. Edimbourg & London, 2ème éd., 1860, p. 251. W. Hamilton se réfère ici aux *Analytiques* d'Aristote, qui furent à la logique ce que les *Eléments* d'Euclide furent aux mathématiques.

La pensée de George Boole, par le biais de sa propre formation et des influences qu'il reçoit notamment de D.F. Gregory et d'A. de Morgan, s'inscrit dans ce cadre conceptuel. Quelques éléments biographiques, retenus comme les plus significatifs, permettront de situer son travail dans le cadre de cette Ecole Algébrique Anglaise. Telles qu'elles sont présentées ici, ses conceptions majeures sont issues des *Lois de la pensée*[13], où elles sont exposées de la façon la plus systématique, et sous une forme qui est d'emblée délibérément mathématique. La spécificité de son travail sera analysée à partir d'une interrogation d'ordre philosophique sur le statut qu'il donne à l'analogie, puisque c'est elle qui lui permet de transférer les symboles des opérations algébriques aux procédures élémentaires de la logique. A ce sujet, le parallélisme de points de vue entre les différents auteurs jusqu'à G. Boole sera référée à la philosophie de J. Locke.

I - G. BOOLE (1815-1864) : ELEMENTS BIOGRAPHIQUES

George Boole est né à Lincoln, dans l'est de l'Angleterre, d'un père artisan, membre fondateur de l'*Institut de Mécanique* de cette ville. De par son éducation, il possède une solide culture classique et des rudiments de mathématiques. C'est dès l'âge de 16 ans, son père ayant fait faillite, qu'il subvient aux besoins de sa famille : il sera maître adjoint dans plusieurs écoles, puis directeur d'un pensionnat privé. De 1849 à sa mort en 1864, il sera titulaire de la chaire de mathématiques du Queen's College de Cork, dans le sud de l'Irlande. Il se mariera en 1855 avec la nièce de Sir George Everest, dont il aura 5 filles.

De ces éléments biographiques, il faut retenir l'importance de ces institutions de mécanique, qui foisonnent en Angleterre dès le début du 19ème siècle, en même temps que de nombreuses sociétés savantes en province, assurant les unes et les autres de nouvelles formes de diffusion du savoir, face à des institutions traditionnelles quelque peu dépassées par l'ampleur des transformations conceptuelles et sociales. G. Boole y enseigne plusieurs années bénévolement, mais surtout, c'est là qu'il accède aux ouvrages de mathématiques continentales, notamment la *Mécanique Analytique* de J.L. Lagrange (1736-1813), et le *Traité Elémentaire de Calcul différentiel et Intégral* de S.F. Lacroix. C'est en 1840 qu'il propose à D.F. Gregory, directeur du *Cambridge Mathematical Journal*[14], les premiers travaux où il s'interroge sur les principes logiques qui peuvent justifier les démarches mécaniques de l'algèbre. Ses premiers articles portent sur la recherche de méthodes symboliques de résolution d'équations différentielles[15], et le conduisent à une théorie générale des symboles et à l'élaboration d'une méthode générale en Analyse, qui lui vaudra en 1844 la Médaille d'Or de la Royal Society[16]. Ce travail représente donc une étape importante vers l'élaboration de sa théorie symbolique des lois du raisonnement, exposée dans ses ouvrages de 1847 et 1854, et effectivement fondée sur l'analyse des lois de combinaison de symboles. C'est sur la base de ces travaux qu'il obtient en 1849 la chaire de mathématiques du tout nouveau *Queen's College* de Cork[17]: cette no-

---

[13]Je retiens ici pour partie le titre que donne S.B. Diagne dans sa traduction de cet ouvrage : "Une étude des lois de la pensée, sur lesquelles sont fondées les théories mathématiques de la logique et des probabilités", *Philosophie symbolique et algèbre de la logique*, Thèse de Doctorat d'Etat, 1988. C'est sous ce titre qu'il en a publié la traduction chez Vrin en 1992.

[14]Ce journal, créé en 1837, deviendra en 1844 le *Cambridge and Dublin Mathematical Journal*. G. Boole y publiera de nombreux articles dès 1840.

[15]Notamment G. Boole, "On the Integration of linear differential equations with constant coefficients", *Cambridge Mathematical Journal*, 1841, 2, pp. 114-119.

[16]G. Boole, "On a General Method in Analysis", *Philosophical Transactions of the Royal Society*, 1844, 134, pp. 225-282.

[17]Les Queen's Colleges sont alors les premiers collèges "sans Dieu", c'est-à-dire non anglicans.

mination est un événement, puisque G. Boole est un des premiers titulaires d'une chaire universitaire à ne pas posséder lui-même de titres universitaires.

II - L'INFLUENCE DE L'ECOLE ALGEBRIQUE ANGLAISE

Cette Ecole, dite aussi des Algébristes de Cambridge, se structure autour d'une volonté de renouvellement des institutions universitaires, et appartient à un réseau plus vaste que les historiens appellent le "network" de Cambridge[18], qui participe massivement à la création de nouvelles revues et sociétés savantes. Elle affirme dès 1813 sa volonté de renouveler l'enseignement des mathématiques à l'université de Cambridge, qui est pourtant reconnue comme celle des Universités anglaises où les mathématiques sont le plus enseignées. Elles y ont de fait remplacé la logique dans les examens écrits au cours du 18ème siècle, mais sans que le corpus général des études s'en trouve révisé pour autant, d'où un énorme hiatus entre les statuts et les pratiques au sein de l'université. De plus, le contenu des mathématiques qui sont enseignées reste très crispé, y compris au début du 19ème siècle, dans une double fidélité à Newton et à la géométrie euclidienne. Une telle attitude correspond à une sorte de sacralisation du travail de Newton, issue tant de la querelle de priorité avec Leibniz au sujet de l'élaboration du calcul infinitésimal, que d'une stagnation générale des institutions anglaises depuis la double révolution du 17ème siècle[19].

L'Ecole Algébrique Anglaise se fixe donc pour objectif l'ouverture de l'enseignement des mathématiques aux méthodes continentales, c'est-à-dire à tous les développements du calcul différentiel poursuivis au 18ème siècle, successivement par la famille des Bernoulli, par Euler, Lagrange et Laplace. C'est dans leur réflexion sur l'écriture mathématique qu'est sans cesse réaffirmée l'idée que la science algébrique est avant tout un système de combinaisons de symboles, dont l'algèbre de la logique réalisée par G. Boole sera une réalisation particulière. Conjuguée avec la représentation nouvelle des quantités impossibles (aujourd'hui appelés nombres complexes), cette recherche sur le caractère essentiellement symbolique de l'algèbre aboutira à l'affirmation de l'autonomie des méthodes purement analytiques et à l'abandon du souci réaliste si caractéristique d'une certaine conception des mathématiques au 18ème siècle, qui fut celle d'une véritable adéquation entre le monde et les entités mathématiques.

1- R. Woodhouse : la logique propre des opérations de l'analyse algébrique

Au tournant du siècle, R. Woodhouse (1773-1827) est le premier en Angleterre à proclamer l'indépendance des méthodes algébriques à l'égard du raisonnement géométrique. Il retient essentiellement deux thèmes de recherche extrêmement contemporains, et où l'analogie est alors seule à pouvoir justifier du comportement opératoire de certains concepts mathématiques au contour encore flou. Il s'agit de l'analogie entre les opérations réalisées sur les quantités impossibles et certains résultats trigonométriques fondés sur la géométrie[20], et de l'analogie entre l'opérateur différentiel et les symboles ordinaires, dans la manipulation des séries.

Ces analogies ont déjà été remarquées, et en tant que telles, elles ont déjà fait l'objet de certains travaux[21]. G.W. Leibniz constatait déjà, dans une lettre à J. Wallis,

[18] W. Cannon, "Scientists and Broadchurchmen: An Early Intellectual Network", *Journal of British Studies*, 1964, vol.4, n°1, pp. 65-84

[19] M.J. Durand, "G. Peacock, la Synthèse algébrique comme loi symbolique dans l'Angleterre des Réformes (1830), *Thèse pour le Doctorat de l'Ecole des Hautes Etudes en Sciences Sociales*, Paris, 1985. ch. 1 à 3.

[20] Notamment le développement en série des fonctions trigonométriques à partir de leur définition en termes d'exponentielle.

[21] Au sujet des quantités impossibles: J. Playfair, "On the Arithmetic of Impossible Quantities", *Phil. Trans.*, 1778, 68, pp. 318-343. A.Q. Buée, "Mémoire sur les Quantités Imaginaires", *Phil. Trans.*, 1806, 96, pp. 23-88.

l'analogie entre l'élévation d'une somme de n termes à une certaine puissance m et la différentielle m^{ième} d'un produit de n facteurs. J.L. Lagrange, en 1772, se référant à Leibniz et à Jean Bernoulli quant à l'origine de ses idées, utilise cette analogie dans l'écriture et le fonctionnement opératoire, entre les puissances et les indices de différentiation. Comparant le développement d'une fonction en série de Taylor qui donne la nouvelle valeur d'une fonction u, pour un accroissement ξ de la variable z:

$$u(z+\xi) = u(z) + \frac{du}{dz}\xi + \frac{d^2u}{dz^2}\frac{\xi^2}{2!} + \frac{d^3u}{dz^3}\frac{\xi^3}{3!} + \ldots$$

avec la série qui définit l'exponentielle e^z,

$$e^z = 1 + z + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \ldots$$

J.L. Lagrange remplace z par $\xi\frac{du}{dz}$ et écrit un résultat désormais connu comme le théorème de Lagrange:

$$u(z+\xi) - u(z) = e^{(du/dz)\xi} - 1 \quad \text{ou} \qquad \Delta u = e^{(du/dz)\xi} - 1$$

Cette analogie, mystérieuse au demeurant, demandait à être fondée, d'autant plus que, sous la forme de ce théorème de Lagrange, elle intervenait désormais de façon satisfaisante dans des démonstrations, grâce au formalisme, commode parce que fini, qu'elle permettait d'introduire. C'est elle qui suggère à Arbogast en France, tout au début du 19ème siècle, une méthode de séparation des symboles d'opération de ceux des quantités, qui repose sur le théorème de Lagrange. Il écrit *du* à la place de *du/dz* , ce qui lui permet de séparer, au moins formellement, δ et u. Le théorème de Lagrange s'écrit alors :

$$\Delta u = (e^{\xi\delta} - 1)u, \qquad \text{et finalement} \quad \Delta^n u = (e^{\xi\delta} - 1)^n u$$

où le symbole u qui désigne la fonction est séparé des symboles qui désigne la variable et l'opérateur. En France, F.J. Servois (1767-1847) surtout, mais aussi B. Brisson (1777-1828) et A.L. Cauchy (1789-1857), toujours à la recherche d'une légitimation du calcul différentiel, travailleront à expliciter les principes et à étendre les applications de telles écritures, où *d/dz* joue clairement le rôle d'un opérateur indépendant s'appliquant à une fonction, de même que Δ. Mais les intéressants résultats ainsi obtenus en France ne donneront pas lieu au développement direct d'une idée de symbolisation de l'algèbre.

La spécificité de l'Ecole Algébrique Anglaise s'inscrit justement dans cette primauté accordée au caractère automatique, mécanique, des opérations, et dans la recherche systématique d'une explicitation de leurs propriétés formelles, afin qu'elles leur tiennent lieu de définition, indépendamment de la quantité à laquelle elles peuvent s'appliquer. R.

Au sujet de l'opérateur différentiel : J.L. Lagrange, "Sur une nouvelle espèce de calcul relatif à la différentiation et à l'intégration des quantités variables", *Nouveaux Mémoires de l'Académie Royale des Sciences et Belles-Lettres*. 1772. *Oeuvres*. 3. pp 441-476. L.F. Arbogast, *Du Calcul des Dérivations*, Strasbourg, 1800. F.J. Servois, "Essai sur un nouveau mode d'exposition du calcul différentiel", *Annales de Mathématiques Pures et Appliquées*, vol. 5, 1814-1815.
Pour ce qui est de la problématique générale, E.H. Koppelman, "The Calculus of Operations and the Rise of Abstract Algebra", *Archive for the History of Exact Sciences*, vol. 8, n° 3, 1971; E.H. Koppelmann, *Calculus of Operations : French Influence on the British Mathematics in the first half on the nineteenth century*, 1969, Ph. D. Diss., John Hopkins University.

Woodhouse tient cette analogie pour essentielle, et il la justifie en affirmant pour l'algèbre l'existence d'une logique propre[22]. Il écrit notamment :

"*L'Algèbre est une sorte d'écriture abrégée; un langage, ou un système de caractères ou de signes, inventés dans le but de faciliter la comparaison et la combinaison des idées.....*

"*Les opérations sur les quantités impossibles sont réellement régies par les règles d'une logique tout aussi juste que la logique des quantités possibles...*

"*Une conclusion exprimée à l'aide de certains signes ou caractères, si elle est générale, doit être vraie dans chacun des cas particuliers où elle se présente...*

"*Si les opérations effectuées sur des caractères ou des signes conduisent à des conclusions justes, de telles opérations doivent être vraies en raison de quelque principe...*

"*J'ai la conviction pour ma part, qu'il ne peut y avoir aucun paradoxe ni mystère qui soit inexplicable ou inhérent à un système de caractères de notre propre invention, et combinés selon des règles dont l'origine et le domaine ont été précisément spécifiés....*

"*La démonstration doit être définie comme une méthode destinée à montrer l'agréement d'idées éloignées par le biais d'idées intermédiaires, chacune s'accordant avec celle qui la précède; autrement dit, comme une méthode permettant de dessiner la connexion entre certains principes et une conclusion, grâce à une suite de propositions intermédiaires et identiques, chacune pouvant être convertie, en changeant la combinaison des signes qui la représentent en la suivante, en une autre proposition qui lui est équivalente.*"[23]

Ainsi, R. Woodhouse parie-t-il sur la nature essentiellement rationnelle des opérations de l'esprit lorsqu'il revendique comme gage de rationalité le caractère artificiel de ces inventions de l'esprit que sont les symboles. Pour lui, ces symboles possèdent une logique interne qui garantit la possibilité d'une analogie avec la géométrie, et non l'inverse. C'est pourquoi la démonstration sur ces signes peut être et doit être en tout état de cause préférée à ces analogies, et peut être menée de l'intérieur, du sein même de l'algèbre, en utilisant uniquement ses symboles, sans avoir recours à la naturalité géométrique. Dès 1802, cette même conviction est affirmée avec tant de force qu'elle peut légitimement être considérée comme le cadre général du programme de recherche que développeront ses jeunes successeurs de l'Ecole Algébrique Anglaise.

"*La recherche actuelle m'a convaincu ... que l'introduction, dans l'investigation analytique, d'expressions et de formules non analytiques, est cause de paradoxes, de confusion dans les notions, et d'une grande ambiguïté; elle rend la démonstration prolixe, elle l'affaiblit du point de vue de la précision et de l'exactitude, parce qu'elle détourne l'esprit de la véritable source dont dérive l'expression analytique.*

"*Ces expressions et formules ainsi évoquées sont géométriques, c'est-à-dire qu'elles sont empruntées au langage de la géométrie, et qu'elles sont établies par ses règles : on les trouve mêlées aux expressions et aux raisonnements analytiques, dans tous les travaux sur la science abstraite; et comme elles lui sont étrangères et marginales, si on peut montrer qu'elles ne sont pas absolument nécessaires, ce sera un argument pour les en exclure, surtout dans les investigations analytiques où elles produisent les inconvénients déjà signalés ....*

"*Puisque l'algèbre est un langage universel, elle doit certainement être compétente pour exprimer des conditions appartenant à un sujet de recherche, quel qu'il soit; et si des expressions adéquates sont obtenues, alors, on ne peut douter que le raisonnement et la déduction ne puissent être conduits grâce à elles ....*

[22] R. Woodhouse : "On the Necessary Truth of certain Conclusions obtained by means of imaginary quantities", *Phil. Trans.*, 1801, 91, pp. 89-120.

[23] *Ibid.*, p. 90-93-107. Les traductions des textes concernant l'Ecole Algébrique Anglaise me sont propres. Celles relatives aux textes de G. Boole sont de S.B. Diagne.

"*Que la science géométrique ait été inventée en premier n'est véritablement qu'une circonstance accidentelle.*"[24]

Il est vraisemblable que, issue d'un mémoire de mathématiques écrit ou publié en France à la même époque, une telle affirmation puisse sembler banale[25]. Mais elle ne saurait être minimisée dans un mémoire écrit par un professeur de Cambridge, où les mathématiques enseignées respectent scrupuleusement la forme géométrico-euclidienne des *Principes Mathématiques de la Philosophie Naturelle* de Newton[26]. Elle doit l'être d'autant moins que G. Peacock affirme vouloir, en 1833, expliciter les principes de l'algèbre pour qu'elle puisse devenir un modèle aussi parfait que le furent les *Eléments* d'Euclide[27].

2 - L'Algèbre Symbolique de G. Peacock

Des jeunes mathématiciens de la première génération de l'Ecole Algébrique Anglaise, G. Peacock est celui qui réalise le plus complètement le programme de R. Woodhouse. Dans son *Traité d'Algèbre* de 1830, destiné aux étudiants, et surtout dans son rapport de 1833, destiné au monde savant et intitulé *Rapport sur les progrès récents et l'état actuel de certaines branches de l'analyse*, il légitime l'indépendance des opérations de l'algèbre, en concevant séparément l'algèbre connue, qu'il appelle algèbre arithmétique, ou science de suggestion, correspondant au stade de la découverte, et l'Algèbre Symbolique, dont la logique propre s'exprime par un système de lois purement formelles, un "système de combinaisons de symboles arbitraires", c'est-à-dire "généraux", dit-il, tant "dans leur forme que dans leur valeur"[28], et auquel sont nécessairement soumises toutes les pratiques de l'algèbre connue. Cette algèbre constitue pour G. Peacock le "langage du raisonnement symbolique". La logique de ce langage porte au premier plan le caractère combinatoire d'une algèbre de l'infini, travaillant aussi bien sur des polynômes finis que sur des séries formelles, élaborée à partir de lois considérées comme universelles, mais qui ne sont autres que celles de l'arithmétique. Son "principe de permanence des formes équivalentes" doit à lui seul garantir les conditions de ce transfert systématique des égalités de l'algèbre arithmétique aux équivalences de l'algèbre symbolique. Il s'énonce en deux parties, affirmant que :

"*(A) : Toute forme qui est algébriquement équivalente à une autre quand elle est exprimée en symboles généraux doit continuer à lui être équivalente, quel que soit ce que ces symboles représentent.*"

"*(B) : Toute forme qui est découverte en algèbre arithmétique considérée comme science de suggestion, lorsque les symboles sont généraux dans leur forme, bien que*

[24] R. Woodhouse, "On the Independance of the Analytical and Geometrical Methods of Investigation, and on the Advantages to be Derived from their Separation", *Phil. Trans.*, 1802, n°92, pp. 85-125. Ces extraits se trouvent p. 86-7-9.

[25] C'est là une remarque de Mr R. Rashed au séminaire de l'équipe R.E.H.S.E.I.S. du 12 février 1991.

[26] R. Woodhouse lui-même est fidèle à un tel enseignement, bien qu'il publie en 1803 *Principles of Analytical Calculation*, avec une préface où il argumente pour la défense de ces nouveaux principes.

[27] Même s'il le fait en termes bien plus modestes que ceux que je lui attribue ici! G. Peacock, *Report on the recent progress and actual state of certain branches of analysis*, Cambridge, 1834, p. 283 : "*En fait, il n'existe qu'un seul ouvrage élémentaire qui mérite d'être considéré comme ayant approché de très près la perfection. Les Eléments d'Euclide ont été le manuel des géomètres pendant deux mille ans .... Mais même si nous pouvons nous accorder sur la plus grande simplicité des vérités à démontrer, sur une meilleure definition des objets de la science qu'il faut enseigner, ainsi que sur l'autorité et la sanction que le temps, le respect et la reconnaissance que tous les âges ont accordé à ce remarquable ouvrage, nous pouvons désespérer d'avoir jamais vu un exposé des principes de l'algèbre, ou de toute autre science, qui soit habilité à revendiquer une telle autorité, ou qui puisse devenir également un modèle auquel tous les autres systèmes devraient tendre à ressembler*".

[28] *Ibid.*, p. 194, p. 208.

spécifiques dans leur valeur, doit continuer à être une forme équivalente quand les symboles sont généraux dans leur nature aussi bien que dans leur forme."[29]

Dans ce double énoncé du principe de permanence, G. Peacock explicite, plus encore que ne le faisait R. Woodhouse, la conviction de l'existence d'une structure universelle garantissant la validité des connaissances acquises, une validité qui réside, non pas dans la possibilité de faire jouer une quelconque analogie entre deux champs de savoir, mais dans la généralité des formes obtenues, légitimée par cette Algèbre Symbolique dont l'énoncé (A) affirme justement la prééminence logique, voire chronologique. C'est cette prééminence qui, seule, légitime la possibilité de découvrir, et non pas d'inventer, les procédures opératoires mises en oeuvre au sein de l'algèbre arithmétique[30]. G. Peacock tente de concilier approche génétique et conception finaliste de la connaissance : une approche génétique, au sens où il ne donne dans ses ouvrages aucune présentation axiomatique de l'Algèbre Symbolique, dont les formes générales doivent être au contraire progressivement abstraites de celles de l'Algèbre Arithmétique; et une conception finaliste qui est la seule, dans un tel contexte, à pouvoir valider l'énoncé (B). Comme chez R. Woodhouse, le soin qu'il prend à exclure l'idée que l'analogie puisse suffire à légitimer les résultats acquis correspond à l'affirmation systématique de la primauté ontologique du déductif sur l'inductif.

"*Les opérations et les formes qui en résultent en Arithmétique et en Géométrie, exprimées par des symboles, sont porteuses d'une stricte analogie avec les opérations de même nom, et avec les formes qui en résultent semblablement en Algèbre, quand les symboles sont parfaitement généraux : mais c'est par la loi de permanence des formes équivalentes, et non par analogie, que nous sommes capables de passer de l'une à l'autre: c'est seulement dans la mesure, par conséquent, où l'analogie peut être considérée comme une expression modifiée de cette loi, que nous pouvons légitimement généraliser les conclusions que nous avons obtenues grâce à elle.*"[31]

Prisonnier de cette conception génético-finaliste de la science, G. Peacock ne peut qu'éviter la rupture épistémologique qui lui permettrait d'assumer la liberté du mathématicien comme créateur d'un langage formel[32]. Cette approche explicite non seulement les conceptions de R. Woodhouse, mais celles de Ch. Babbage affirmant dès 1813 la nécessité de développer la recherche d'une théorie générale de l'invention.

"*Observer attentivement les opérations de l'esprit dans la découverte de vérités nouvelles, et retenir ensemble ces liens fugitifs qui fournissent une connexion momentanée entre des idées éloignées, ces liens dont nous acquérons la connaissance de l'existence plutôt par la raison que par la perception, tels sont les objets dont non seulement la poursuite, mais la plus patiente assiduité, peuvent faire espérer le succès. Certes, un tel esprit doit être puissant, que celui qui peut conduire simultanément ces deux processus, dont chacun requiert la plus stricte attention. Mais ces obstacles doivent être surmontés, avant que nous puissions espérer la découverte d'une théorie philosophique de l'invention; une science dont Lord Bacon a montré l'absence totale il y a deux siècles, et qui depuis a fait peu de progrès.*"[33]

Ch. Babbage produira lui aussi de nombreux articles[34] mettant en évidence ou utilisant l'analogie opératoire. Mais lui non plus ne s'éloignera pas pour autant d'une conception finaliste de la connaissance, dont les manifestations sont notamment repérables dans les textes où il défend l'existence des miracles à partir d'exemples mathématiques[35]. Pourtant, Ch. Babbage est sans doute plus pragmatique que G. Peacock, et plus au fait des difficultés que pose le caractère absolu d'une structure telle que celle de l'Algèbre Symbolique, et il renoncera à envisager la publication d'un grand traité[36] rédigé dans les années 1820, et intitulé *The Philosophy of Analysis*.

La recherche d'une explicitation de ces lois formelles structurant une algèbre symbolique universelle est donc déterminante pour l'ensemble des travaux de l'Ecole Algébrique Anglaise. C'est elle qui conduit Ch. Babbage à construire des machines matérialisant les propriétés, d'abord numériques, puis formelles, des opérations : d'abord la machine aux différences, puis la machine analytique. C'est elle qui oriente les travaux de A. de Morgan[37] et D.F. Gregory[38]. Celui-ci établira sur cette voie une véritable typologie des opérations. Les premières recherches de G. Boole porteront sur la résolution d'équations différentielles par des méthodes symboliques, elles utiliseront les propriétés opératoires de l'opérateur *d/dx*. Les mathématiques sont donc, en Angleterre, et ceci bien avant le travail de G. Boole, investies d'une fonction logique essentielle: celle d'exprimer les lois formelles, supposées sous-jacentes, qui président à l'automatisme des opérations de l'algèbre, une algèbre universelle, et qui dépasse de très loin le strict champ du numérique. Cet investissement logico-symbolique de l'algèbre, étroitement associé comme il l'est à l'idée d'arbitraire du signe, s'enracine, comme j'ai déjà tenté de l'établir, dans la conception du langage et des opérations de l'esprit développée par J. Locke dans l'*Essai philosophique sur l'entendement humain* (1694), dont l'étude fait partie de la formation commune de tous ces jeunes mathématiciens[39]. C'est une influence qui éclaire ce paradoxe d'une fonctionnalité à la fois arbitraire et signifiante des opérations. Elle peut être également suivie de manière significative dans les *Lois de la Pensée* de G. Boole.

III - G. BOOLE ET L'EXPRESSION DE LA LOGIQUE COMME CALCUL SYMBOLIQUE

De lui-même, G. Boole en dit peu sur son itinéraire, puisqu'il "contracte", comme l'écrit S.B. Diagne, le "tortueux chemin" de la démarche heuristique en "l'instantanéité d'une révélation", affirmant que c'est en 1833, au cours d'une prome-

---

[29] *Ibid.*, p. 194. Il est difficile de lire aujourd'hui ce double principe de permanence sans se référer implicitement à la théorie des ensembles. De ce strict point de vue, cette double proposition apparait comme fort contestable. L'énoncé (A) peut en effet se traduire par : toute propriété vraie en Algèbre Symbolique est également vraie en Algèbre Arithmétique, ce qui peut être facilement admis si la première est considérée comme incluant la seconde. Mais alors, la seconde partie du principe, réciproque de la première, apparait comme absolument fausse. On peut alors vouloir "réhabiliter" G. Peacock, en considérant cet aspect du principe de permanence comme une anticipation du principe de Lefschetz, principe de transfert légitimé par une propriété topologique : si une propriété est vraie sur une partie partout dense, elle l'est également sur son adhérence. Mais c'est là une lecture téléologique, une interprétation rétrohistorique du travail de G. Peacock.

[30] Même si des signes sont inventés pour ce faire.

[31] G. Peacock, *A Treatise of Algebra*, Cambridge, 1830, p. 184.

[32] C'est une telle rupture qu'osera par contre W.R. Hamilton (1805-1865) en produisant l'idée des quaternions.

[33] C. Babbage, *Memoirs of the Analytical Society*, Cambridge, 1813. Préface anonyme, p. xxi.

[34] C. Babbage, "An Essay towards the Calculus of Functions", *Phil. Trans.*, 1815, 105, pp. 389-423 and 1816, 106, pp. 179-256.
C. Babbage, "Observations on the Analogy which subsists between the Calculus of Functions and other Branches of Analysis", *Phil. Trans.*, 1817, 107, pp. 197-216.
C. Babbage, *Examples of the Functional Equations*, Cambridge, 1820.
C. Babbage, "Observations on the Notation employed in the Calculus of Functions", *Trans. of the Cambridge Philosophical Society*, 1821, 1, pp. 63-76.
C. Babbage, "On the influence of Signs in Mathematical Reasoning", *Trans. of the Camb. Phil. Soc.*, 1827, 2, pp. 217-225.
C. Babbage, "On notation", *Edinburgh Encyclopaedia*, 1830, 15, pp. 395-399.

[35] C. Babbage, *Ninth Bridgewater Treatise*, Cambridge, 1837, pp.100-101 & *Passages from the life of a Philosopher*, Cambridge, 1864, p.440. Il y utilise l'existence de points isolés de certaines courbes, ou la présence aléatoire, dans certaines suites de nombres, de certains éléments apparemment insolites, préalablement programmée par l'opérateur sur sa fameuse machine aux différences.

[36] J.M. Dubbey, *The Mathematical Work of Ch. Babbage*, Cambridge, 1978, ch. 5.

[37] A. de Morgan, *Trigonometry and Double Algebra*, London, 1849.

[38] G.F. Gregory : "On the real Nature of Symbolical Algebra", *Trans. of the Royal Society of Edinburgh*, 1840, vol. 14.

[39] M.J. Durand, "Genèse de l'Algèbre Symbolique en Angleterre: une influence possible de J. Locke", *Revue d'Histoire des Sciences*, 1990, XLIII/2-3, pp. 129-180.

nade, qu'il eut "l'illumination", ou en tout cas l'idée que "les relations logiques pouvaient s'exprimer sous forme algébrique"[40]. Cette idée est en tout cas l'aboutissement de sa recherche d'une théorie générale des symboles, commencée dans ses articles sur les équations différentielles. La forme de son projet évolue cependant, puisqu'en 1847, il donne une expression symbolique des propositions et des modes du syllogisme de la logique aristotélicienne, qui constitue donc son point de départ, alors qu'en 1854, il exprime directement les procédures ultimes de la pensée sous forme de symboles mathématiques. Tout se passe donc comme si G. Boole faisait l'économie du détour traditionnellement obligé par l'analyse du langage ordinaire. Le système de lois formelles qu'il exprime et celui des conceptions mentales qu'il représente apparaissent l'un comme le miroir de l'autre.

Bien que, tout comme les mathématiciens de Cambridge, G. Boole se réfère peu à J. Locke dont la philosophie est alors soupçonnée d'avoir servi de berceau à l'utilitarisme, l'*Essai Philosophique sur l'Entendement Humain* fait partie de la bibliographie des *Lois de la Pensée*, et je tenterai de souligner en quoi cette philosophie de J. Locke éclaire bien des présupposés de G. Boole, à commencer par cette situation de miroir entre les lois de la pensée et leur expression symbolique.

1- Son projet

G. Boole affirme d'emblée le statut de science auquel il veut faire accéder la logique, et se propose de l'établir à partir d'une démarche expérimentale, heuristique. En effet, s'il envisage de "*prouver que les opérations de l'esprit sont effectivement soumises à des lois, et qu'une science de l'esprit est par conséquent possible*", c'est en explicitant d'abord l'effectivité de cette science. Et le plan de son exposé respecte cette déclaration d'intention. Il ne s'agit donc pas, dit-il, d'une affirmation posée a priori. Pourtant, s'il fonde sa méthode sur l'observation, c'est-à-dire sur l'expérience, il refuse l'induction, et se démarque ainsi radicalement de l'empirisme d'un J.S. Mill (1806-1873) en spécifiant le rôle de cette observation dans son propre projet[41]: il lui donne, pour établir cette science de l'esprit, un statut complètement différent de celui qu'elle occupe dans les sciences de la nature.

"*Les lois de la nature ne sont pas, la plupart du temps, des objets immédiats de perception. Elles sont soit des conséquences induites d'un vaste ensemble de faits dont elles expriment la vérité commune, soit, à leur origine tout au moins, des hypothèses physiques de nature causale, expliquant les phénomènes avec une précision constante et nous permettant de prédire de nouvelles combinaisons de ces phénomènes. Dans tous les cas elles sont, au sens le plus strict du mot, des conclusions* ***probables*** *qui, de fait, s'approchent toujours plus près de la certitude à mesure qu'elles reçoivent toujours davantage de confirmation de l'expérience. Mais elles ne perdent jamais totalement leur caractère de probabilité, à prendre ce mot en toute rigueur. En revanche, la connaissance des lois de l'esprit n'a pas besoin de se fonder sur un vaste ensemble d'observations. La vérité générale y est aperçue dans l'exemple particulier, et ce n'est pas la répétition des exemples qui la confirme. ... les vérités générales de la logique sont d'une nature telle qu'elles commandent l'adhésion dès qu'elles se présentent à l'esprit, (et n'ont donc pas ce caractère de probabilité).*"[42]

En 1847, dans *Mathematical Analysis of Logic*, G. Boole utilisait le symbolisme mathématique pour présenter la logique aristotélicienne. Son point de vue est radicalement différent en 1854: ce sont les lois de la pensée dont il donne une expression mathématique. La généralisation de la logique aristotélicienne - et sa simplification, puisque ces deux termes vont de pair dans la réflexion des mathématiciens de cette époque, dont G.

[40] S.B. Diagne, op. cit., 1989, p. 51.
[41] I. Grattan-Guinness : "Psychology in the foundations of logic and mathematics : the cases of Boole, Cantor and Brouwer", *Psicoanalisi e Storia delle Science*, Firenze, 1983, pp. 93-121.
[42] G. Boole, op. cit., 1854, [p. 4], trad. S.B. Diagne, op. cit., 1992, p. 23.

Peacock - en découle. G. Boole pose la question de savoir ce qui rend le langage si docile à l'abstraction, la plus importante de nos facultés intellectuelles, tout en affirmant vouloir écarter de sa réflexion tout questionnement philosophique, afin de la circonscrire à une recherche des lois qui organisent les signes logiques. C'est ce qu'il réalisera en identifiant les lois des signes et les lois des conceptions mentales comme formant un seul et même système, vu tantôt de l'extérieur, tantôt de l'intérieur. Conformément à son plan de travail, c'est ce qu'il montrera après avoir exposé le calcul symbolique auquel sont soumises les lois formelles qui constituent la science de l'esprit.

2 - Les lois des signes

La problématique de G. Peacock n'est pas loin, qui présentait l'Algèbre Symbolique comme le langage du raisonnement, lorsque G. Boole définit tout langage comme un système de combinaisons de signes arbitraires, ces combinaisons étant organisées selon certaines règles, qui correspondent aux opérations de l'esprit. Ce sont ces règles que le calcul symbolique explicite. G. Boole pose donc en préalable l'arbitraire du signe comme caractère constitutif de tout langage.

"*Définition : un signe est une marque arbitraire, dont l'interprétation est fixée et qui est susceptible d'être combiné à d'autres signes conformément à des lois déterminées dépendant de leurs interprétations respectives.*"[43]

Conséquence de cet arbitraire du signe : rien ne s'oppose à ce que ces signes soient remplacés, dans la recherche d'une écriture symbolique des éléments de la logique, par de simples lettres. G. Boole va alors s'appliquer à expliciter, grâce à l'usage de ces lettres, les principes premiers du langage logique, qu'il considère comme un langage scientifique "avant de le justifier en un commentaire fondé sur des exemples issus du langage ordinaire"[44]. Ce travail s'appuie sur une classification des signes, qui opère une reconstruction symbolique du langage, et dont l'écriture ainsi formalisée est conforme à certaines propriétés des opérations algébriques.

"*Proposition I :*
Toutes les opérations du langage, en tant qu'instrument du raisonnement, se peuvent conduire dans un système de signes composé des éléments suivants :
1. Des symboles littéraux tels que x, y, etc., représentant les choses en tant qu'objets de nos conceptions.
2. Des signes d'opérations tels que +, - , × , qui traduisent les opérations de l'esprit par lesquelles les conceptions des choses sont combinées ou séparées de manière à former de nouvelles conceptions comprenant les mêmes éléments.
3. Le signe d'identité ≡
Et ces symboles logiques voient leur usage soumis à des lois déterminées, qui en partie s'accordent et en partie ne s'accordent pas avec les lois des symboles correspondants dans la science de l'algèbre."[45]

C'est donc dans la continuité des travaux de l'Ecole Algébrique Anglaise que G. Boole s'appuie sur une désinterprétation et une déquantification du symbolisme algébrique. Il dissocie interprétation et sens : l'interprétation concerne les signes, et leur utilisation dans un discours donné, autrement dit, le domaine des applications. Elle doit donc être fixée au sein d'un discours donné, tandis que le sens concerne les opérations proprement dites, c'est-à-dire la place et la fonction des conceptions et des opérations mentales qui travaillent sur les signes.

[43] *Ibid.*, [p. 25], p. 43.
[44] S.B. Diagne, op. cit., 1989, p. 113.
[45] G. Boole, op. cit., [p. 27], S.B. Diagne, 1992, op. cit.,p. 45.

a) Que représentent x, y, etc.?

Ce sont des signes appellatifs ou descriptifs qui comportent aussi bien les substantifs que les adjectifs, dès lors qu'on accepte de transformer, par exemple, un adjectif tel que "fluide" en la classe des "choses fluides" ou des "êtres fluides"[46]. A l'accumulation des qualificatifs, G. Boole fait correspondre la juxtaposition des signes.

"*Si x seulement remplace "choses blanches" et y "moutons", posons que xy représente "moutons blancs"; de même, si z représente "choses à cornes" et que x et y conservent leur précédente signification, posons que xyz représente "les moutons blancs à cornes", autrement dit la collection de choses auxquelles le nom de "moutons" et les descriptifs "blanc" et "à cornes" peuvent s'appliquer ensemble.*"[47]

Et les exemples empruntés au langage naturel ne manquent pas pour justifier cette *première loi de la pensée* : $xy = yx$, selon laquelle l'ordre dans lequel les symboles littéraux se suivent est indifférent. Dans les quelques cas où le langage ordinaire résiste à cette commutativité, notamment dans le cas du substantif et de l'attribut, G. Boole fait appel à l'inversion poétique comme indice d'une plus grande proximité avec les lois de l'esprit, dont la prose se serait éloignée. L'analogie, qui est évidente ici entre le produit logique et la multiplication algébrique, sera constamment à l'oeuvre dans la constitution de cette logique symbolique, même si G. Boole se défend d'y avoir recours :

"*(Cette loi) sera mieux caractérisée si l'on souligne que les symboles littéraux x, y, z sont* ***commutatifs comme les symboles algébriques****. En disant cela, on n'affirme pas que l'opération de multiplication en algèbre, dont la loi fondamentale est exprimée par l'équation xy = yx, présente en elle-même une analogie avec l'opération logique, représentée ... par xy; mais seulement que si les opérations arithmétique et logique sont exprimées de la même manière, leurs expressions symboliques seront sujettes à la même loi formelle.*"[48]

Dans le cas particulier où x et y représentent la même classe d'objets, l'écriture algébrique de ce produit logique donne xx, dont le résultat est encore x, et conduit à la loi fondamentale de ce système, que G. Boole appelle *loi des indices* : $x^2 = x$. Elle constitue la première rupture avec les lois de l'algèbre ordinaire.

b) Que représentent les signes +, -, ., etc.?

Ils traduisent les "opérations mentales par lesquelles nous réunissons des parties en un tout, ou séparons un tout en ses parties"[49]. Le signe "+" correspond à l'usage courant du "et" et du "ou" , en un sens qui reste à préciser, tandis que "-" correspond au terme sauf ou excepté. Par exemple, si x représente "les hommes", et y "les femmes", $x + y$ représente "les hommes et les femmes". Et si z représente "les Anglais", $x - z$ représente "les hommes sauf les Anglais". On peut constater sur cet exemple ce qui est une caractéristique essentielle de ce langage logique, et que G. Boole explicite immédiatement :

"*A parler strictement, "et" , "ou", placés entre des termes décrivant deux ou plusieurs classes d'objets, supposent que ces classes sont tout à fait distinctes, de sorte qu'aucun élément de l'une ne soit contenu dans l'autre.*"[50]

---

[46]S.B. Diagne souligne que cette précaution de G. Boole rejoint "ce postulat de la Nouvelle Analytique", selon lequel l'analyse du langage visant à constituer la logique se doit toujours "d'énoncer explicitement ce qui demeure implicite dans la pensée". La fonction attributive de l'épithète s'y trouve abandonnée au profit de sa fonction sélective. Cf. S.B. Diagne, 1989, op. cit., p. 113.
[47]G. Boole, op. cit., [p. 28-29], S.B. Diagne, 1992, op. cit.,p. 46.
[48]*Ibid.*, [p. 33], p. 48-49.
[49]*Ibid.*, [p. 32], p. 50
[50]*Ibid.*, [p. 32-33], p. 50.

G. Boole affirme qu'il fonde cette caractéristique sur le langage ordinaire, où nous connaissons pourtant l'usage du "ou" inclusif. Il fait ici le choix d'une signification exclusive qui correspond, en théorie des ensembles, au seul cas des ensembles disjoints. Parmi ses successeurs, John Venn (1834-1923) le suivra en ce sens, alors que W.S. Jevons (1835-1882), sur les traces de R. Whately (1787-1863) et de J.S. Mill (1806-1873), construira son système logique sur la signification inclusive du "ou"[51]. Du point de vue opératoire, l'intérêt de cette signification exclusive du "ou" réside dans le fait que la dualité entre les opérations + et -, manifeste en algèbre, se trouve ainsi reconduite en logique. De $x = y + z$ (par exemple, "les étoiles sont les soleils et les planètes"), il s'ensuit que $z = x - y$ ("les soleils sont les étoiles à l'exception des planètes").

L'identité des équations obtenues en algèbre et en logique vaut encore avec le signe "+", mais G. Boole évite encore de parler d'analogie :

"*Soit x représentant "hommes", y "femmes", et soit + la traduction de "et" et "ou"; nous avons alors x + y = y + x, équation qui serait également vraie si x et y représentaient des nombres, et si + était le signe de l'addition arithmétique.*"[52]

Et G. Boole de poursuivre l'identification formelle - pour laquelle il ne répugne pas systématiquement à parler d'analogie - entre logique et algèbre avec les lois suivantes:

$$\begin{aligned} x + y &= y + x \\ x - y &= -y + x \\ z(x + y) &= zx + zy \\ z(x - y) &= zx - zy \end{aligned}$$

Pour ces deux dernières équations, G. Boole écrit :

"*Soit z le symbole représentant l'adjectif "européen"; alors ... il revient en fait au même de dire "les européens hommes et femmes" et "les hommes européens et les femmes européennes". ...*

"*Si x représente hommes et y Asiatiques, c'est-à-dire hommes asiatiques, alors la conception "tous les hommes sauf les Asiatiques" sera exprimée par x - y. ... Posons que z représente l'adjectif "blanc". Appliquer l'adjectif "blanc" à l'ensemble des hommes exprimé par "les hommes sauf les Asiatiques", revient à dire "les hommes blancs sauf les Asiatiques blancs".*[53]

c) Que représente le signe = ?

Ce signe d'identité constitue, quant à lui, le seul signe de la troisième classe, qui est celle des signes qui expriment la relation, et au moyen desquels nous formons les propositions. Comme Aristote, G. Boole ramène ainsi tous les verbes du langage à la seule copule "est", mais il intègre de plus les travaux de la Nouvelle Analytique lorsqu'il la transforme en "est égal à"[54]. Ce faisant, il reconduit le glissement qu'elle opérait déjà vers une logique exclusivement extensionnelle[55].

---

[51]Le court échange épistolaire qu'entameront W.S. Jevons et G. Boole ne modifiera pas le point de vue de ce dernier à ce sujet. I. Grattan-Guinness, "The Correspondence between G. Boole and S. Jevons, 1863-64", *History and Philosophy of Logic*, 12 (1991), pp. 15-35.
[52]*Ibid.*, [p. 33], p. 50.
[53]*Ibid.*, [p. 33-34], p. 50-51.
[54]La forme équationnelle de la proposition est un acquis de la Nouvelle Analytique, qui découle de la quantification du prédicat. En 1827, G. Bentham, dans *Outlines of a System of Logic*, ouvrage que W. Hamilton connait pour en avoir fait le compte-rendu dans *The Edinburgh Review* - dixit son biographe dans *National Biography* - substitue aux quatre formes traditionnelles de la proposition dans la logique scolastique :
A : proposition affirmative universelle : tout plaisir est un bien : tout B est A

L'écriture équationnelle autorise donc G. Boole à mettre en pratique toutes les procédures algébriques. Il poursuit alors l'identification formelle entre calcul logique et calcul algébrique, d'un point de vue démonstratif. L'équivalence déjà soulignée entre $x = y + z$ et $x - z = y$ correspond ainsi à l'opération de transposition algébrique. De $x = y$, il peut, comme en algèbre, déduire que :

$x + z = y + z$
$x - z = y - z$
$zx = zy$, dont la réciproque est fausse, en logique comme en mathématiques.

G. Boole parvient à intégrer à cette classification certains éléments comme pronoms, adverbes, prépositions, mais il rejette de son langage logique les modalités du sentiment, dont il affirme qu'elles sont extérieures au champ propre de l'entendement, c'est-à-dire de la faculté de raisonnement.

3 - L'Algèbre de la Logique : une algèbre spéciale

Alors même que le travail de G. Boole s'appuie sur une déquantification des signes, qu'il utilise pour traduire les opérations sous-jacentes à l'usage commun du langage, il est contraint, pour conserver une cohérence fondamentale à leur analogie opératoire avec les signes de l'algèbre, de conférer à sa Logique le statut d'une Algèbre Spéciale, limitée aux seuls signes 0 et 1. En effet,

---

E : proposition négative universelle : nul plaisir n'est un bien : nul B n'est A
I : proposition affirmative particulière : quelque plaisir est un bien : quelque B est A
O : proposition négative particulière : quelque plaisir n'est pas un bien : quelque B n'est pas A
huit formes équationnelles, où = désigne l'identité, et // la non-identité. Le jeu combinatoire y est évident, mais une certaine ambiguïté y demeure cependant puisque la nÈgation porte toujours sur la copule :

1) X in toto = Y ex parte	2) X in toto // Y ex parte
3) X in toto = Y in toto	4) X in toto // Y in toto
5) X ex parte = Y ex parte	6) X ex parte // Y ex parte
7) X ex parte = Y in toto	8) X ex parte // Y in toto

Avant l'écriture algébrique proposée par G. Boole, les dernières ambiguïtés sont levées grâce à la notion d'univers du discours qu'introduit A. de Morgan en 1846, et qui permet de distinguer nettement entre les éléments d'une classe et ceux de sa classe complémentaire au sein d'un univers donné. Cf. A. de Morgan : "On the Structure of the Syllogism, & on the Application of the Theory of Probability to Questions of Argument & Authority"", *Trans. of the Camb. Phil. Soc.*, 1844-49, vol. VIII, pp. 379-408.

[55]La forme générale de la proposition "S est P", telle qu'elle se dit dans la logique aristotélicienne, ne saurait être analysée sans référence à cette réflexion sur ce qu'est "l'être" qui domine la philosophie grecque en général, et celle d'Aristote en particulier. Un prédicat n'y a pas d'existence propre : il présuppose des existants jouant le rôle de sujets, et dont il puisse être prédiqué. Ainsi introduit-il la notion de variable sans échapper pour autant à la liste des dix catégories de l'être, auxquelles Aristote tente de réduire l'ensemble des qualifications, et qui sont, rappelons-le, la substance, la quantité, la qualité, la relation, le lieu, le temps, la position, la possession, l'action et la passion. Il consiste donc nécessairement en une action ou un caractère appartenant au sujet. Dans ce contexte, une proposition telle que "tout homme est mortel" peut être interprétée :
- soit en extension : c'est l'interprétation que préfère les logiciens. Elle revient à dire que la classe des hommes est incluse dans celle des mortels;
- soit en compréhension : c'est l'interprétation que préfèrent les philosophes. Elle revient à dire que le concept d'homme contient, parmi ses déterminations, celui de mortel.

Si le point de vue opératoire suppose, exige même, que ces deux points de vue soient dissociés, et que seul le premier aspect soit pris en considération, ils ne sauraient être séparés dans la philosophie d'Aristote, où ils sont à la fois distincts et complémentaires, puisque le sujet logique, grammatical, est en même temps le sujet ontologique. La logique du Stagyrite est adaptée à sa philosophie : la réduction de toute proposition à une forme attributive s'accorde à sa philosophie de la substance. C'est pourquoi l'axiomatisation ne peut y être présente qu'en puissance.

A titre de conséquence, d'un point de vue technique, les ambiguïtés de la théorie du syllogisme tiennent au fait que le prédicat, pour les raisons évoquées ci-dessus, échappe à la fois à la négation et à la quantification. C'est sur ce prédicat que va porter le renouvellement de la logique, avant que G. Boole n'entre en scène. Cf. R. Blanché, *La logique et son histoire d'Aristote à Russell*, Paris, A. Colin, 1970.

"Nous avons vu que les symboles logiques sont soumis à la loi spéciale $x^2 = x$. Or, parmi les symboles du Nombre, il n'en est que deux, 0 et 1, qui soient soumis à la même loi formelle. Nous savons que $0^2 = 0$ et que $1^2 = 1$; et l'équation $x^2 = x$, lorsqu'on la considère comme algébrique, n'admet que les racines 0 et 1. Par conséquent, au lieu de déterminer jusqu'à quel point les symboles logiques s'accordent formellement avec ceux du Nombre en général, il nous est plus immédiatement suggéré de les comparer aux symboles quantitatifs n'admettant pour valeurs que 0 et 1. Concevons alors une algèbre où les symboles x, y, z, ... admettent indifféremment les valeurs 0 et 1, et ces valeurs seules. Les lois, axiomes et procédures d'une telle algèbre seront identiques, en tout point, aux lois, axiomes et procédures d'une Algèbre de la Logique. Elles ne se distingueront que par une différence d'interprétation."[56]

L'effectivité de ces lois formelles étant ainsi dégagée, G. Boole, avant d'en déployer toutes les possibilités, et de montrer notamment en quoi la logique aristotélicienne, celle des propositions primaires comme celle des propositions secondaires, en est un cas particulier, établit, comme il s'y était engagé dans l'introduction, en quoi ce calcul est bien l'expression des opérations d'une science de l'esprit. C'est dire aussi qu'il tente d'échapper à ce recours au langage ordinaire qu'il vient d'utiliser, je serais tentée de dire comme "science de suggestion".

4 - La logique comme science de l'esprit

Ces lois formelles ne concernent pas la nature de l'esprit, mais seulement les phénomènes que constituent les opérations dont il est le siège, et dont G. Boole retient essentiellement l'enchaînement des idées conçu comme une loi de succession. Il n'échappe pourtant pas à un recours au langage, qui se situe au niveau de l'interprétation, puisqu'il caractérise la dénomination des choses - objets ou idées - comme une opération qu'il appelle la conception mentale de sélection, et qu'il rapporte aux facultés traditionnelles telles que l'imagination et l'attention. Ainsi peut-il réaffirmer que son enquête sur les lois de l'entendement est totalement indépendante des différentes spéculations métaphysiques sur la nature de nos facultés mentales.

"Le rôle d'un nom ou d'un terme descriptif quelconque, employé dans des limites données, est de susciter dans l'esprit la conception, non pas de tous les êtres ou objets auxquels ce nom ou cette description est applicable, mais seulement de ceux qui existent dans l'univers du discours donné. Si cet univers du discours se trouve être l'univers effectif des choses - ce qui est toujours le cas lorsqu'on prend les mots dans leur sens réel ou littéral - alors par "hommes" nous entendons ***tous les hommes qui existent****; mais si l'univers du discours est limité au préalable par un accord tacite, alors c'est des hommes dans les limites ainsi introduites que nous parlons. Dans les deux cas, le mot "hommes" a pour fonction de conduire une certaine opération de l'esprit par laquelle, à partir de l'univers du discours approprié, nous sélectionnons les individus signifiés ou nous nous fixons sur eux. ..."*

" Je décrirai chacune de ces étapes, ou toute combinaison déterminée de ces étapes, comme ***un acte défini de conception****. Et j'étendrai l'usage de ce terme de manière à inclure dans sa signification, non seulement la conception des classes d'objets représentées par des noms particuliers ou des attributions simples de qualité, mais aussi les combinaisons de ces conceptions de toutes les manières qui sont en accord avec les facultés et les limitations de l'esprit humain; en fait, toute opération intellectuelle, à l'exception de celle qui entre dans la structure à un énoncé ou proposition."*[57]

Désignant l'univers du discours[58] par le symbole 1, G. Boole distingue ici entre x, symbole électif, qui représente l'opération mentale consistant à sélectionner dans cet

---

[56]G. Boole, op. cit., [p. 37-38], S.B. Diagne, 1992, op. cit.,p. 54-55.
[57]*Ibid.*, [p. 42-43], p. 59-60.
[58]G. Boole utilise ici explicitement les avancées de A. de Morgan sur l'univers du discours.

univers la classe X des éléments qui lui correspondent. Mais il omettra souvent dans la suite de maintenir cette distinction entre X et x. Partant de cette affirmation selon laquelle "nommer, c'est sélectionner une classe d'objets dans un certain univers du discours", G. Boole, dans son chapitre 3 intitulé : "*Dérivations des lois des symboles logiques à partir des lois des opérations de l'esprit humain*", peut reconstruire tout son calcul symbolique sans plus avoir recours au langage, mais en s'appuyant directement sur les opérations mentales correspondantes. La loi de dualité en est un exemple. Par quelques transformations algébriques élémentaires, $x^2 = x$ devient en effet $x(1- x) = 0$ où 0 représente la conception du Rien, 1 la conception du Tout, de l'Univers, et $1- x$ le complémentaire d'une classe d'objets par rapport à cet univers[59]. Cette loi de dualité, connue comme principe du tiers exclu, ou principe de contradiction, est ici, selon G. Boole, dépourvue de toute connotation métaphysique puisqu'elle est déduite de conceptions logiques : c'est seulement une interprétation d'une loi de la pensée[60]. Outre le respect de son projet initial qui consistait à construire son exposé sur le modèle d'une science issue de l'observation, G. Boole peut ainsi traduire ses lois des signes dans le langage des facultés de l'esprit, celui des philosophes-logiciens, tout en échappant, comme il ne cesse de le répéter, à leurs préoccupations métaphysiques.

5 - Raisonnement symbolique et interprétation

Muni de ce calcul symbolique, qu'il a construit à partir de son analogie ou de son équivalence formelle avec l'algèbre, G. Boole peut déployer un certain nombre de conclusions logiques qu'il déduit de manipulations algébriques sur des égalités littérales. Avant de s'engager sur cette voie, il prend la précaution de justifier la possibilité d'une telle mécanisation, d'un tel automatisme des différentes étapes du raisonnement, la grande question étant de savoir si l'interprétation initiale doit pouvoir être suivie pas à pas, ou si on peut se contenter de ne justifier de sa présence qu'au moment de l'hypothèse et de la conclusion. Il est clair que G. Boole choisit la seconde éventualité.

"*C'est du moins un fait indiscutable que la validité d'une conclusion obtenue par une procédure symbolique quelconque de raisonnement ne dépend pas de notre capacité à interpréter les résultats formels qui se sont présentés aux différentes étapes de la démarche. De fait, il existe certains principes généraux concernant l'usage des méthodes symboliques. ... Les conditions d'un raisonnement valide, mené au moyen de symboles, sont les suivantes :*
1°) qu'une interprétation fixée soit assignée aux symboles employés pour exprimer les données; et que les lois de combinaison de ces symboles soient correctement déterminées à partir de cette interprétation.
2°) que les procédures formelles de résolution ou de démonstration soient constamment menées en conformité avec les lois ainsi déterminées, sans tenir compte de la question de l'interprétabilité des résultats partiels obtenus.
3°) que le résultat final soit formellement interprétable et qu'il soit effectivement interprété conformément au système d'interprétation employé dans l'expression des données."[61]

G. Boole déplace ainsi dans le domaine de la logique un débat commencé au dix-huitième siècle relativement au calcul algébrique, où l'utilisation des quantités impossibles obligeait les mathématiciens à renoncer à recourir au réel à tout moment[62]. Qu'un tel recours puisse avoir lieu, mais que les quantités impossibles soient absentes au début et à la

---

[59] Comme le souligne à juste titre I. Grattan-Guinness, op. cit., 1983, p. 101, le monisme de G. Boole réapparaît à la fin de l'ouvrage, lorsqu'il retrace l'interprétation de cet univers en termes de pensée religieuse ou métaphysique, depuis la notion d'Etre des philosophes grecs. G. Boole, 1854, op. cit., [p. 411-416], S.B. Diagne, 1992 op. cit., p. 394-403.

[60] *Ibid.*, [p. 48-49], p. 64-66.

[61] *Ibid.*, [p. 67-68], p. 81-82.

[62] G. Boole s'appuie d'ailleurs également sur une argumentation issue de cette question. Ibid., [p. 69], p. 82.

fin des calculs, tels furent les premiers arguments avancés pour l'autoriser, arguments le plus souvent essentiellement fondés sur un critère d'utilité. G. Boole s'inscrit dans ce débat, et reprend quasiment mot pour mot la structure de l'argumentation donnée par A.Q. Buée en 1805-06 et par Ch. Babbage en 1821-27 concernant la place de l'interprétation aux différentes étapes du raisonnement[63]. Dans les trois cas, il est clair que le sens du raisonnement est indépendant de son interprétation. Mais dans la mesure où G. Boole parle non pas de mathématiques, mais de la logique qui est traditionnellement plus proche du langage ordinaire, son travail pose sans doute avec plus d'acuité le problème de la signification du langage. Il n'empêche que les deux ordres de préoccupations sont pour lui extrêmement liés. En 1859, dans son *Traité des Equations Différentielles*, il écrit :

"*Le terme "symbolique" s'applique plus spécialement, par une restriction de son sens qui est plus étendu, à ces méthodes employées en analyse où les opérations, séparées par une abstraction mentale des objets auxquels elles s'appliquent, sont exprimées sous la forme de symboles dont les lois de combinaison représentent les lois auxquelles sont soumises les opérations elles-mêmes*"[64]

Pour G. Boole comme pour G. Peacock, le sens d'un raisonnement se situe radicalement hors de toute interprétation du langage utilisé; il est soutenu par les opérations d'un calcul symbolique[65].

IV - LE PROJET DE G. BOOLE ET LA PHILOSOPHIE DE J. LOCKE

Les intentions philosophiques de G. Boole, et les bases mathématiques de son calcul logique étant ainsi mises en place, il est possible d'évaluer, avant d'en explorer les possibilités, l'influence qu' a eue la philosophie de J. Locke sur semblable développement. Comme je l'ai affirmé dans l'introduction, cette influence y est repérable tant dans son vocabulaire que dans sa conception de la démonstration, qui découle directement de la structure des relations qu'il présuppose entre les idées et le langage.

Telle que la conçoit G. Boole, la logique n'est autre que cette Sémiotique, cette science ou connaissance des signes que J. Locke, dans la dernière partie de l'*Entendement*, distingue de la Physique comme science de la nature, et de la Morale comme science des actions humaines, pour en confier, semble-t-il, le développement à ses successeurs. L'accès à cette Logique exige une démarche fondée sur l'expérience, démarche que J. Locke, fondateur de l'empirisme, pose comme primordiale. Contrairement aux sciences de la nature, qui ne peuvent qu'approcher la vérité d'un monde qui demeure extérieur à la raison humaine, la Logique pour J. Locke - comme la Morale - est susceptible d'universalité: elle livre des vérités qui sont universelles parce que les objets dont elle traite, et qui sont les idées comme signes intérieurs, et les mots comme signes extérieurs de nos conceptions mentales, résultent des opérations de l'esprit[66]. La logique traite de signes, qui résultent de la perception, et qui constituent par conséquent des archétypes, des idées abstraites qui sont seulement dans l'esprit, les seules pour lesquelles essence

---

[63] "*On sait en effet que pour résoudre algébriquement un problème, il faut d'abord traduire la question en langage algébrique; ensuite traduire les formules du langage algébrique en d'autres formules du même langage; enfin traduire celles-ci dans les opérations qu'elles signifient*" A.Q. Buée, op. cit., p. 26.
"*La première étape consiste à traduire la question proposée dans le langage de l'analyse. La seconde comprend le système des opérations qui doivent être effectuées, afin de résoudre cette question analytique en laquelle la première étape a transformé la question proposée. La troisième et dernière étape consiste à retraduire les résultats du processus analytique dans le langage ordinaire.*" Ch. Babbage, "On the Influence of Signs in Mathematical Reasoning", *Trans. of the Camb. Phil. Soc.*, 1821, vol. II, 1827, p. 325-377.

[64] G. Boole, *A Treatise on Differential Equations*, 2de ed., 1864, p. 381. Extrait cité et traduit par S.B. Diagne, *G. Boole, l'oiseau de nuit en plein jour*, Paris, Belin, 1989, p. 92.

[65] I. Grattan Guinness (op. cit., p. 99), insiste à juste titre sur le fait que que G. Boole ne conçoit ni la logique comme application des mathématiques, ni les mathématiques comme application de la logique, mais l'une et l'autre comme deux cas particuliers (je dirais deux interprétations) d'un calcul symbolique universel.

[66] J. Locke, *Essai philosophique sur l'entendement humain*, trad. frçse P. Coste, Paris, 1755, IV.5.2-3.

réelle et essence nominale sont confondues[67]. J. Locke, tout comme G. Boole, exclut de sa démarche toute préoccupation métaphysique puisqu'il ne tente pas de répondre à la question de savoir comment la perception des objets du monde produit des idées simples dans l'esprit[68]. Seule l'intéresse l'élaboration des idées complexes, des idées abstraites, et des idées générales, à partir des idées simples, selon des processus qui font largement intervenir l'idée de combinaison[69]. En ce sens, la connaissance démonstrative est là pour suppléer à l'absence d'une connaissance intuitive. La démonstration sert dans ce cas à dévoiler la connexion entre deux vérités éloignées, parce qu'elle met en place, de l'une à l'autre, une suite de vérités intermédiaires et surtout équivalentes, pour lesquelles la connaissance intuitive peut être immédiatement perçue par l'esprit[70].

Ainsi s'éclaire ce présupposé fondamental de G. Boole d'un calcul symbolique qui soit comme un pur reflet de nos conceptions mentales. Comme chez J. Locke, qui innovait en ce sens, la formation des idées est un préalable nécessaire à l'invention des mots. Les mots y sont envisagés comme signes artificiels, et les idées comme signes naturels, des mêmes conceptions mentales[71]. Et si arbitraire du signe il y a, il ne dépasse pas l'idée qu'il n'existe aucun lien de nécessité *a priori* entre le mot et l'idée. Chez J. Locke comme chez G. Boole demeure cependant le présupposé qu'il existe des facultés innées de l'esprit sur lesquelles repose cette correspondance en miroir entre signes extérieurs et signes intérieurs de nos idées. Seul le fonctionnement du raisonnement est dans les deux cas le même.

Il ne saurait être question de tirer cette démarche de G. Boole du côté d'un quelconque scepticisme. Il ne faut jamais perdre de vue le fait qu'en Angleterre à cette époque, pour G. Boole comme pour bon nombre des érudits et savants anglais, éduqués dans le cadre de la religion naturelle de W. Paley, science et religion ne s'opposent pas, mais collaborent à la connaissance d'un monde qui, en tout état de cause, reste créé par Dieu. Ainsi G. Boole, dans ses conclusions sur les *Lois de la Pensée*, légitime-t-il l'analogie en identifiant la possibilité d'un raisonnement inductif à l'existence d'un principe d'ordre, et à la faculté humaine de le reconnaître.

"*Comment, à partir des faits particuliers que présente l'expérience, arrivons-nous aux propositions générales de la science? Quelle est la nature de ces propositions? Sont-elles seulement la synthèse des expériences ou bien l'esprit fournit-il un principe de liaison qui lui est propre? En un mot, quelle est la nature de la vérité scientifique, et sur quoi repose l'assurance avec laquelle elle exige d'être reçue? ... Lorsque d'un vaste recueil d'observations de la planète Mars, Képler inféra la forme elliptique de son orbite, cette conclusion allait au-delà des prémisses ou, en vérité, de toute prémisse que la simple observation put fournir. Quel autre élément est donc nécessaire pour donner ne fut-ce qu'une validité hypothétique à des généralisations de ce genre? C'est la capacité, inhérente à notre nature, à reconnaître un Ordre, jointe à la supposition, de quelque manière qu'on la fonde, que les phénomènes de la nature sont reliés par un principe d'Ordre. Sans ces éléments, l'on n'aurait jamais pu établir les vérités générales des sciences de la Nature. Quand bien même la démarche ainsi établie ne mènerait qu'à des résultats probables ou approximatifs, il s'ensuit seulement que les nombreuses généralisations opérées dans les sciences de la Nature ne comportent qu'une vérité probable ou approximative. La sécurité dans la possession du savoir tient à ce que dans tous les cas où ces conclusions représentent véritablement la constitution naturelle, notre assurance qu'elles sont vraies reçoit indéfiniment confirmation et ne se distingue plus bientôt de la certitude. L'existence de ce principe que nous venons de présenter constituant le fondement du raisonnement inductif, nous permet de résoudre la question si controversée de la nécessité, dans le raisonnement, de propositions générales.*

[67] *Ibid.*, III.5.6, III.6.3.
[68] *Ibid.*, II.2.2.
[69] *Ibid.*, II.7.10.
[70] *Ibid.*, IV.1.7-9.
[71] *Ibid.*, III.1.2.

Le logicien affirme l'impossibilité d'inférer une conclusion à partir de prémisses particulières. Certains auteurs modernes de grande réputation ont soutenu que tout raisonnement procède de vérités particulières en vérités particulières. Ils affirment, en guise d'exemple, que pour conclure de la possession d'une propriété donnée par certains éléments d'une classe à la possession de cette propriété par un autre élément, il n'est pas nécessaire de poser la conclusion intermédiaire ***générale*** *affirmant que* ***tous*** *les éléments de la classe possèdent cette commune propriété.*

Or, quoi qu'il en soit, le principe d'ordre ou d'analogie d'après lequel on conduit le raisonnement, doit nécessairement être énoncé ou compris comme une vérité générale pour valider la conclusion finale. Sous cette forme du moins, la nécessité de propositions générales comme fondement de l'inférence se trouve confirmée - une nécessité dont je pense qu'elle découle de l'existence même, et plus encore, de la nature particulière des facultés dont les lois ont été examinées dans cet ouvrage."[72]

C'est de ce point de vue que G. Boole prend explicitement parti dans le débat auquel je me suis référée dans l'introduction, quant au fait de savoir si la connaissance était ontologiquement fondée sur la logique ou sur les mathématiques. Les conceptions qu'il présente dans les *Lois de la Pensée* lui permettent de conclure qu'il s'agit là d'un faux débat. Autrement dit, son travail constitue une synthèse essentielle entre des positions alors radicalement divergentes, et qu'il renvoie dos à dos en rappelant que, de manière beaucoup plus fondamentale, le savoir n'est pas chose profane et doit être fondé sur la Morale.

"*Peut-être la conséquence, manifestement la plus légitime à tirer de ces réflexions, concernerait-elle la question de la place des mathématiques dans le système des connaissances humaines ainsi que de la nature et du rôle des études mathématiques dans la formation intellectuelle. Tous ceux qui ont suivi l'évolution des débats les plus récents n'iront guère penser que ce n'est pas là une question très importante. Ceux qui ont soutenu que la place des mathématiques, sous ces deux rapports, était fondamentale, ont tiré l'un de leurs arguments les plus solides de l'état actuel des choses. La structure du monde matériel repose, dans tous ses aspects, sur des relations numériques. Toutes les actions dynamiques, chimiques, électriques, thermiques, semblent n'être pas seulement mesurables en elles-mêmes, mais aussi reliées les unes aux autres jusqu'à un point même où elles se convertissent les unes dans les autres, par des relations numériques d'une nature parfaitement déterminée. Mais cette position me semble reposer sur une base encore plus profonde. Les lois de la pensée dans toutes ses procédures de conception et de raisonnement, dans toutes les opérations dont le langage est l'expression ou l'instrument, sont de même nature que les lois des procédures mathématiques reconnues. On ne veut pas dire par là qu'il nous soit nécessaire de connaître ces lois pour penser correctement, ou, au sens courant de l'expression, bien raisonner .... On voudrait encore moins exalter la faculté de raisonnement au détriment des facultés d'observation, de réflexion ou de jugement. Simplement ..., nous pouvons présumer que les sciences mathématiques occupent, à cause de la constitution même de notre nature, une place fondamentale dans les connaissances humaines et qu'aucun système de culture de l'esprit ne saurait être achevé ou fondamental s'il en néglige totalement l'étude.*

Mais ce sont ces mêmes considérations qui révèlent avec la même évidence l'erreur de ceux qui considèrent l'étude des mathématiques comme une base suffisante de connaissances ou de formation. Si la structure du monde matériel est mathématique, elle n'est pas que cela. Si l'esprit, en tant que faculté de raisonnement formel, obéit, consciemment ou inconsciemment à des lois mathématiques, il n'en exige pas moins, pour ses autres facultés de sentir et d'agir, pour sa perception de la perfection esthétique et morale, pour ses profonds élans d'émotion et d'affection, de rester en rapport avec un tout autre ordre de choses. Bien plus, il existe une ampleur de vue intellectuelle, une puissance de sensibilité au vrai sous toutes ses formes et toutes ses manifestations, qui ne se mesure pas à la puissance et la subtilité de la faculté dialecticienne. Même la révélation

[72] G. Boole, 1854 op. cit., [p. 403-405], S.B. Diagne, 1992, op. cit., p. 386-387.

de l'univers matériel dans son étendue illimitée, dans son ordre omniprésent et dans ses lois immuables n'est pas nécessairement appréhendée, de la manière la plus pleine, par celui qui aura parcouru avec la plus minutieuse précision, les étapes de cette grande démonstration. ...

Cette erreur qui sévit effectivement parmi nous semble due, en grande partie, au caractère spécialisé et séparé de l'enseignement scientifique qu'elle a tendance, en retour, à renforcer. ... Il est cependant impossible de ne pas considérer ce mal particulier comme un élément d'un ensemble plus vaste, et de ne pas le rapporter à cette conception trop répandue du savoir comme purement profane, ainsi qu'à la prédominance indue, déjà évoquée, des motifs, légitimes dans leurs limites propres, qui reposent sur la seule considération des intérêts profanes de la science.

Il n'est pas difficile de voir qu'à la limite, si de tels motifs continuent d'opérer sans que des principes d'action plus élevés viennent les contrôler, sans que l'influence personnelle d'esprits supérieurs vienne les corriger, ils doivent tendre à rabaisser l'idéal de l'esprit dans la poursuite des objets de connaissance, et à vider de leur sens et de leur efficacité, les quelques restes qui subsistent encore d'une foi noble."[73]

Qui plus est, la philosophie de J. Locke étant soupçonnée, au début du 19ème siècle, d'avoir servi de berceau à l'utilitarisme, elle se trouve tantôt critiquée, tantôt quelque peu réinterprétée du côté d'un plus grand innéisme. C'est ce que fait A. Sedgwick en 1832, dans un célèbre sermon prononcé à Cambridge[74], et cinq fois réédité jusqu'en 1850. C'est également ce que fait G. Boole dans les citations qui précèdent, ainsi que lorsqu'il écrit en 1847 :

"Nous ne devons pas considérer la vérité comme la simple création de l'intellect humain. Les importants résultats de la science et les vérités primordiales de la religion et de l'éthique existent de manière tout à fait indépendante de nos facultés et de la perception que nous en avons. Nous ne sommes pas plus les auteurs des vérités d'une catégorie que nous ne le sommes de celles de l'autre. Il nous est donné de découvrir la vérité - nous sommes en mesure de la comprendre; mais son origine réside uniquement dans la volonté ou la nature du créateur; et c'est là le véritable lien qui unit science et religion. Il m'a semblé nécessaire d'établir ce principe clairement et pleinement, car la division de notre connaissance en divine et humaine a provoqué chez beaucoup le préjugé et la croyance qu'il existe une hostilité mutuelle entre les deux croyances qui est aussi dommageable qu'elle est irrationnelle."[75]

G. Boole reconduit en tous cas la subdivision lockéenne de la science : philosophie naturelle, logique et morale. Et les exemples qu'il utilise pour illustrer son calcul logique illustrent à l'envi le fait qu'il tente, en mathématisant la logique, d'en renforcer la rigueur pour la mettre au service de la morale, donc de la connaissance de Dieu[76], en témoignant de la généralité de ce principe d'ordre dans l'organisation du monde.

---

[73] *Ibid.*, [p. 422-24], p. 405-407.

[74] A. Sedgwick, *A Discourse on the Studies of the University*, Cambridge, 1834.

[75] Cité par S.B. Diagne, op. cit., 1989, p. 44.

[76] Faut-il rappeler que c'était là déjà pour J. Locke l'occupation première de toute connaissance : *"La principale de toutes nos pensées, et la véritable préoccupation de tout être doué d'entendement, c'est la connaissance et l'adoration de cet Etre Suprême (le Souverain Conducteur)"* 1755, II.7.6. Quant à la Morale, comme les mathématiques, elle relevait pour J. Locke du domaine des idées et du langage. C'est pourquoi il ne désespérait pas de lui voir acquérir autant de certitude que celles-ci : *"La connaissance des Vérités Morales est aussi capable d'une certitude réelle que celle des Vérités Mathématiques; car la certitude n'étant que la perception de la convenance ou de la disconvenance de nos idées, & la démonstration n'étant autre chose que la perception de cette convenance par l'intermédiaire d'autres idées moyennes, comme nos idées morales sont elles-mêmes des archétypes aussi bien que les idées mathématiques, & qu'ainsi ce sont des idées complettes, toute la convenance ou la disconvenance que nous découvrirons entr'elles produira une connaissance réelle, aussi bien que dans les Figures mathématiques."* 1755, IV.4.7.

V - LES POTENTIALITES DU CALCUL LOGIQUE DE G. BOOLE

La traduction symbolique de la logique aristotélicienne n'est donc plus, dans les *Lois de la Pensée*, la première des préoccupations de G. Boole, qui veut d'abord insister sur son extrême généralité. Afin que soit généralisable tout raisonnement déductif, G. Boole va caractériser formellement une classe d'objets dont certains possèdent ou non une ou plusieurs propriétés, par une forme générale, qu'il appelle fonction logique - par analogie avec la notion de fonction mathématique, et dont il cherche ce qu'il appelle la développée.

1- Définition d'une fonction logique et de ses constituants

Alors même que l'analyse algébrique a pour thème central le travail sur le développement des fonctions, c'est sous cette forme de développement associé à une fonction logique qu'il montre en quoi le calcul symbolique de la logique permet de couvrir toutes les possibilités de décomposer une classe d'objets en ses différents types de composants[77]. Ainsi toute fonction algébrique va-t-elle recevoir une interprétation logique.

"Définition. Toute expression algébrique contenant un symbole x est appelée une fonction de x et peut s'écrire sous la forme abrégée générale f(x). ...

"Définition. Une fonction f(x) où x est un symbole logique, ou un symbole de quantité n'admettant que les valeurs 0 *et* 1, *est dite développée lorsqu'elle est ramenée à la forme ax + b(1-x), a et b étant déterminés de telle sorte que le résultat soit équivalent à la fonction dont il est dérivé."*[78]

En 1854, les développements sont obtenus en donnant à x successivement les valeurs 0 et 1 et en identifiant les deux membres[79]. G. Boole montre que pour une fonction à un symbole logique x :

$$f(x) = f(1).x + f(0).(1 - x)$$

et que pour une fonction à deux symboles logiques x et y :

$$f(x,y) = f(1,1).xy + f(1,0).x(1-y) + f(0,1).(1 - x)y + f(0,0).(1-x).(1-y)$$

Ces fonctions logiques sont alors interprétées de telle sorte que leur interprétation rende précisément compte de la composition de $f(x)$ selon chacune de ses classes constituantes.

"Développer la fonction f et égaler à 0 tout constituant dont le coefficient ne s'annule pas. Les interprétations des résultats ainsi obtenus, prises dans leur ensemble, constitueront l'interprétation de l'équation proposée.

"Prenons comme exemple la définition que donne la Loi Juive des "bêtes pures" : "Les bêtes pures sont celles qui ont les [sabots] fendus et qui ruminent", et posons :
x = les bêtes pures;
y = les bêtes qui ont les [sabots] fendus
z = les bêtes qui ruminent.

"Alors la proposition en question sera représentée par l'équation x = yz, que nous mettrons sous la forme x - yz = 0

---

[77] C'est pourquoi on peut reconnaître non seulement à Frege, mais à Boole, le mérite d'avoir généralisé et mathématisé la logique en y introduisant le concept de fonction. Simplement, G. Boole travaille avec ce qui était encore massivement la définition d'une fonction, donnée par son développement analytique en série de Taylor.

[78] G. Boole, op. cit., [p. 71-72], S.B. Diagne, 1992, op. cit., p. 85.

[79] En 1847, G. Boole obtenait ce développement à partir du développement d'une fonction en série de Taylor, qu'il simplifiait en utilisant le fait que $x^2=x$.

et dont nous allons chercher la forme d'interprétation qui est celle donnée par la présente méthode. En développant complètement le premier membre, l'on a

$$0xyz + xy(1- z) + x(1 - y)z + x(1 - y)(1 - z) + (1 - x)yz + 0(1 - x)(1 - z) + 0(1 - x)(1 - y)z + 0(1 - x)(1 - y)(1 - z)=0$$

Les termes dont les coefficients ne s'annulent pas donnent les équations

$$xy(1-z)=0, \quad xz(1-y)=0, \quad x(1-y)(1-z)=0, \quad (1-x)yz=0$$

Ces équations affirment l'inexistence de certaines classes d'objets, à savoir :
1°) Celle des bêtes qui sont pures, ont les [sabots] fendus mais ne ruminent pas.
2°) Celles des bêtes qui sont pures, qui ruminent mais n'ont pas les [sabots] fendus.
3°) Celle des bêtes qui sont pures, qui ne ruminent pas et n'ont pas les [sabots] fendus.
4°) Celle des bêtes qui ont les [sabots] fendus, qui ruminent et qui ne sont pas pures"[80].

Ainsi l'expression mathématique des lois de la pensée confirme-t-elle complètement les affirmations bibliques, ainsi que toutes ses conséquences, puisque G. Boole reprend différentes formes d'expression à de multiples reprises dans cet ouvrage.

A l'issue de tels développements pour une fonction logique quelconque, et compte tenu de la loi de dualité, les calculs ne peuvent donner pour les constituants que quatre formes : 1, 0, 0/0 et 1/0, auxquelles G. Boole attribue l'interprétation logique suivante:

"Les constituants du développement d'une fonction quelconque des symboles logiques x, y, etc ... sont interprétables et représentent les diverses partitions mutuellement exclusives de l'univers du discours, formées par l'attribution et la non-attribution, de toutes les manières possibles, des qualités désignées par les symboles x, y, etc ...
1°) Le symbole 1, comme coefficient d'un terme dans un développement, indique que la totalité de la classe représentée par ce constituant doit être pris en compte.
2°) Le coefficient 0 indique que rien dans la classe n'est à prendre en compte.
3°) Le symbole 0/0 indique qu'une partie parfaitement indéfinie de la classe doit être prise en compte, c'est-à-dire qu'il en faut prendre en compte, parmi ses éléments, quelques uns, aucun ou la totalité.
4°) Tout autre symbole figurant comme coefficient, indique que le constituant auquel il est lié doit être égalé à 0 ...

Reprenons la définition des "bêtes pures" .... On demande une description des bêtes qui n'ont pas les [sabots] fendus.

De l'équation $x = yz$, on tire $y = x/z$, d'où $1 - y = (z - x)/z$
Par développement du second membre, il vient :

$$1 - y = 0xz +(-1)/0\ x(1 - z) + (1 - x)z + 0/0\ (1 - x)(1 - z)$$

Ici, conformément à la règle, le terme dont le coefficient est -1/0 doit être séparément égaléà 0; nous avons donc

$$1 - y = (1 - x)z + 0/0\ (1- x)(1 - z)\ , \quad x(1 - z) = 0;$$

par conséquent, la première équation a pour interprétation la proposition : les ***bêtes qui n'ont pas les [sabots] fendus comportent toutes les bêtes impures qui ruminent et un restant indéfini de bêtes impures qui ne ruminent pas (quelques-unes, aucune ou toutes).***

La seconde équation donne la proposition suivante : ***Il n'existe pas de bêtes pures qui ne ruminent pas.***"[81]

[80] G. Boole, op. cit., [p. 83-84], S.B. Diagne, 1992, op. cit., p. 96-97.
[81] *Ibid.*, [p. 81,92, 93-94], p. 93-94, 103-104, 105-106.

Le développement des fonctions en ses constituants logiques constitue donc la structure même qui donne au calcul symbolique toute sa généralité. Tout repose sur ce qu'il vient de démontrer, et d'illustrer (c'est-à-dire de vérifier) par de nombreux exemples : si la fonction logique est écrite sous la forme V=0, tout constituant de son développement, dont le coefficient n'est pas nul, doit s'annuler, et les différentes interprétations obtenues pour chaque constituant donne, lorsqu'on les considère dans leur ensemble, l'interprétation de l'équation proposée. Il faut souligner là encore que les très nombreux exemples qu'il donne sont d'ordre moral. En voici quelques-uns pour mémoire :
- les hommes non-mortels n'existent pas;
- les êtres responsables sont tous les êtres rationnels qui soit sont libres d'agir, soit ont sacrifié volontairement leur liberté;
- la richesse consiste en des choses susceptibles d'échange, limitées en quantité, et qui produisent le plaisir ou préviennent la douleur.

2 - La réduction des propositions secondaires aux propositions primaires

Cette écriture équationnelle des propositions logiques semble exclure les propositions telles que "si le soleil connaît une éclipse totale, alors les étoiles seront visibles" ou encore "ou le soleil brillera ou la promenade sera remise", que G. Boole désigne comme propositions secondaires[82]. L'écriture équationnelle, telle qu'il vient de la présenter, s'applique aux propositions primaires, exprimant une relation entre des choses ou entre des faits. Le calcul booléen des propositions primaires correspond à ce que nous appelons un calcul des classes, alors que le calcul des propositions secondaires correspond au calcul moderne des propositions. Dans le système booléen, ils forment cependant un seul et même calcul, ce que G. Boole va établir en faisant intervenir la notion de temps. Ce qui lui permet d'affirmer que ces deux calculs entretiennent, sur le plan formel, une analogie si étroite et si remarquable, qu'ils constituent un calcul unique sur le plan opératoire, et que l'interprétation suffit à distinguer entre calcul des classes et calcul des propositions.

Si X est une proposition élémentaire, x va représenter le temps correspondant pendant lequel X est vraie. De plus, 1 représente la totalité du temps, et 0 le néant du temps. On aura ainsi les correspondances suivantes :

$x = 1$	X est toujours vraie
$x = 0$ ou $1- x = 1$	X n'est jamais vraie ou X est toujours fausse
$x(1- y) + y(1 - x) = 1$	ou X est vraie ou Y est fausse.

G. Boole développe cette identification entre les deux calculs - calcul des classes et calcul des propositions - immédiatement après avoir exposé sa théorie des fonctions logiques, et bien avant de montrer comment elle s'applique à la logique scolastique[83]. Et surtout, il en donne une remarquable illustration en se livrant à l'analyse des arguments métaphysiques de S. Clarke[84], qu'il soutient de fait contre ceux de B. Spinoza (1632-1677). S. Clarke démontrait l'existence de Dieu, en arguant de l'existence d'un être intelligent, existant pour soi, et qu'il inférait de l'existence phénoménale du mouvement dans l'univers. G. Boole retrouve les mêmes conclusions à partir d'un calcul symbolique issu de l'expression mathématique des propositions suivantes :
1. Si le mouvement a commencé dans le temps, la cause première est un être intelligent.
2. Si le mouvement a existé de toute éternité, ou il a été produit de toute éternité par un être intelligent et éternel, ou il existe par soi, ou il doit avoir existé par une communication et une transmission à l'infini.

[82] Aristote distinguait pour sa part entre propositions catégoriques et propositions hypothétiques.
[83] G. Boole, 1854, op. cit., p. 159-184, S.B. Diagne, 1992, op. cit., p. 217-253.
[84] S. Clarke (1675-1729), savant et théologien anglais proche de l'arianisme et de l'unitarisme, et fervent apologiste de la physique newtonienne.

3. Si le mouvement a été produit de toute éternité par un être intelligent et éternel, la cause première est un être intelligent.
4. Si le mouvement existe par soi, la matière est à la fois en repos et non en repos.
5. Que le mouvement ait existé par une communication et une transmission à l'infini et qu'en même temps, il n'existe pas par soi et n'ait pas été produit de toute éternité par un être intelligent et éternel, cela est faux[85].

3 - Le cas particulier de la logique classique

En 1847, G. Boole donnait immédiatement l'expression symbolique des quatre propositions du carré logique (A, E, I, O) de la logique scolastique[86]. En 1855, il traduit plutôt les huit formes propositionnelles qu'avait explicitée la Nouvelle Analytique, en faisant intervenir un nouvel opérateur de sélection noté v, qui correspond au choix de quelques éléments d'une classe.

$y = vx$	tous les Y sont des X, ou quelques X
$y = v(1- x)$	aucun des Y n'est X
	ou tous les Y sont quelques non X
$vy = vx$	quelques Y sont des X
	ou quelques Y sont quelques X
$vy = v(1- x)$	quelques Y ne sont pas des X
	ou quelques Y sont quelques non X
$1 - y = vx$	tous les non Y sont des X
	ou tous les non Y sont quelques X
$1 - y = v(1- x)$	aucun des non Y n'est X
	ou tous les non Y sont quelques non X
$v(1 - y) = vx$	quelques non Y sont des X
	ou quelques non Y sont quelques X
$v(1 - y) = v(1 - x)$	quelques non Y sont des non X
	ou quelques non Y sont quelques non X

Dans la logique scolastique, une proposition étant donnée, l'analyse des inférences immédiates passait en revue les conditions de validité des propositions qui peuvent en être issues, notamment par négation, ou par conversion, c'est-à-dire par permutation du sujet et du prédicat.

a) La conversion

La conversion est une transformation des propositions qui joue un rôle important pour établir les différents modes valides des syllogismes à partir des syllogismes les plus immédiatement concluants.
- Les propositions **E** et **I** se convertissent simplement, sans que ni la quantité, ni la qualité, ne se trouvent modifiées : la proposition garde donc la même nature :
E : Nul S n'est P reste **E** : Nul P n'est S
I : Quelque S est P reste I : Quelque P est S
- La conversion par accident échange les propositions dites subalternes : **A** et **I** d'une part, **E** et **O** d'autre part. Ainsi :
A : Tout S est P devient **I** : Quelque P est S
E : Nul S n'est P devient **O** : Quelque P n'est pas S
- Le procédé de contraposition est une conversion qui échange les propositions contraires ou subcontraires : **A** en **E** d'une part, **I** en **O** d'autre part. Ainsi,
A : Tout S est P devient **E** : Nul P n'est pas S
I : Quelque S est P devient **O** : Quelque P n'est pas S [87]

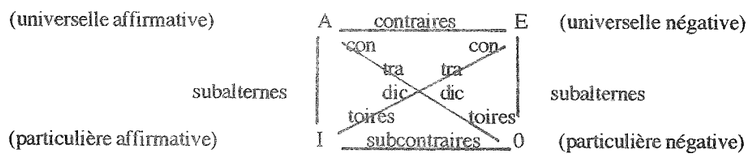
---

[85] G. Boole, op. cit., 1854, ch. XIII. Ainsi que S.B. Diagne, 1989, p. 158-169.
[86] Cf. note 54.
[87] Ces dénominations font référence au carré logique de la logique médiévale :

Dans le calcul logique de G. Boole, c'est le pur mécanisme algébrique qui permet de rendre compte des règles de conversion, tout en les uniformisant par l'emploi systématique de termes tels que non X et non Y, jusqu'ici objets de débat. Les procédures symboliques permettent d'énoncer des règles de transformation de propositions dont toute opération de conversion n'est qu'une application. La transformation générale consiste à exprimer "n'importe quel élément, dans n'importe quelle proposition, comme une fonction logique des autres éléments", et à la soumettre aux règles de développement et d'interprétation déjà explicitées. Dans le système de G. Boole, les règles de conversion deviennent :
- une proposition affirmative peut se transformer en la négative correspondante (**A** en **E** et **I** en **O**) et inversement, par la négation du prédicat;
- une proposition universelle peut se transformer en la particulière correspondante (**A** en **I**, **E** en **O**);
- dans une proposition particulière affirmative ou universelle négative, les termes peuvent s'échanger.[88]

b) Le syllogisme

Dans la logique aristotélicienne, la théorie du syllogisme, c'est-à-dire du raisonnement, encore dite étude des inférences médiates, établit les conditions selon lesquelles une proposition, appelée conclusion, peut être inférée à partir de deux autres propositions, appelées prémisses : une majeure, qui s'énonce en premier, et une mineure, qui s'énonce en second. Ces deux premisses mettent en relation, non pas deux sujets et deux prédicats quelconques, mais seulement trois termes **A**, **B** et **C** : un majeur, un moyen, et un mineur. Le terme moyen apparaît dans la majeure et dans la mineure, mais pas dans la conclusion. Le terme majeur apparaît dans la proposition majeure, le terme mineur dans la proposition mineure[89]. Les différentes combinaisons possibles, dans ces deux prémisses, de l'ordre du moyen par rapport aux deux autres termes d'une part, et de la forme (**A**, **E**, **I**, **O**) de chacune des trois propositions, permettent d'écrire $4^3 = 64$ syllogismes possibles, dont un petit nombre seulement sont concluants, c'est-à-dire permettent d'affirmer la validité de la conclusion à partir des prémisses. La classification aristotélicienne des syllogismes est fondée sur la place qu'occupe le terme moyen. Pour chaque figure, les différents modes dépendent des différentes formes des propositions qui les constituent[90]. Pour les retenir, la logique médiévale leur attribuait des noms qui sont autant de procédés mnémotechniques : c'est ainsi que les trois voyelles, celles de Barbara par exemple, indiquent la forme (**A**, **E**, **I**, **O**) des trois propositions qui composent le syllogisme[91].



[88] S.B. Diagne, op. cit., 1989, p. 137.
[89] Exemple : syllogisme en Darii (3ème mode concluant de la première figure): tout **B** est **A**, quelque **C** est **B**, quelque **C** est **A**.
[90] 1ère figure : **A** est prédiqué de **B** et **B** est prédiqué de **C**.
2ème figure : le moyen **B** est prédiqué de **A** et de **C**.
3ème figure : **A** et **C** sont prédiqués du moyen **B**, sujet des deux prémisses.
4ème figure, ou modes indirects de la 1ère figure.
[91] C'est ainsi que les trois propositions d'un syllogisme en Barbara sont des universelles affirmatives (A). Quant aux consonnes, la première indique à quel mode de la première figure ce syllogisme peut être ramené en transformant l'énoncé des propositions; et dans le corps des mots, certaines lettres indiquent l'opération qu'il faut faire subir à la proposition désignée par la voyelle qui précède afin d'obtenir cette ré-

Dans le calcul booléen, la déduction syllogistique se trouve elle aussi ramenée à l'élimination d'un terme, cette fois dans un système de deux équations à deux inconnues. Puisqu'en algèbre, dans le système ($ay + b = 0$, $a'y + b' = 0$), éliminer y, c'est écrire l'équation-conclusion : $ab' - a'b = 0$, la traduction symbolique d'un syllogisme en Barbara va s'écrire :

tous les hommes sont mortels $y(1 - x) = 0$ ou $(1 - x)y = 0$
tous les Athéniens sont des hommes $z(1 - y) = 0$ ou $zy - z = 0$
et l'élimination de y entre les deux équations conduit à l'équation-conclusion
tous les Athéniens sont mortels $z(1 - x) = 0$

La théorie du syllogisme se trouvant ainsi prise en charge par une théorie des équations algébriques, ni l'ordre des prémisses, ni celui des termes, n'a plus l'importance qui leur était traditionnellement accordée. Une telle théorie apparaît désormais comme cas particulier des procédures du raisonnement symbolique produit à partir du développement des fonctions logiques. Adoptant systématiquement le point de vue de l'algorithme algébrique, G. Boole s'applique donc à lever toute restriction de la logique scolastique et à déployer une théorie générale du raisonnement.

CONCLUSION

Les philosophes logiciens contemporains de G. Boole rejetteront son travail en estimant qu'il appartient non pas au domaine de la logique, mais à celui des mathématiques. Ils resteront attachés à un usage plus naturel de la raison, ne s'autorisant à effectuer des déductions que là où l'interprétation logique existe à chaque étape jusqu'à la conclusion finale. Faisant ce choix, et s'étant laissés rebuter par la forme résolument mathématique des *Lois de la Pensée*, ils n'ont pas perçu l'importance de la synthèse réalisée par G. Boole vis-à-vis de la problématique des débats d'alors sur le fait de savoir qui, des mathématiques ou de la logique, devait être considéré comme fondement de la connaissance.

Cette synthèse s'appuie, comme j'espère l'avoir montré, sur la philosophie lockéenne de la connaissance. Philosophie positive, rejetant toute métaphysique, elle se fonde sur une analyse du langage en tant qu'il est censé représenter nos conceptions mentales, et que ces conceptions mentales restent strictement attachées aux facultés de l'esprit qui les déterminent. Philosophie qui persiste donc à privilégier radicalement le déductif en tant qu'expression de la raison, contre l'inductif d'un empiriste tel que J.S. Mill ou d'un philosophe tel que B. Spinoza. C'est pourquoi l'analogie formelle si largement mise à profit par G. Boole malgré la réticence qu'il manifeste à s'y référer pleinement, ne parvient pas à être pensée comme principe d'invention : pas plus chez G. Peacock que chez G. Boole, elle n'est assumée comme telle; elle l'est au plus comme principe de découverte. Les nombreux exemples que G. Boole emprunte à la Bible ou à la morale pour illustrer son calcul logique montrent qu'il veut fonder la religion naturelle sur cette nouvelle science des signes qui renouvelle la logique. J. Locke lui-même, s'il était bien sûr incapable, vue son époque, d'envisager un tel calcul, attendait beaucoup des développements à venir de l'Algèbre et espérait que la Morale devienne une science de la certitude au même titre que les Mathématiques, parce qu'elles raisonnaient toutes deux sur des combinaisons d'idées produites dans l'esprit.

Le langage comme expression des conceptions mentales est donc strictement analysé comme instrument de la raison. Et c'est sans doute en ce sens que la logique booléenne n'échappe pas à la logique scolastique, tout en restreignant la logique aristotélicienne à un point de vue strictement extensionnel. Comme celle-ci, elle vérifie la rigueur du discours sans apporter au logicien la possibilité de produire de nouveaux raisonnements. Comme elle également, elle reste circonscrite, par l'opération de sélection, dans le

duction : par exemple, s pour la conversion simple, p pour la conversion par accident, m pour la mutation des prémisses, et c pour la réduction à l'absurde. Cf. S.B. Diagne, op. cit., 1989, annexes 3 à 6.

domaine des relations d'inclusion entre concepts ou d'implication entre propositions. Et c'est là que la notion de fonction telle que l'introduira Frege permettra d'élargir le champ des relations, et de déboucher sur la logistique. il n'empêche que l'algèbre de la logique telle que l'élabore G. Boole constitue sur cette voie une première étape qui ne saurait être considérée comme mineure.

La perspective de G. Boole est tout aussi novatrice du côté des mathématiques de son époque, puisqu'elle assume pleinement les interrogations du moment sur ce qui fonde en raison la validité d'un raisonnement symbolique, séparant interprétation et sens formel, en même temps qu'elle inaugure la production d'algèbres non quantitatives, dont l'algèbre de la logique constitue le modèle le plus simple.

𝄞

BIBLIOGRAPHIE

> Anonyme, *Memoirs of the Analytical Society*. Cambridge. 1813
> L.F. Arbogast, *Du Calcul des Dérivations*, Strasbourg, 1800. F.J. Servois, "Essai sur un nouveau mode d'exposition du calcul différentiel", *Annales de MathÈmatiques Pures et Appliquées*, vol. 5, 1814-1815.
> Ch. Babbage, "An Essay towards the Calculus of Functions", *Phil. Trans.*, 1815, 105, pp. 389-423 & 1816, 106, pp. 179-256.
> Ch. Babbage, *Examples of the Functional Equations*, Cambridge, 1820.
> Ch. Babbage, *Ninth Bridgewater Treatise*, Cambridge, 1837.
> Ch. Babbage, "Observations on the Analogy which subsists between the Calculus of Functions and other Branches of Analysis", *Phil. Trans.*, 1817, 107, pp. 197-216.
> Ch. Babbage, "Observations on the Notation employed in the Calculus of Functions", *Trans. of the Cambridge Philosophical Society*, 1821, 1, pp. 63-76.
> Ch. Babbage, "On the Influence of Signs in Mathematical Reasoning", *Trans. of the Camb. Phil. Soc.*, 1821, vol. II, 1827, p. 325-377.
> Ch. Babbage, "On notation", *Edinburgh Encyclopaedia*, 1830, 15, pp. 395-399.
> Ch. Babbage, *Passages from the life of a Philosopher*, Cambridge, 1864.
> Ch. Babbage, J.F.W. Herschel, G. Peacock, traduction en anglais de l'ouvrage de S.F. Lacroix, *Traité Elémentaire de Calcul Différentiel et Intégral*, Cambridge, 1816.
> G. Bentham, *Outlines of a System of Logic*, London, 1827.
> G. Birkhoff, lettre aux organisateurs, in *Proceedings of the Royal Irish Academy*, vol. 57, section A, n° 6, numéro spécial sur le centenaire des *Lois de la Pensée*.
> R. Blanché, *La logique et son histoire d'Aristote à Russell*, Paris, A. Colin, 1970.
> G. Boole, *An Investigation on the Laws of Thought, on which are founded the mathematical Theories of Logic and Probabilities*, Cambridge, McMillan & co, 1854.
> G. Boole, *A Treatise on Differential Equations*, 2de ed., 1864, p. 381.
>G. Boole, *Les lois de la Pensée*, trad. S.B. Diagne, Paris, 1992
> G. Boole, "On a General Method in Analysis", *Philosophical Transactions of the Royal Society*, 1844, 134, pp. 225-282.
> G. Boole, "On the Integration of linear differential equations with constant coefficients", *Cambridge Mathematical Journal*, 1841, 2, pp. 114-119.
> G. Boole, *The Mathematical Analysis of Logic, being an Essay towards a Calculus of Deductive Reasoning*, McMillan, Barclay and McMillan, Cambridge, 1847.
> A.Q. Buée, "Mémoire sur les Quantités Imaginaires", *Phil. Trans.*, 1806, 96, pp. 23-88.
> W. Cannon, "Scientists and Broadchurchmen : An Early Intellectual Network", *Journal of British Studies*, 1964, vol. 4, n° 1, pp. 65-84.
> A. de Morgan, "On the Structure of the Syllogism, & on the Application of the Theory of Probability to Questions of Argument & Authority"", *Trans. of the Camb. Phil. Soc.*, 1844-49, vol. VIII, pp. 379-408.
> A. de Morgan, *Trigonometry and Double Algebra*, London, 1849.

> S.B. Diagne, *Philosophie symbolique et Algèbre de la logique*, Thèse de doctorat d'Etat, Paris, Sorbonne, 1988.
> S.B. Diagne, *Boole, l'oiseau de nuit en plein jour*, Paris, Belin, 1989.
> ss dir. J. Dieudonné, *Abrégé d'histoire des mathématiques*, Paris, Hermann, 1978.
> J.M. Dubbey, *The Mathematical Work of Ch. Babbage*, Cambridge, 1978.
> M.J. Durand, G. Peacock, la Synthèse algébrique comme loi symbolique dans l'Angleterre des Réformes (1830)", *Thèse pour le Doctorat de l'Ecole des Hautes Etudes en Sciences Sociales*, Paris, 1985.
> M.J. Durand, "Genèse de l'Algèbre Symbolique en Angleterre : une influence possible de J. Locke", *Revue d'Histoire des Sciences*, 1990, XLIII/2-3, pp. 129-180.
> G. Frege, *Ecrits logiques et philosophiques*, Paris, Seuil, 1971, trad. et introduction C. Imbert.
> I. Grattan-Guinness, "Psychology in the foundations of logic and mathematics : the cases of Boole, Cantor and Brouwer", *Psicoanalisi e Storia delle Science*, Firenze, 1983.
> I. Grattan-Guinness, "The Correspondence between G. Boole and S. Jevons, 1863-64", *History and Philosophy of Logic*, 12 (1991), pp. 15-35.
> D.F. Gregory, "On the real Nature of Symbolical Algebra", *Trans. of the Royal Society of Edinburgh*, 1840, vol. 14.
> W. Hamilton, *Lectures on Logic and Metaphysics*, vol. IV, appendice VI. Edimbourg & London, 2ème éd., 1860.
> E.H. Koppelman, "The Calculus of Operations and the Rise of Abstract Algebra", *Archive for the History of Exact Sciences*, vol. 8, n° 3, 1971; E.H. Koppelmann : *Calculus of Operations : French Influence on the British Mathematics in the first half on the nineteenth century*, 1969, Ph. D. Diss., John Hopkins University.
> J.L. Lagrange, "Sur une nouvelle espèce de calcul relatif à la différentiation et à l'intégration des quantités variables", Nouveaux *Mémoires de l'Académie Royale des Sciences et Belles-Lettres*. 1772. *Oeuvres*. 3. pp 441-476.
> J. Locke, *Essai philosophique sur l'entendement humain*, trad. frçse P. Coste, Paris, 1755.
> J. Merleau Ponty, "Laplace, un héros de la science normale", *La Recherche*, vol 10, n° 98, 1979, pp. 251-258.
> L. Novy, "L'Ecole algébrique anglaise", *Revue de Synthèse*, III° série, n° 49-52, 1968, pp. 211-222.
> G. Peacock, *Report on the recent progress and actual state of certain branches of analysis*, Cambridge, 1834.
> G. Peacock, *A Treatise of Algebra*, Cambridge, 1830, p. 184.
> J. Playfair, "On the Arithmetic of Impossible Quantities", *Phil. Trans.*, 1778, 68, pp. 318-343.
> A. Sedgwick, *A Discourse on the Studies of the University*, Cambridge, 1834.
> R. Woodhouse, "On the Necessary Truth of certain Conclusions obtained by means of imaginary quantities", *Phil. Trans.*, 1801, 91, pp. 89-120.
> R. Woodhouse, "On the Independance of the Analytical and Geometrical Methods of Investigation, and on the Advantages to be Derived from their Separation", *Phil. Trans.*, 1802, 92, pp. 85-125.
> R. Woodhouse, *Principles of Analytical Calculation*, Cambridge, 1803.

LE THEOREME DE GÖDEL ENJEUX ET SIGNIFICATION

Gilles FERREOL

Institut de Sociologie,
Université de Lille I

En 1931 paraissait dans une revue scientifique allemande un article d'une trentaine de pages, intitulé "Über formal unentscheidbare Sätze der *Principia Mathematica* und verwandter Systeme" (Sur les propositions formellement indécidables des *Principia Mathematica* et des systèmes apparentés). Son auteur - un jeune mathématicien viennois : Kurt Gödel - mettait alors en évidence l'incomplétude de tout système axiomatique contenant la théorie des nombres[1].

Ce théorème, relatif aux limitations internes des formalismes, a fait l'objet de nombreuses discussions. Les principales interrogations sont d'ordre à la fois théorique (critique du programme de Hilbert) et philosophique (problématique du fondement). La compréhension des controverses ainsi mises à jour prendra appui sur différentes contributions[2].

QUELQUES RAPPELS

Né à Brno (en Moravie) et naturalisé autrichien en 1929, Kurt Gödel (1906-1978) émigra aux Etats-Unis en 1940 pour s'établir à Princeton, rejoignant entre autres Einstein et Von Neumann à l'*Institute for Advanced Study*. Ses recherches, pour la plupart inédites, se rapportent à différents champs du savoir : logique mathématique, cosmologie relativiste, histoire, théologie... Mais ce qui fait de Gödel "*le plus grand logicien depuis Aristote*" (l'expression est de Von Neumann), c'est incontestablement son théorème de 1931 : "*Si une théorie T est non contradictoire, et si les axiomes de l'arithmétique sont des théorèmes de T, alors T n'est pas complètement formalisable, c'est-à-dire traduisible dans un système formel où seuls les moyens finis ou finitaires sont permis*".

Autre présentation : "*Dans tout système formel consistant contenant une théorie des nombres finitaires relativement développée, il existe des propositions indécidables, la consistance d'un tel système ne pouvant être démontrée à l'intérieur de ce système*". Ces théorèmes d'incomplétude (cf. également l'antinomie du menteur ou le paradoxe de Richard) remettent en cause l'idéal hilbertien de la "codification" ("***n** est richardien si et seulement si **n** n'est pas richardien*", de sorte que le jugement "***n** est richardien*" est vrai et faux à la fois).

Résumons : "*Une arithmétique non contradictoire ne peut constituer un système complet et comporte nécessairement des énoncés indécidables. L'affirmation de la non-contradiction du système figure précisément parmi ces énoncés indécidables*".

Pour R. Blanché, "*ce résultat apparemment négatif, obtenu par des méthodes formelles strictes, et bientôt corroboré par des résultats analogues sur des problèmes connexes, a une grande portée. Il est plus qu'un simple épisode dans l'histoire de la métamathématique. Celle-ci reprenait, sous une forme neuve, le vieil idéal d'une démonstration absolue, en visant à constituer un formalisme qui fût susceptible de s'achever en se refermant, en quelque sorte, sur lui-même. Un terme est mis maintenant à cet espoir. Même dans la science formelle par excellence, à savoir la mathématique axiomatisée, il faut se résigner à la séparation qu'on pensait avoir effacée, entre vérité et démontrabilité.* ***La première notion déborde la seconde***"[3].

Explicitons cette dernière affirmation : "*Puisque l'une des plus élémentaires des théories mathématiques comporte déjà non seulement des propositions indécidées mais aussi des propositions essentiellement indécidables (i.e. pour lesquelles on peut établir que sont également indémontrables l'énoncé **p** et l'énoncé contradictoire non-**p**), puisque*

---

[1] S.G. Shanker, 1988.
[2] Celles -notamment- de Ladrière, Nagel/Newman ou J-Y. Girard
[3] R. Blanché, 1970, pp. 68-69.