UN FRUIT BIEN DEFENDU
Un Problème de Double Fausse Position pour les Elèves

Marie-Claude AMAND, Frédéric METIN IREM de Reims

Dans la plupart des travaux sur l'histoire des mathématiques (des IREM en particulier), même si ces travaux sont réalisés en direction des classes, bien peu comportent des traces des réactions des élèves ou des publics confrontés à des problèmes historiques. Or les membres du groupe "histoire des maths" de l'IREM de REIMS ont éprouvé le besoin d'aller plus loin. Leurs objectifs étaient et sont toujours de proposer des textes historiques à leurs élèves, de les faire réfléchir sur ces textes, d'enregistrer leurs réactions et leurs démarches et d'en faire part à d'autres collègues par l'intermédiaire de brochures ou de comptes rendus.

Il nous a donc paru indispensable de centrer notre travail sur notre public quotidien puisque c'est dans un but pédagogique que nous étudions des textes anciens. La richesse des réactions que cette étude a suscitées, nous a incités à vouloir partager cette expérience et à montrer à nos collègues que l'histoire des mathématiques peut être exploitée et utile à tous les niveaux, que ce n'est pas forcément une affaire de spécialistes. Il nous paraît même souhaitable que l'aspect historique des mathématiques fasse partie de la culture scientifique de tous nos élèves car elle amène une diversification dans nos méthodes d'enseignement.

Pour une première expérience commune (de nombreuses expériences avaient déjà été réalisées individuellement), nous avons décidé d'utiliser le même thème pour pouvoir plus facilement confronter nos dispositifs, observer les similitudes et aussi les différences des réactions et des démarches de nos élèves selon leurs niveaux, leurs sensibilités et leurs centres d'intérêts.

Il nous fallait donc trouver :

- un problème d'arithmétique (de préférence), pour son côté plus intuitif et moins "rébarbatif" qu'un problème de géométrie ; aucun élève ne devait être bloqué par un problème trop spécifique.
- un texte facilement lisible à tous les niveaux : collège (4ème, 3ème), LEP (1ère année BEP), lycée (2nde).
- un énoncé accompagné de sa solution et de la règle à appliquer sans aucune formulation algébrique, ce qui permettrait de discuter le bien-fondé de cette solution, les élèves pouvant accepter ou non la résolution de l'auteur et proposer ensuite leur justification personnelle.

Le texte de BEN EZRA était donc idéal pour ce travail. C'est un problème porteur d'idées, inattendu, insolite, qui laisse place à l'imaginaire, développe un mode de raisonnement différent et présente une méthode sur un exemple.

Et si on dit : un homme est entré dans un verger et il y a cueilli des fruits. Mais le verger avait 3 portes, gardées chacune par un gardien. Cet homme donc partagea les fruits avec le 1er et lui en donna 2 de plus, puis il partagea avec le 2ème et lui en donna 2 de plus, enfin partagea avec le 3ème, lui en donna 2 de plus, et il sortit en ayant seulement 1 fruit. Combien de fruits a-t-il cueillis?

"Le chapitre de la numération te propose de placer 100 dans le plateau. Partage avec le 1er "(gardien) en lui donnant 2 (fruits) supplémentaires. Il t'en reste 48 ; partage avec le 2ème et "donne lui en 2 de plus, il t'en reste 22 ; enfin partage avec le 3ème et donne lui en 2, et il t'en "reste 9. Mais compare avec le reste 1. Tu t'es trompé de 8, en excédent.On appelle cela la "première erreur.

"Ensuite prends dans le second plateau le nombre 200, partage avec le premier (gardien) en "lui donnant 2 (fruits) de plus. Il t'en reste 98 ; partage avec le 2ème et donne lui en 2 de plus, "il t'en reste 47 ; enfin partage avec le 3ème et donne lui en 2, et il t'en reste 21 1/2, en plus. "Mais compare avec le reste 1. Tu t'es trompé de + 20 1/2. Ceci est la deuxième erreur.

"Multiplie la par 100 qui est dans le premier plateau et on obtient 2050 ; ensuite multiplie ce "qui est dans le second plateau par l'erreur du premier, ce qui revient à multiplier 200 par 8, et "cela fera 1600. Tu retranches alors le plus petit du plus grand, soit 1600 de 2050 ; il reste "450. Enfin retranche une erreur de l'autre, c'est-à-dire 8 de 20 1/2, il reste 12 1/2. Divise alors "450 par ce nombre, et tu obtiens 36. C'est donc le nombre de fruits qu'il a cueillis.

Cet extrait est intitulé "le chapitre des fruits" (Capitulus de pomis) [8] p.336 à 338, "Liber augmenti et diminutionis vocatus numeratio divinationis..", attribué à Abraham Ben Ezra, né à Tolède vers 1090 et mort à Rome (?) en 1167. Ben Ezra a voyagé beaucoup, de l'Egypte à Londres et a écrit entre autres le livre de l'Unité, le livre du Nombre. Lui doit-on aussi le "Liber augmentis et diminutionis..." ? les avis sont partagés.
(d'après la brochure de l'IREM De Toulouse : *Equations du premier degré. Méthode de fausse position*).

Préliminaire

Dans les représentations et tableaux de résolution, on appellera :
x : nombre de fruits après cueillette
y : nombre de fruits après sortie du verger

Travail demandé : au choix

A/ Présenter, dans un tableau, les nombres successifs utilisés dans les phases 1 et 2 de la résolution.
Trouver une méthode plus simple et plus rapide pour arriver à la solution,
A partir d'une troisième "fausse position", montrer que la fonction $f : x \to y$ est du type affine.

B/ Rechercher l'expression algébrique de $f : x \to y$ et utiliser celle-ci pour calculer x quand $y = 1$.
Trouver, à partir de la proportionnalité des accroissements, une expression de x en fonction de x_1, y_1, x_2, y_2 et y $(=1)$.

Deux types de dispositifs :

1 - Le concept de fonction affine est sous-jacent et utilisé en tant que tel pour justifier la solution (Classe de 1ère année B.E.P).

2 - Questions ouvertes : le procédé n'est pas approfondi (classes de collège) ou fait l'objet d'une justification algébrique (classe de seconde).

Questions

1° Vérifiez la solution donnée par Ben Ezra.
2° Savez-vous résoudre le problème par une autre méthode? Si oui, exposez votre méthode.
3° La méthode exposée par Ben Ezra est-elle toujours correcte? Justifiez votre réponse.
4° Appeler x le nombre de fruits cueillis et r le nombre de fruits restants après les trois partages, exprimez r en fonction de x et reprenez la question 3°.

Nous espérons qu'avant de lire la suite de notre exposé, vous vous êtes mis dans la même situation que nos élèves et que vous avez tenté de résoudre le problème proposé.(Eux ne pouvaient pas y échapper!...).
Nous n'avons présenté ci-dessus que deux des différents dispositifs soumis aux élèves. En fait, plusieurs dispositifs reprennent une approche similaire du problème.

En proposant ce texte à nos élèves, nous avions envisagé :

1) *En classe* :

- d'observer les réactions premières des élèves et leur attitude face au problème.
- de constater leur niveau d'exigence en matière de preuve : vérification de la réponse "36", vérification de la règle employée par Ben Ezra, résolution du problème par leurs propres méthodes, justification de la méthode de Ben Ezra.
- de permettre aux élèves d'ouvrir une discussion (en groupe ou non) sur la validité de la règle de la double fausse position et la santé mentale de son auteur!

Notre rôle était d'observer, de privilégier les initiatives, d'encourager les critiques, de relancer éventuellement la discussion, de veiller à ce que chacun puisse exprimer sa conviction personnelle. En aucun cas, nous ne devions donner des renseignements ni induire des comportements.

2) *Ensuite* :

- de travailler en commun sur les copies remises par chaque classe, de sélectionner les plus significatives.
- de comparer l'évolution des moyens mis en oeuvre par nos élèves selon les classes, selon l'image qu'ils se font des mathématiques.
- de repérer les mécanismes et les conditionnements acquis au cours de la scolarité.
- de confronter nos propres dispositifs pédagogiques et nos réflexions quant à nos changements d'attitude par rapport aux élèves et à nos méthodes de travail en classe.

Cette situation nous a permis de mieux comprendre les réactions de certains élèves et les raisons de leur désintérêt pour les mathématiques. Beaucoup d'élèves ont exprimé spontanément leur avis sur le texte et quelques uns ont confié un certain désarroi face aux mathématiques.

Voici maintenant ce qui s'est réellement passé

1) *En classe* :

Nous avons constaté un intérêt plus profond d'une grande majorité des élèves. Ils se sont permis de formuler des critiques sur le texte, de dire bien haut ce qu'ils pensaient car, il ne s'agissait pas alors d'une remise en cause de l'enseignement de leur professeur, l'énoncé étant attribué à un auteur "obscur" (il en aurait été autrement si la discussion avait porté sur l'illustre Pythagore!).
Ils ont très souvent cherché à résoudre le problème sans lire la méthode de Ben Ezra, qu'ils ont eu des difficultés à comprendre dans un premier temps. Certaines re-

marques prouvent leur perplexité : "c'est un fou ", "j'ai rien compris", "sa méthode est nulle", "ça doit être faux"...

Puis la recherche a véritablement commencé avec une lecture plus approfondie du texte. Ils avaient un défi à relever. L'attitude "neutre" du professeur leur a laissé un espace de liberté suffisant pour qu'ils s'approprient la responsabilité totale de la résolution.

Confrontés au même énoncé, les participants à l'atelier ont eu des réactions diverses.

Agnès a lu tout le texte en cherchant une compréhension globale. Eliane a immédiatement algébrisé la situation. Jacques a pris le problème à l'envers: partant de 1 et en inversant les opérations, il obtient 36. Henri a tout de suite reconnu une situation d'approximation utilisée en analyse numérique (méthode de la sécante). Evelyne a reconnu un procédé algorithmique; ils n'ont donc pas cherché à résoudre le problème: trop de culture tue l'action...

D'autres ont repris pas à pas la démarche de Ben Ezra et se sont demandé si la méthode pourrait être expliquée par l'auteur autrement que sur des exemples[1].

Evelyne a avancé une justification des termes " double fausse position " par un glissement linguistique à partir de " double fausse supposition", qui correspondrait ensuite à un glissement épistémologique. (Nous lui en laissons l'entière responsabilité).

Nous avons ensuite rapporté ce que nous avions trouvé dans les écrits des élèves:

2) *Dans les copies* :

Les différentes méthodes utilisées pour résoudre le problème ont été classées en :

- méthode algébrique: mise en équation avec l'utilisation d'une seule inconnue
- méthode algébrique: système d'équations

Pour justifier la méthode de Ben Ezra, les tentatives ont été diverses. Certains élèves ont considéré la méthode comme aléatoire voire fausse et essayé de la prendre en défaut. Un groupe a même réussi en passant (consciemment ou non) sur une erreur dès le départ.

Beaucoup vérifient l'exactitude des calculs en reprenant l'énoncé du problème et en le paraphrasant, ils constatent que si l'homme a cueilli 36 fruits, il lui en reste un seul à sa sortie du verger. Cette simple vérification les convainc.

Les plus jeunes sont restés au niveau des essais (c'est normal, ils avaient peu de directives). Ils substituent d'autres nombres à 100 et 200, appliquent l'algorithme de Ben Ezra, trouvent "36", le bon résultat, en déduisent " ça marche". Cependant certaines remarques orales prouvent leur insatisfaction, ils sentent qu'ils n'ont pas bien compris le mécanisme de cette résolution.

"Pourquoi a-t-il pris 100 et 200 ?"
"Doit-on prendre un nombre et son double ? deux nombres dont l'écart est 100 ?"
"Peut-on obtenir des nombres décimaux ?"

Ils multiplient les essais pour ne rien laisser au hasard. Une remarque logique d'un élève de 3ème:" il a pris 100, il a vu que c'était trop grand, alors je ne comprends pas pourquoi il a choisi 200". Cet élève avait tenté d'obtenir le résultat par encadrements (il a fait de la simple fausse position).

Nous avons ensuite répertorié les différentes tentatives de généralisation:

[1]Il semble qu'en fait seule une accumulation d'exemples ait permis au lecteur, à cette époque, de comprendre le sens de la résolution. On peut citer les Arabes [1] et les Chinois [2] spécialistes de ce type de méthode.

- avec une variable x et son double
- puis une résolution avec x et x' où les élèves s'imposaient la condition $x > x'$ alors qu'il suffit de choisir x différent de x'.

En général, les élèves n'ont pas reconnu la situation affine. Cependant, les élèves à qui l'on avait demandé une interprétation de la méthode en termes d'application affine y sont parvenus, mais leurs commentaires prouvent qu'ils n'y auraient pas pensé tout seuls.

En outre, aucun élève n'a tenté d'appliquer la méthode à d'autres situations. Nous nous sommes posés la question de savoir pourquoi, mais à y bien réfléchir, nous n'avions pas essayé de susciter une étude plus approfondie. Nous nous sommes précipités sur l'analyse des copies et des résultats, sans vraiment penser à exploiter davantage la situation.

Une exploitation de ce travail est donc encore à faire. Une fois la méthode comprise, il faudrait proposer aux élèves d'autres exemples historiques :

- méthode des plateaux illustrée par Al-Kashi [1]
- règles du "trop" et du "pas assez" dans le *Jiuzhang suanshu* ou *Les Neuf chapitres dans l'art du calcul* [2]
- règles de la double fausse position des problèmes d'arithmétique figurant dans des ouvrages du XVII^e au XIX^e siècle.

Mais un tel travail nécessite du temps et on peut se poser la question de la compatibilité de ce genre d'activités avec les programmes. On pourrait s'éloigner des manuels scolaires et proposer des problèmes de ce type pour donner du sens à l'introduction de l'algèbre au collège et l'utilisation de celle-ci au lycée.

Quelle est la place de l'histoire des mathématiques dans notre enseignement? Faut-il l'inscrire dans les programmes?

Ce qui a paru clair aux participants de l'atelier, c'est que l'histoire des mathématiques devrait être partie intégrante de la formation initiale des professeurs. Cela permettrait de mieux comprendre les obstacles rencontrés par les élèves surtout lorqu'il s'agit d'obstacles épistémologiques (on peut d'ailleurs se demander si ce n'est pas une grande majorité des cas). En revanche, il n'est pas souhaitable que l'aspect historique soit rendu obligatoire par une étude systématique. Le caractère exceptionnel des textes anciens confère à cette approche une place à part dans l'esprit des élèves et aussi des enseignants (la note, si le travail effectué est noté n'a pas la même signification ni pour les élèves, ni pour nous). On peut prendre du recul par rapport aux notions abordées. L'image que les élèves ont des mathématiques est changée. Ils s'aperçoivent que les mathématiques sont vivantes et en mouvement, peut-être moins monolithiques et effrayantes.

Si l'étude de l'histoire des mathématiques rentrait dans les programmes en tant que contenu, elle deviendrait presque certainement banale, pesante et trop souvent anecdotique. Il faut que cela reste le domaine de professeurs qui s'y intéressent.

Lors de l'atelier, nous étions d'accord sur le fait que la formation initiale intègre l'aspect historique des mathématiques, mais nous avons ensuite constaté que la plupart des collègues qui se sont tournés vers l'histoire, ne l'ont fait qu'après quelques années d'enseignement, peut-être insatisfaits et voulant modifier l'image des mathématiques auprès de leurs élèves. En fin de compte, le commentaire des programmes actuels (" l'introduction d'une perspective historique peut y contribuer") semble être le meilleur compromis pour que chacun se sente libre dans sa manière d'enseigner tout en suggérant une certaine ouverture.

Pour terminer nous avons évoqué la question essentielle: Au fond, comment comprenons-nous?

Chacun a fait part de son expérience :

- Lire ligne par ligne la démonstration en cherchant à tout comprendre en détail, surtout les enchaînements pour s'apercevoir que l'on n'a rien compris.
- Faire sa propre démonstration au préalable.
- Lire la démonstration et la rédiger en ses propres termes.

Nous en sommes arrivés à la conclusion qu'une bonne démonstration doit comprendre un premier paragraphe contenant toutes les idées directrices.

Il est une question que l'on se pose rarement en termes clairs: "Comment nos élèves comprennent-ils?", alors souvent, nous nous indignons:" Pourquoi n'ont-ils pas compris ?" et de nous interroger sur notre manière de donner l'information et peu sur celle dont elle est reçue.

Nous remercions les participants à cet atelier à qui nous avons beaucoup pris !

BIBLIOGRAPHIE

Les trois principaux documents

[1] IREM de Toulouse - *Equations du premier degré (méthode de "fausse position").* Le texte de Ben Ezra est extrait de cette brochure.

[2] J.C. Martzloff - *Histoire des mathématiques chinoises*, Masson, Paris 1988.

[3] IREM de Reims - *Un fruit bien défendu.* Cette brochure est le compte rendu de l'expérience dont il était question dans l'atelier.

Autres ouvrages

- J.P. Collette - *Histoire des mathématiques*, Vuibert-Erpi, Paris-Montréal 1973.
- IREM de Lyon - *L'algèbre et le calcul en Egypte ancienne* (Olivier Keller).

LA POLEMIQUE FERMAT-DESCARTES

Jean-Michel BAUCRY IREM de Lille

J'ai tenté dans les quelques pages qui suivent de résumer brièvement les nombreux textes que je me proposais d'étudier lors de l'atelier "Fermat-Descartes" de l'université d'été, et qui n'ont pu l'être tous, faute de temps. Je n'ai pas joint ici ces textes, n'ayant pas su faire les choix nécessaires. Le lecteur intéressé les trouvera d'ailleurs facilement. Les polémiques scientifiques sont passionnantes, surtout lorsqu'elles opposent des esprits éminents, et d'autant plus qu'elles abordent des sujets fondamentaux. Celle-ci porte à la fois sur le calcul différentiel et la physique mathématique, sujets encore balbutiants à l'époque. Le premier épisode concerne les lois de réflexion et de réfraction de la lumière. Depuis la fin du XV° siècle, on sait fabriquer des lunettes corrigeant les vues déficientes. Plus tard Galilée en a amélioré le procédé, et utilisant les tables de réfraction établies par Vittelion (Witelo) au XIII°, il parvint à construire les premières lunettes astronomiques à l'aide desquelles il put parfaire ses observations. "*Mais à la honte de nos sciences cette invention si utile et si admirable n'a premièrement esté trouvé que par l'expérience et la fortune*" écrira Descartes dans la Dioptrique. En l'absence d'une explication théorique rigoureuse, quel crédit donner à l'observation au moyen d'une lunette? Ce qu'on y voit n'est-il pas qu'une aberration causée par l'instrument? Descartes ne s'associe certainement pas à ces reproches qui furent opposés effectivement aux découvertes de Galilée.

Mais Descartes, contre l'empirisme, tient précisément à fournir un véritable fondement à l'optique et par là-même à défendre l'usage de la lunette. Vers 1620, Snellius (ou Snell), un Néerlandais découvrit la loi des sinus mais ne la publia pas. Il semble d'ailleurs qu'il ne s'agissait que d'une découverte empirique dégagée à partir des tables de Vittelion, et non d'une loi déduite d'une démonstration. Cela ne pouvait, en eût-il eu connaissance, satisfaire Descartes, qui, lui, désirait proposer un modèle de la lumière dont découlerait cette loi. "*Il n'est pas besoin que j'entreprenne de dire au vray quelle est sa nature et je croy qu'il suffira que je me serve de deux ou trois comparaisons, qui aident à la concevoir en la façon qui me semble la plus commode, pour expliquer toutes celles de ses propriétés que l'expérience nous fait connoistre et pour déduire ensuite toutes les autres qui ne peuvent pas si aysément estre remarquées*". Ce qu'il réalise, puisque loin de s'en tenir à la loi de réfraction Descartes examine ensuite les formes selon lesquelles il faut polir un verre de sorte qu'il réalise tel ou tel effet à l'avance prescrit, fondant ainsi une véritable théorie des lentilles.

Examinons maintenant les métaphores dont il use pour décrire le comportement de la lumière. Celle du "baston" de l'aveugle d'abord: la lumière n'est autre que cette action fort prompte qui traverse les corps lumineux jusqu'à nos yeux. Celle du pressoir ensuite où la lumière est le mouvement de cette "matière subtile" qu'est le vin, les grappes figurant les parties grossières de l'air et des corps transparents. Dès qu'on presse depuis le haut de la cuve, le vin s'en écoule par le bas, ce n'est pas le vin qui instantanément s'est ainsi déplacé, mais l'inclination qu'il a à se mouvoir. De même la lumière est une inclination à se mouvoir qu'ont les objets lumineux(???), inclination qui se propage instantanément. Inclination au mouvement, la lumière doit en suivre les lois. Ainsi le phénomène de la réfraction s'interprétera-t-il comme la déviation d'un boulet sur la surface de l'eau, la vitesse du boulet étant ici l'analogue non pas de la vitesse de propagation de la lumière que Descartes croit infinie, mais de cette "inclination" au mouvement. Et voici l'explication de Descartes: la vitesse du boulet peut être décomposée suivant une composante parallèle à la surface de l'eau, laquelle ne sera pas affectée, et suivant une composante normale qui subira une modification telle que la vitesse globale du boulet passe d'une valeur propre à l'air à une seconde valeur qui soit propre à l'eau. Supposons que la vitesse propre au second milieu soit double de celle propre au premier, le temps mis pour parcourir OR (voir figure 1) sera moitié moindre de celui mis pour parcourir OI et puisque la composante tangentielle de la vitesse n'est pas modifiée on aura: $OP/OS = 1/2$ (et l'on a $OP/OS = \sin r/\sin i$)

Cette relation peut nous surprendre, elle contredit celle enseignée aujourd'hui qui s'écrirait dans cet exemple: $\sin r/\sin i = 2$, (l'indice d'un milieu étant précisément inverse-