Huygens : L'espérance et l'infini

Denis Lanier
IREM de Basse Normandie

> "*Il faudrait une nouvelle espèce de logique, qui traiterait des degrés de probabilité* (et nous donnerait) *une balance nécessaire pour peser les apparences et pour former là-dessus un jugement solide* ". Leibniz[1]

La nouvelle espèce de logique, la logique de l'incertain que Leibniz appelle de ses voeux, c'est le calcul des probabilités, ou plus exactement celui des **espérances**. En effet la théorie du hasard s'est construite, dans la deuxième moitié du 17ème siècle, avec les travaux de Fermat, Pascal et Huygens, autour du concept fondamental d'espérance. On sait ce que la naissance de ce calcul doit aux problèmes de répartition des enjeux dans les jeux de hasard. C'est ce point de vue juridique, celui du contrat, qui prévaut dans les premiers travaux à ce sujet. Cet article souhaite étudier l'apport de Christian Huygens à la nouvelle théorie, et comment l'infini y fait une timide apparition. Huygens est, en fait, le premier, à publier en 1656 un véritable traité mathématique sur les jeux de hasard, où l'espérance joue un rôle central. Après Pascal, Huygens donne ainsi une définition précise - sinon limpide - de l'espérance de gain d'un joueur - qu'il nomme la valeur de sa chance -, ainsi que des règles d'utilisation pratique. Pendant le demi-siècle qui suit, c'est dans ce traité que les mathématiciens apprendront la théorie du hasard, au point que Bernoulli dans son célèbre *Ars conjectandi* reprendra, en le commentant le texte de Huygens.

Huygens est aussi le premier à envisager l'idée d'un jeu éventuellement infini. Un jeu potentiellement infini ne pose pas de problème philosophique particulier, mais l'évaluation du gain que l'on peut attendre dans un tel jeu oblige à la considération, actuelle, d'une infinité de parties. L'apparition de l'infini dans les débuts de la théorie du hasard est étonnante, d'une part, car ses initiateurs avaient déjà

---

[1] Leibniz, *Nouveaux Essais sur l'entendement humain*, 1704.

beaucoup de mal à mettre en place les concepts de base du nouveau calcul, sans se mettre sur le dos des problèmes liés à l'infini. D'autre part, les problèmes étudiés de Pacioli à Pascal et Fermat sont tous des situations finies, et, donc, l'idée de considérer un jeu éventuellement infini est tout à fait nouvelle chez Huygens. Dans le cadre encore trouble d'une théorie, où les concepts sont mal fixés, où se posent des problèmes de langage et de traduction, où la matière elle-même est une fiction, on comprendra que l'infini fasse une apparition fugitive, masquée, comme si de rien n'était. Alors que ce sera pour la suite du développement de la théorie un élément central.

Après avoir rappelé rapidement les travaux antérieurs à Huygens, nous étudierons d'abord la genèse et le contenu du traité de Huygens, en particulier ce qui concerne la mise en place du concept d'espérance. Puis nous détaillerons les dernières propositions du traité, et un autre problème traité dans la correspondance, où l'infini fait son apparition.

I. LES PROBABILITES AVANT HUYGENS.

Il ne s'agit pas ici de faire une histoire exhaustive de la préhistoire du calcul des probabilités[2], mais il est important pour comprendre la portée du texte de Huygens, de marquer les points forts de ces premiers travaux. Ils se sont cristallisés d'abord autour de deux types de problèmes : les partis et les dés.

1. **Les partis**.

Les problèmes des partis remontent au moins aux algébristes italiens de la Renaissance, du 15ème et 16ème siècles : Luca Pacioli, Nicolo Tartaglia, qui posent la question du partage de la mise entre les participants à un jeu de hasard interrompu avant la fin. Ce problème est posé alors de façon purement algébrique, en termes de proportions. C'est Cardan qui énonce peut-être le premier la question en termes probabilistes en affirmant le principe suivant : " *Si la division une fois faite, le jeu recommençait à nouveau, les parties en présence devraient miser la même somme que celle qu'elles ont reçue à condition de s'arrêter de jouer"* . On a ici une formulation claire du problème avec son critère de projection dans l'avenir, et donc la fiction d'un jeu qui continue alors qu'il s'est arrêté.

---

2 On peut, par exemple, consulter notre article *La géométrie du hasard*, SCHOLIES n°16, janvier 1993.

2. **Les dés.**

Les paris sur les lancers de dés sont pratiqués depuis encore plus longtemps. Mais le calcul, la théorie, n'a pas d'intérêt pour le joueur, qui ne cherche pas l'égalité, ou la répartition juste, mais qui veut gagner en forçant le hasard. Là aussi, c'est Cardan qui décrit les probabilités d'apparition de faces d'un dé honnête, en indiquant : "*Par exemple, je peux aussi aisément lancer 1, 3 ou 5 que 2, 4 ou 6. Les gains sont alors mis en accord avec l'égalité, si le dé est honnête* ". Et il ajoute : "*Ces faits sont d'une grande importance pour la compréhension, mais vraiment d'aucune pour la pratique du jeu* ". Les outils mathématiques sont disponibles, les relevés d'observations statistiques aussi, mais il n'y a pas de problématique, donc pas de mathématique. Ces problèmes vont se formuler peu à peu. Par exemple, le traité de Galilée, au début du 17ème siècle, répond à la célèbre question du Grand-Duc de Toscane : "*on lance 3 dés. Comparer les cas où la somme est 9 et celle où elle est 10* ". Galilée montre que pour pouvoir travailler en équiprobabilité, donc faire seulement des dénombrements, il faut distinguer les deux dés. On a alors une différence de probabilité entre les deux événements de l'ordre de 1%. Il est d'autant plus remarquable que les joueurs de l'époque pouvaient observer une telle différence de fréquences ! Ce type de problème sera renouvelé avec la fameuse question posée par le Chevalier de Méré à Pascal : comparer les événements "*avoir au moins un six en lançant un dé*", et "*avoir au moins un double six en lançant deux dés*".

Les deux types de situations vont être le champ de travail et d'exploration de la célèbre correspondance entre Fermat et Pascal de 1654, principalement consacrée au problème des partis.

Rappelons que Pascal évalue le gain possible d'un joueur à un moment donné de la partie, en faisant une partition des deux éventualités pour le coup suivant. Ce qui donne une équation récurrente, qu'il résout avec une grande virtuosité technique et son fameux triangle arithmétique. Le principe de fonctionnement de la récurrence est le suivant : dans une situation à deux issues équiprobables, si dans un cas le joueur gagne a et dans l'autre b, il lui revient, dans le cas du partage, (a+b)/2. L'argumentation est d'ordre juridique.

Fermat fait intervenir des parties fictives, qui permettent de décrire entièrement l'ensemble de tous les cas. En supposant l'équiprobabilité de ces cas, il reste à faire un dénombrement des cas favorables à l'un des joueurs. Il s'agit donc d'un raisonnement très proche d'une méthode probabiliste finie moderne. Cette idée des parties fictives n'est pas acceptée facilement, ni par Roberval, qui y voit un paralogisme, ni finalement par Pascal. En effet, le jeu s'est effectivement arrêté.

Les deux concepts centraux qui se mettent peu à peu en place lors de ces premiers travaux sont ceux d'équiprobabilité - ou plutôt d'équité, de justice - et d'espérance. E. Coumet a montré[3] comment ces problèmes de partage d'enjeu, avaient été traités d'un point de vue juridique, celui du contrat : il s'agit d'établir ce qui doit revenir à chaque joueur en toute justice. C'est donc initialement un esprit d'équité qui prévaut plutôt qu'une recherche d'égalité mathématique. E. Coumet a aussi montré ce que ces travaux devaient à un type d'accords juridiques devenus de plus en plus importants aux 17ème et 18ème siècles : les contrats aléatoires. Il s'agit d'organiser, dans un cadre commercial ou de navigation, l'échange d'une valeur présente et certaine contre une valeur incertaine dans l'avenir. Le problème est d'arriver à la proportion "*entre le péril et ce qui est reçu*". La quantification de cette proportion conduit à l'idée d'espérance, en tant que critère de décision, de choix raisonnable dans une situation incertaine, qui reste soumise au hasard. Pour illustrer cet état d'esprit nouveau, il suffit d'opposer la "sagesse populaire" du "un tiens vaut mieux que deux tu l'auras", à la définition de Pascal : "*L'incertitude de gagner est proportionnée à la certitude de ce qu'on hasarde selon la proportion des hasards de gain et de perte* ".

II. LA GENESE DU TRAITE DE HUYGENS.

En 1654, date de la célèbre correspondance entre Pascal et Fermat, Christian Huygens a 25 ans, il vient de terminer ses études. Commencées avec son père, puis avec un mathématicien d'Amsterdam, Stampisen, il les poursuit à Leyde, où il étudie le droit, et surtout à la nouvelle université de Breda, où il travaille sous la férule de Francis van Schooten. Huygens a publié déjà deux petits opuscules sur les quadratures, en particulier une réfutation de Grégoire de Saint Vincent, mais ce sont encore là travaux d'étudiant. En 1655, il visite la France pour recevoir son doctorat de droit à l'université protestante d'Angers. A l'aller, comme au retour, il

[3] Cf. bibliographie.

séjourne quelques mois à Paris et se lie avec les milieux mondains et savants. Il n'y rencontre ni Pascal - ce qu'il regrette -, ni Fermat - toujours à Toulouse -, ni Carcavi, mais se lie avec Mylon et rencontre Roberval. C'est sans doute à ce moment qu'il est informé du problème des partis et de l'existence des travaux des mathématiciens français, mais c'est sûrement une connaissance très partielle, puisqu'aucune publication n'a eu lieu. De retour en Hollande, il travaille sur le sujet, et, en 1656, écrit à van Schooten qu'il a un manuscrit sur les jeux de hasard.

Van Schooten projette alors la publication d'un recueil d'exercices, applications de l'analyse cartésienne à divers sujets. Il propose, donc, à Huygens d'y insérer son traité. Le recueil devant paraître en latin, puis en hollandais, il faut donc traduire le texte de Huygens en latin, ce qui est fait par van Schooten. Ceci ne semble pas aisé, car sur une matière aussi nouvelle, les mots et les usages ne sont pas encore fixés.

Parallèlement à ces problèmes de traduction, Huygens poursuit une abondante correspondance avec des mathématiciens français : Roberval, Carcavi, Mylon. Il s'agit principalement d'un échange de problèmes et de solutions, plus qu'une comparaison de méthodes. Une des questions qui préoccupent Huygens est l'avantage de la primauté : quand deux joueurs jouent tour à tour suivant certaines règles, quel est l'avantage de celui qui commence ? Vers juin 1656, le problème arrive finalement à la connaissance de Pascal et de Fermat, par le biais de Carcavi. Par le même canal, Fermat communique ses résultats que Huygens est bien heureux de trouver conformes aux siens. Fermat en profite pour proposer d'autres questions plus difficiles, que Huygens adjoindra à son traité, après les avoir résolus "*en un après-midi*". Pascal s'accorde aussi avec les résultats de Huygens, qui peut donc apporter les dernières corrections à son manuscrit. L'ouvrage paraît en août ou septembre 1657, en latin. L'édition hollandaise paraît trois ans plus tard.

Nous utiliserons, dans la suite, la traduction française[4] parue

[4] Il existe une autre traduction française, plus ancienne. Elle paraît en 1801, sous le titre *L'art de conjecturer*, traduit du latin de Jacques Bernoulli, avec des Observations, Eclaircissements et Additions, par L.G.F. VASTEL, Membre du Lycée et de la Société d'Agriculture et de Commerce de Caen. De fait, on ne trouve que la première partie, qui n'est autre que le traité de Huygens. Mais la traduction est faite à partir du texte latin de van Schooten, et semble donc moins fiable.

dans les *Oeuvres Complètes* [5], commentées par D.J. Kortweg, parues entre 1888 et 1950. Cette traduction, bien qu'imparfaite, a été réalisée à la fois à partir du texte latin - du en fait à van Schooten - et du texte hollandais - original.

III. LE TRAITE.

1. Introduction.

Le traité, intitulé en latin *De rationiciis in aleae ludo,* en hollandais *Van rekeningh in spelen van geluck,* est traduit en français sous le titre *Du calcul dans les jeux de hasard* . Il est précédé d'une adresse au lecteur de van Schooten, où il présente le travail de Huygens comme une application de l'algèbre et plus généralement de l'analyse cartésienne :

"*Je présume que son écrit te plaira d'autant mieux que les considérations de l'auteur te paraîtront plus subtiles et plus extraordinaires ; surtout parce qu'il y emploie la même* Analyse *dont je me suis servi et dont je lui ai enseigné jadis les fondements, et qu'ainsi il indique à ceux qui ont étudié cet art une méthode pour analyser de pareils problèmes* ".

Suit une lettre-préface adressée à van Schooten, où Huygens présente son ouvrage dont la matière n'est pas si frivole qu'il y paraît :

"*Car si quelques lecteurs pourraient bien s'imaginer que j'ai travaillé sur des sujets de faible importance, ils ne condamneront néanmoins pas comme complètement inutile et indigne de toute louange ce que vous voulez bien adopter de cette façon comme si c'était votre propre ouvrage, après l'avoir traduit, non sans quelque labeur, de notre langue en latin. Toutefois je veux croire qu'en considérant ces choses plus attentivement, le lecteur apercevra bientôt qu'il ne s'agit pas ici d'un simple jeu d'esprit, mais qu'on y jette les fondements d'une spéculation fort intéressante et profonde.*"

---

5 Toutes les citations qui suivent sont donc tirées du tome XIV des *Oeuvres Complètes de Christiaan Huygens, publiées par la Société Hollandaise des Sciences*, La Haye, Martinus Nijhoff, 1920. Un copieux avertissement et de nombreuses notes encadrent le texte du traité de Huygens (pp.54-91), ainsi que les autres travaux de Huygens sur le sujet, regroupés en 9 appendices.

Huygens rend grâce, de manière allusive, à ses prédécesseurs, Pascal et Fermat :

"*Il faut savoir d'ailleurs qu'il y a déjà un certain temps que quelques uns des plus célèbres mathématiciens de toute la France se sont occupés de ce genre de calcul, afin que personne ne m'attribue l'honneur de la première invention qui ne m'appartient pas. Mais ces savants, quoiqu'ils se missent à l'épreuve l'un l'autre en se proposant beaucoup de questions difficiles à résoudre, ont cependant caché leurs méthodes. J'ai donc dû examiner et approfondir moi-même toute cette matière à commencer par les éléments, et il m'est impossible pour la raison que je viens de mentionner d'affirmer que nous sommes partis d'un même premier principe. Mais pour ce qui est du résultat, j'ai constaté en bien des cas que mes solutions ne diffèrent nullement des leurs.*"

Ces remarques sont représentatives de la communication scientifique, au milieu du 17ème siècle. Beaucoup se passe par correspondance directe, et l'on cherche plus - sauf demande explicite - à échanger des énoncés et des résultats, plutôt que des principes et des méthodes. Il n'y a pas encore de support périodique aux publications, ni de style scientifique codifié.

Enfin, Huygens indique que son traité se termine par des exercices pour le lecteur :

"*Vous trouverez qu'à la fin de ce traité j'ai proposé encore quelques questions du même genre sans indiquer la manière de les résoudre, premièrement parce que je voyais qu'il me coûterait trop de travail d'exposer convenablement les raisonnements conduisant aux réponses, et en second lieu parce qu'il me semblait utile de laisser quelque chose à chercher à nos lecteurs (s'il s'en trouve quelques-uns), afin que cela leur servît d'exercice et de passe-temps.*"

Le traité, lui-même, commence ensuite. Il débute par une courte introduction, fixant les "éléments" sur lesquels s'est fondé Huygens, puis comporte 14 propositions et les cinq exercices terminaux. On peut y distinguer quatre parties :

* les règles du calcul qui regroupe l'introduction et les propositions I, II et III ;
* le problème des partis, propositions IV à IX ;
* les problèmes de dés, propositions X à XIV ;
* les cinq exercices.

2. Les fondements.

Avant d'aborder la première partie, il convient de souligner les problèmes de traduction, qui ont été étudiés par Hans Freudenthal[6]. En particulier, le mot "chance" apparaît dans la traduction française avec des occurrences diverses, alors que Huygens a utilisé des mots différents en hollandais. On peut distinguer, en première approche, deux occurrences principales :

* Huygens utilise le mot "kansse" pour désigner la situation globale d'un jeu, c'est-à-dire l'ensemble de toutes les issues possibles, avec leurs probabilités. C'est la liste des gains possibles, accompagnés du nombre de cas où ces gains sont obtenus. Huygens parle alors de la "valeur de la chance" d'un joueur pour désigner la valeur moyenne de cette liste, c'est notre espérance moderne. Van Schooten traduit dans ce cas en latin par *sors seu expectatio* ou *expectatio*. C'est de là que vient notre "espérance".

* Huygens utilise le mot "kans" pour désigner les cas où un événement se produit. Il s'agit alors de l'utilisation classique, comme dans l'expression : trois chances sur quatre. Huygens utilise d'ailleurs le même mot dans le cas de "chances égales" et dans les cas où il n'y a pas équiprobabilité. Van Schooten traduit alors par des expressions variées comme *aeque facile*, *pari facilitate*, *aequa sors*, *simili expectatio*. La situation se complique quand on sait que les deux mots utilisés par Huygens "kansse" et "kans" ont le même pluriel "kanssen".

L'introduction comporte les deux définitions qui vont fonder la méthode. La première est la suivante :

"*la chance qu'un joueur a de gagner ou de perdre a une valeur déterminée.*"

Il s'agit là d'une affirmation d'existence de la valeur de la chance d'un joueur, de son espérance de gain, dont nous savons qu'elle peut être sujette à démonstration, dans le cas d'un jeu éventuellement infini. Huygens l'illustre avec deux exemples de jeux classiques : d'abord, "*si quelqu'un parie de jeter avec un dé six points au premier coup* ", où il s'agit de savoir de combien la chance de perdre surpasse celle de gagner. Ensuite, "*si je joue avec une autre personne à qui*

[6] Cf. bibliographie.

gagnera le premier trois parties et que j'en aie déjà gagné une ", où il s'agit de savoir quelle part de l'enjeu me revient si on interrompt le jeu, ou bien à quel prix je dois raisonnablement céder mon jeu à quelqu'un qui désire continuer à ma place.

La deuxième définition est celle qui permettra les calculs, c'est la plus importante :

"*Dans un jeu la chance qu'on a de gagner quelque chose a une valeur telle que si on possède cette valeur on peut se procurer la même chance par un jeu équitable, c'est-à-dire par un jeu qui ne vise au détriment de personne* "[7]

Huygens donne un exemple pour éclairer ce principe, qui ne sera en fait "démontré" qu'après la première proposition. Si dans une main j'ai 3 écus, et dans l'autre 7 écus, choisir "au hasard" l'une des deux mains revient à être certain d'obtenir 5 écus, c'est-à-dire de jouer au même jeu avec 5 écus dans les deux mains.

La proposition I est la suivante :

"*Avoir des chances égales d'obtenir* a *ou* b *me vaut* (a+b)/2."[8]

En voici la démonstration in-extenso :

"*Afin de non seulement démontrer cette règle mais aussi de la découvrir, appelons x la valeur de ma chance. Il faut donc que, possédant x, je puisse me procurer de nouveau la même chance par un jeu équitable. Supposons que ce jeu soit le suivant. Je joue x contre une autre personne, dont l'enjeu est également x ; il est convenu que celui qui gagne donnera a à celui qui perd. Ce jeu est équitable, et il appert que j'ai ainsi une chance égale d'avoir a en perdant, ou 2x-a en gagnant le jeu ; car dans ce dernier cas j'obtiens l'enjeu 2x, duquel je dois donner a à l'autre joueur. Si 2x-a était égal à b, j'aurais donc une chance égale d'avoir a ou d'avoir b. Je pose*

[7] Dans le texte hollandais : "*In het speelen de kansse, die yemant ergens toe heeft, even soo veel weerdt is als het geen, het welck hebbende hy werder tot deselfde kansse kan geraecken met rechtmatigh spel.*" Dans le texte latin : "*In aleae ludo tanti aestimandam esse cujusque sortem seu expectationem ad aliquid obtinendum, quantum si habeat, possit denuo ad similem sortem seu expectationem pervenire, aequa conditione certans.*"

[8] Dans le texte hollandais : "*Als ick gelijcke kans hebbe om a of b te hebben, dit is my so weel weerdt als (a+b)/2.*" Dans le texte latin : "*Si a vel b expectem, quorum utrumvis aeque facile mihi obtingere possit, expectatio mea dicenda est valere (a+b)/2.*"

donc 2x-a = b, d'où je tire la valeur de ma chance x = (a+b)/2. La preuve en est aisée. En effet, possédant (a+b)/2, je puis hasarder cette somme contre un autre joueur qui mettra également (a+b)/2, et convenir avec lui que le gagnant donnera a à l'autre. J'aurai de sorte une chance égale d'avoir a si je perds, ou b si je gagne ; car dans ce dernier cas j'obtiens l'enjeu a+b et je lui en donne a.

En chiffres. Lorsque j'ai une chance égale d'avoir 3 ou d'avoir 7, la valeur de ma chance est 5 d'après cette proposition ; et il est certain qu'ayant 5 je puis me procurer de nouveau la même chance. En effet, si je joue 5 contre une autre personne dont la mise est également 5, à condition que le gagnant donnera 3 à l'autre, c'est là un jeu équitable, et il est évident que j'ai la même chance d'avoir 3 en perdant, ou d'avoir 7 en gagnant ; car en ce cas j'obtiens 10, dont je lui en donne 3. "

On voit ici à l'oeuvre le principe de réversibilité de Huygens : il faut inventer un autre jeu, équitable, dont la mise doit être telle qu'elle donne la même "chance", c'est-à-dire le même catalogue des gains possibles que le jeu initial. Huygens procède en trois temps : il fait d'abord l'analyse algébrique, en posant x la valeur recherchée de la chance, puis en écrivant une équation permettant de calculer x ; il fait la synthèse en vérifiant que la valeur trouvée par l'analyse convient ; enfin il donne un exemple "en chiffres". On peut noter ici que, si l'énoncé est tout à fait semblable à celui de Pascal dans son *Usage du triangle arithmétique pour déterminer les partis qu'on doit faire entre deux joueurs qui jouent en plusieurs parties*, la démonstration est algébrique, donc plus générale, comme on le voit avec les deux propositions suivantes. Il reste que le principe fondamental de Huygens est que l'espérance de gain dans un jeu est la mise que l'on doit payer pour entrer dans un jeu équitable, donnant les mêmes résultats[9]

La proposition II formule que :

[9] Ce principe est à la fois simple et obscur - car très puissant. En témoigne le désir de Bernoulli de l'éclaircir dans l'Ars conjectandi : "*je tâcherai de le démontrer par un raisonnement plus familier et plus à la portée de tout le monde, en partant seulement de cet axiome ou de cette définition : que chacun doit attendre ou est supposé devoir attendre ce qu'il obtiendra infailliblement.*" Bernoulli ajoute, plus loin : "*le mot attente ne doit pas se prendre ici dans le sens ordinaire, selon lequel attendre ou espérer se rapporte à l'événement le plus favorable, quoique le contraire puisse arriver ; mais on doit entendre par ce mot l'espérance que nous avons d'obtenir le meilleur, tempérée et diminuée par la crainte du pire ; de sorte que la valeur de notre attente signifie toujours quelque chose d'intermédiaire entre le meilleur que nous espérons et le pire que nous craignons.*"

"*Avoir des chances égales d'obtenir a, b ou c me vaut (a+b+c)/3.* "

La démonstration est du même type que la précédente, en faisant intervenir deux autres adversaires. Elle se termine par une généralisation à n issues équiprobables, dont l'espérance est la moyenne arithmétique des gains associés.

La proposition III est la suivante :

"*Avoir p chances d'obtenir a et q d'obtenir b, les chances étant équivalentes, me vaut (pa+qb)/(p+q).* "[10]

En voici la démonstration :

"*Pour découvrir cette règle, appelons de nouveau* x *la valeur de ma chance. Il faut donc que possédant x, je puisse rentrer dans mon premier état par un jeu équitable. A cet effet je prends un nombre de joueurs tel qu'avec moi il y en a p+q en tout, dont chacun met x, de sorte que l'enjeu total sera px+qx ; chacun joue pour son propre compte avec une même chance de gagner. Supposons en outre qu'avec q joueurs, c'est-à-dire avec chacun d'eux en particulier, je fasse cette convention que si l'un d'eux gagne la partie, il me donnera la somme b, et que si moi je gagne, je lui donnerai la même somme. Supposons enfin qu'avec les p-1 joueurs qui restent, ou plutôt avec chacun d'eux en particulier, je fasse la convention que si l'un d'eux gagne la partie, il me donnera la somme a, et que je lui donnerai également la somme a si c'est moi qui gagne la partie. Il est évident qu'à ces conditions le jeu est équitable, attendu que les intérêts d'aucun joueur ne se trouve lésés. On voit de plus que j'ai maintenant q chances d'obtenir b, p-1 d'obtenir a et une chance (au cas où c'est moi qui gagne) d'avoir px+qx-bq-ap+a ; en effet, dans ce dernier cas je reçois l'enjeu px+qx dont je dois céder b à chacun des q joueurs et a à chacun des p-1 joueurs, ce qui fait en tout qb+pa-a. Or, si px+qx-bq-ap+a était égal à a, j'aurais p chances d'avoir a (car j'avais déjà p-1 chances d'obtenir cette somme) et q chances d'avoir b ; je serais donc revenu à mes chances premières. Je pose donc px+qx-bq-ap+a = a, et je trouve x = (ap+bq)/(p+q) pour la valeur de ma chance, conformément à l'énoncé.*"

[10] Dans le texte hollandais : "*Als het getal der kanssen die ick hebbe tot a is p, ende het getal der kanssen die ick tot b heb is q ; nemende altijdt dat ieder kans even licht kan gebeuren : Het is my weerdt (pa+qb)/(p+q).*"

Suit un exemple "en chiffres" : si l'on a la "chance" (au sens de liste des résultats) d'avoir 3 chances de gagner 13 et 2 chances de gagner 8, la valeur de cette chance est 11 d'après la proposition. En effet, soit un jeu à 5 (avec donc 4 autres joueurs), chacun misant 11, le gagnant équiprobable ramassant la mise, je conviens avec chacun des deux premiers joueurs que, si lui gagne il me donnera 8, et si je gagne je lui donnerai 8 ; je conviens avec chacun des deux autres joueurs que, s'il gagne il me donnera 13 et si je gagne je lui donnerai 13. Ce jeu sera équitable. J'ai 2 chances d'obtenir 8, 2 chances d'obtenir 13, et une chance (quand je gagne) d'obtenir l'enjeu 55-16-26 = 13. J'ai donc le même tableau de résultats qu'avec le jeu initial, dans lequel la valeur de ma chance est la mise du deuxième jeu, soit 11.

La règle de Huygens est donc tout à fait générale et peut être présentée de la manière suivante : un individu est dans une situation de jeu indéterminé - il n'y a pas d'adversaire désigné, ce peut être une loterie. La situation est interprétée comme un jeu à n personnes (n étant le nombre total de chances du jeu initial), chacun misant la même somme, avec une règle du jeu - d'échanges entre les joueurs - telle que la table des gains du nouveau jeu soit la même que celle du premier jeu. Si la règle est symétrique, le jeu est déclaré équitable, et la valeur de la chance du premier jeu, l'espérance de gain, est la valeur de la mise pour entrer dans le deuxième jeu. On en déduit une équation, permettant de calculer cette valeur.

Muni de ces propositions de base, Huygens peut maintenant aborder les problèmes de partis et ceux des dés.

3. **Les partis.**

La deuxième partie du traité est consacrée aux problèmes de partis. La méthode est fondée sur les propositions précédentes (essentiellement I et II). Huygens remarque d'abord que ce sont les parties manquantes qui importent, puis qu'il faut commencer par les cas les plus simples, enfin qu'il faut regarder à un moment donné de la partie ce qui se passerait au coup suivant. Le point crucial est l'affirmation que le partage de l'enjeu doit se faire dans le rapport des valeurs des chances - des espérances - de chacun des joueurs, puisque ce sont les valeurs de reprise du jeu par quelqu'un d'autre. D'autre part, Huygens étend le champ d'application des propositions initiales aux cas où l'on connaît non les gains effectifs dans les différentes éventualités, mais les espérances de gain de ces diverses possibilités. La méthode de Huygens est donc essentiellement la

première méthode de Pascal, indiquée dans la correspondance avec Fermat, ou au début de l'*Usage*.... L'avantage de Huygens vient d'une définition plus opérante de l'espérance, et des règles de calcul, ainsi que de la possibilité de l'étendre à plus de deux joueurs. En revanche, Huygens, qui ne connaît pas le *Traité du triangle arithmétique*, n'envisage pas de chercher une formule générale.

L'argumentation, dans chacun des cas évoqués, peut être décrite ainsi : si on note A(p,q) la valeur de la chance du premier joueur, quand il lui manque p parties et qu'il en manque q à son adversaire, on a d'après la proposition I, A(p,q) = (A(p-1,q)+A(p,q-1))/2. Cette formule de récurrence permet de se ramener à des cas simples comme A(0,q) = a et A(p,p) = a/2, si a est l'enjeu total.

Dans le cas de trois joueurs, on a, d'après la proposition II, et en reprenant les mêmes notations,

A(p,q,r) = (A(p-1,q,r)+A(p,q-1,r)+A(p,q,r-1))/3.

La proposition IV donne ainsi : A(1,2) = 3a/4. La proposition V donne : A(1,3) = 7a/8 et A(1,4) = 15a/16[11]. La proposition VI donne : A(2,3) = 11a/16. La proposition VII donne : A(2,4) = 13a/16.

La proposition VIII aborde le cas de trois joueurs et donne : A(1,1,2) = 4a/9. Enfin la proposition IX décrit la méthode générale. En voici l'énoncé :

"*Pour calculer la part de chacun d'un nombre donné de joueurs, auxquels manquent des parties en nombres donnés pour chacun d'eux séparément, il faut d'abord se rendre compte de ce qui reviendrait à celui dont on veut savoir la part dans le cas où lui et dans ceux où chacun des autres à son tour aurait gagné la première partie suivante. En ajoutant toutes ces parts et en divisant la somme par le nombre des joueurs on trouve la part cherchée du joueur considéré.* "

En suivant cette méthode, Huygens construit, de proche en proche, un tableau, où l'on peut retrouver le cas étudié par Fermat et Pascal en 1654 (1.2.2 avec le parti 17.5.5).

4. **Les dés.**

La troisième partie du traité est consacré aux problèmes de dés. Dans une courte introduction, Huygens décrit le nombre d'issues

[11] Il s'agit de l'exemple proposé par Pacioli.

possibles en lançant un dé (6), deux dés (36) et trois dés (216). Il indique enfin le nombre de coups différents qui permettent d'obtenir une somme donnée, pour le lancer de deux dés, puis de trois. Les propositions X à XII consistent à chercher combien de lancers il faut faire pour avoir un avantage - c'est-à-dire une probabilité supérieure ou égale à 0,5 - dans la recherche d'un événement donné. Cela revient à calculer l'espérance de gain dans différents cas, en augmentant le nombre de lancers, et en réutilisant les résultats précédents à l'aide de la proposition III.

La proposition X étudie ainsi "*en combien de fois on peut accepter de jeter un six avec un dé* ". Huygens trouve ainsi, qu'en un lancer, le rapport des espérances est de 1 contre 5, en deux lancers, de 11 contre 25, en trois lancers, de 91 contre 125, en quatre lancers, de 671 contre 625 - c'est donc à partir de quatre lancers qu'on a l'avantage -, etc...

La proposition XI étudie le même problème dans la recherche de deux six en lançant deux dés. En un lancer, le rapport des espérances est de 1 contre 35, en deux lancers, de 71 à 1225. Puis Huygens saute au cas de quatre lancers, avec un rapport de 178991 à 1500625, de huit, puis seize, puis vingt-quatre, où il trouve finalement qu'il y encore un léger désavantage, "*et qu'on ne peut accepter la partie avec avantage qu'en jouant en 25 coups au moins* ". On retrouve là, exactement, la situation proposée par le Chevalier de Méré à Pascal.

La proposition XII recherche, maintenant, "*le nombre de dés avec lequel on peut accepter de jeter 2 six du premier coup* ". Cela revient à chercher combien de fois il faut lancer un dé, pour avoir un avantage d'obtenir au moins 2 six. Huygens étudie successivement le cas de deux lancers, où le résultat est de 1 contre 35 d'après la proposition XI, puis le cas de trois lancers, où l'on a, en étudiant le résultat du dernier lancer, 5 chances de ne pas avoir un six, et donc de se retrouver dans le cas précédent, et 1 chance d'avoir un six, et donc de rechercher au moins un six sur les deux premiers lancers, ce qui a été étudié à la proposition X. En appliquant la proposition III, Huygens trouve ainsi une espérance de gain de 2a/27, c'est-à-dire un rapport de 2 à 25. En " *prenant ainsi chaque fois un coup de plus, on trouve qu'on peut accepter avec avantage de jeter 2 six avec un dé en 10 coups ou avec 10 dés en un coup* ".[12]

[12] Le rapport des chances est en effet dans ce cas de 31169301 à 29296875.

Les deux dernières propositions abordent, enfin, le problème de la primauté. La proposition XIII étudie d'abord un cas simple, fini :

"*Dans l'hypothèse que je joue un coup de deux dés contre une autre personne à condition que s'il vient 7 points, j'aurai gagné, mais qu'elle aura gagné s'il en vient 10, et que nous partagerons l'enjeu en parties égales s'il vient autre chose, trouver la part qui revient à chacun de nous*".

D'après le préliminaire de cette partie, on sait qu'en lançant deux dés, 6 coups donnent une somme égale à 7, 3 coups donnent une somme égale à 10 et 27 coups donnent une somme différente. Il y a donc trois issues, dont on connaît le nombre de chances et qui rapportent respectivement a, 0, a/2, où a est l'enjeu. Huygens peut alors conclure en appliquant deux fois la proposition III :

"*j'ai 6 chances de gagner, c'est-à-dire d'avoir* a, *et 3 chances de perdre, c'est-à-dire d'avoir 0 ; ce qui d'après la troisième proposition me vaut* 2a/3 *pour ce cas. J'ai donc au commencement 27 chances d'avoir* a/2 *et 9 chances d'avoir* 2a/3 *; ce qui d'après la troisième proposition me vaut* 13a/24. *Et il reste* 11a/24 *pour l'autre joueur.*"

La proposition XIV est fort intéressante, puisqu'elle envisage, pour la première fois, un jeu éventuellement infini. En voici l'énoncé et la démonstration :

"*Si un autre joueur et moi jettent tour à tour 2 dés à condition que j'aurai gagné dès que j'aurai jeté 7 points et lui dès qu'il en aura jeté 6, tandis que je lui laisse le premier coup, trouver le rapport de ma chance à la sienne.*

Soit x la valeur de ma chance, et a l'enjeu. La chance de l'autre joueur a donc la valeur a-x. Il est évident aussi que chaque fois que c'est son tour de jeter, ma chance aura de nouveau la valeur x. Mais chaque fois que c'est mon tour de jeter, ma chance doit avoir une valeur supérieure, mettons y. Or, attendu que parmi les 36 coups qu'on peut faire avec 2 dés, il y en a 5 qui peuvent donner 6 points à mon adversaire et lui faire gagner la partie, et 31 coups à son désavantage, c'est-à-dire qui amènent mon tour de jeter, j'ai 5 chances d'avoir 0 lorsqu'il jette la première fois, et 31 chances d'avoir y ; ce qui d'après la troisième proposition, me vaut 31y/36. Mais nous avons posé que ma chance valait x au commencement du jeu. De sorte que 31y/36 = x, partant y = 36x/31. Nous avons posé en outre que ma chance vaut y, lorsque c'est mon tour de jeter. Mais *lorsque je jette, j'ai 6 chances d'avoir a, attendu qu'il y a 6 coups de 7 points qui me font gagner ; et j'ai 30 chances de faire revenir le tour à mon adversaire, c'est-à-dire d'avoir ma part x. La valeur y est donc équivalente à 6 chances d'avoir a et 30 chances d'avoir x ; ce qui, d'après la troisième proposition, me vaut (6a+30x)/36. Cette expression étant donc égale à y, et y d'après ce qui précède à 36x/31, il faut que (30x+6a)/36 soit égal à 36x/31, d'où l'on tire x = 31a/61 ; valeur de ma chance. Par conséquent, la chance de mon adversaire vaudra 30a/61. Le rapport de nos chances est donc de 31 à 30."*

Comme on le voit, l'infinité éventuelle du jeu n'apparaît pas, elle est masquée par une démonstration qui revient en fait à n'étudier que les deux premiers coups, en admettant qu'on se retrouve après dans la situation antérieure. Cela suppose l'indépendance des tirages et donc l'absence de mémoire de la situation. Huygens peut faire son calcul en faisant l'hypothèse de l'existence de l'espérance (qui mérite, ici, démonstration) d'après son premier principe. L'hypothèse suivante - l'espérance de l'autre joueur en fonction de la mienne - suppose que la probabilité que le jeu ne finisse pas est nulle. Néanmoins, c'est par commodité que Huygens pose cette hypothèse. En effet, il pourrait faire un calcul semblable au sien pour le deuxième joueur. Tout le calcul repose donc sur cette unique hypothèse que "la valeur de ma chance a une valeur déterminée"[13].

Cette proposition avait l'objet d'une correspondance entre Huygens et Roberval. Huygens avait posé la question dans une lettre du 18 avril 1656. En l'absence d'une réponse, Huygens pose le même problème à Mylon en mai 1656. Ce dernier transmet l'énoncé à Fermat et Pascal. Le 22 juin 1656, Carcavi fait part à Huygens du

[13] En termes modernes, une démonstration pourrait être la suivante : on note A_n l'événement "je gagne à mon nième coup". Vu l'indépendance des tirages, la probabilité de A_n est $p(A_n) = (31/36)^n.(30/36)^{n-1}.(6/36)$. En effet, si je gagne à mon nième coup, c'est que mon adversaire a perdu ses n premiers coups, que j'ai perdu à mes n-1 coups précédents et que j'ai gagné à mon nième coup. L'événement A : "je gagne" est la réunion disjointe et dénombrable des événements A_n, pour n allant de 1 à l'infini. La probabilité de A est donc, si elle existe, la somme de la série de terme général $p(A_n)$. Or il s'agit d'une série géométrique de raison $(31.30)/36^2$, qui converge donc. D'où $p(A) = (6/36).(31/36).1/(1 - 31.30/36^2) = 31/61$. Ce qu'il fallait démontrer. On comparera cette démonstration avec celle de Huygens, plus élégante, même si elle est moins rigoureuse.

résultat trouvé par Fermat, que Huygens a le bonheur de trouver conforme au sien. Dans le même temps, Fermat transmet à Huygens des énoncés plus difficiles, qui feront l'objet des exercices I et III.

5. **Les exercices.**

Le premier des exercices laissés par Huygens à la sagacité de ses lecteurs est issu du dernier problème étudié. Il s'agit d'étudier la correction possible par le premier coup de l'avantage de la primauté, en ne faisant jouer au premier coup qu'un seul lancer, puis deux à tous les suivants :

"A et B jouent ensemble avec 2 dés à la condition suivante : A aura gagné s'il jette 6 points, B s'il en jette 7. A fera le premier en un seul coup ; ensuite B 2 coups successifs ; puis de nouveau A 2 coups, et ainsi de suite, jusqu'à ce que l'un ou l'autre aura gagné. On demande le rapport de la chance de A à celle de B ? Réponse : comme 10355 est à 12276."

La solution, ici relativement facile à trouver, peut se conduire exactement comme Huygens a traitée la dernière proposition. Ce problème, comme les suivants, suscitera un certain nombre de solutions avant la fin du siècle, ou au tout début du suivant : Montmort, Bernoulli[14], Struyck et aussi Spinoza - dans un court opuscule[15] publié en 1687 avec le *Traité de l'Arc en ciel.*

Le deuxième problème est plus difficile à interpréter :

"Trois joueurs A, B et C prennent 12 jetons dont 4 blancs et 8 noirs ; ils jouent à cette condition que celui gagnera qui aura le premier, en choisissant à l'aveuglette, tiré un jeton blanc, et que A choisira le premier, B ensuite, puis C, puis de nouveau A et, ainsi de suite, à tour de rôle. On demande le rapport de leurs chances " ?

Comme le remarquera Bernoulli, on peut interpréter l'énoncé avec des tirages avec ou sans remise, et une seule urne commune ou bien une urne personnelle par joueur (cette dernière distinction n'apporte pas de différence dans le cas de tirages avec remise). D'après sa correspondance avec Hudde, on peut penser que Huygens avait en tête des tirages répétés avec remise du jeton tiré dans l'urne.

[14] Bernoulli donne, comme pour la proposition XIV, la méthode "algébrique" de Huygens, et une méthode "sans analyse" qui consiste à sommer une série géométrique.
[15] SPINOZA Baruch, Calcul des chances, in Les écrits scientifiques de Spinoza, Cahiers Spinoza, 1985.

En suivant, par exemple, la méthode "algébrique" de Huygens, on trouve dans ce cas que les "chances" des trois joueurs sont respectivement proportionnelles à 9, 6 et 4[16].

Le troisième problème, dû à Fermat, aborde un contexte ludique différent, celui des cartes à jouer :

"A parie contre B, que de 40 cartes, dont dix de chaque couleur, il en tirera 4 de manière à en avoir une de chaque couleur. On trouve dans ce cas que la chance de A est à celle de B comme 1000 est à 8139. "

Le quatrième problème peut, comme le deuxième, être interprété de deux manières, suivant que les tirages se font avec ou sans remise :

"On prend comme plus haut 12 jetons dont 4 blancs et 8 noirs. A parie contre B que parmi 7 jetons qu'il en tirera à l'aveuglette, il se trouvera 3 blancs. On demande le rapport de la chance de A à celle de B."

Dans sa correspondance avec Hudde sur ce problème, Huygens précisera son énoncé en complétant la condition "3 blancs" par "et pas plus". Il donne alors la solution suivante pour le rapport des "chances" de A et B : comme 35 est à 64. Ce qui indique qu'il envisageait un tirage sans remise ou simultané[17].

Le dernier problème, enfin, présente la particularité d'aborder, pour la première fois les recherches sur la durée d'une partie, et la ruine éventuelle d'un joueur. Il avait été proposé par Pascal à Fermat, et Huygens en avait eu connaissance par Carcavi. En voici l'énoncé :

"Ayant pris chacun 12 jetons, A et B jouent avec 3 dés à cette condition qu'à chaque coup de 11 points, A doit donner un jeton à B, mais que B en doit donner 1 à A à chaque coup de 14 points, et que celui-là gagnera qui sera le premier en possession de tous les jetons. On trouve dans ce cas que la chance de A est à celle de B comme 2441406625 est à 282429536481. "

---

[16] Bernoulli démontre que dans le cas où les tirages se font sans remise, dans une urne commune, le rapport est 77, 53, 35. Si les tirages se font sans remise, dans une urne personnelle par joueur, il trouve un rapport de 26851, 11270, 4754.

[17] Dans le cas du tirage avec remise, le rapport est de 560 à 1627.

Il s'agit là d'un problème plus délicat. Huygens explicitera sa solution dans une réponse[18] à Dierkens en 1676. Le raisonnement de Huygens peut être modernisé ainsi : on décrit la situation à un moment du jeu par un couple (a,b), a et b représentant des points attribués à chaque joueur de la manière suivante. A chaque coup favorable, le joueur retire un point à son adversaire s'il en a, sinon il s'en marque un de plus. Les joueurs commencent à (0,0) et le gagnant est le premier à obtenir un total donné n (ici n = 12). On note c le nombre de chances qui font gagner A (ici c=15) et d le nombre de chances qui font gagner B (ici d=27). A partir de la situation (a,b), on a donc trois possibilités :

* ou bien A gagne (c chances) et on arrive à la situation (a,b-1), si b est différent de 0, ou à (a+1,b) si b = 0.
* ou bien B gagne (d chances) et on arrive à la situation (a-1,b), si a est différent de 0, ou à (b+1,a) si a = 0.
* ou bien personne ne gagne et on reste dans la même situation.

Dans le cas où il faut 2 points pour gagner, Huygens note x, y et z les espérances de gain du joueur A respectivement dans les cas suivants (0,0), (1,0) et (0,1). Par les règles, maintenant connues du lecteur, du calcul des chances, on a : $y = (c+dx)/(c+d)$, $z = cx/(c+d)$ et $x = (cy+dz)/(c+d)$ (on a supposé l'enjeu égal à 1). D'où l'on tire $x = c^2/(c^2+d^2)$. Les chances des deux joueurs sont donc dans le rapport de c^2 à d^2. Huygens passe ensuite au cas où il faut 4 points pour gagner. En utilisant le résultat précédent, on trouve[19] que les chances sont dans le rapport de c^4 à d^4. Par un calcul un peu plus compliqué, mais du même type, il trouve[20] aussi le résultat dans le cas où il faut 3 points pour gagner : c^3 à d^3. En combinant tous ces cas, on arrive évidemment à un rapport de c^{12} à d^{12}, dans le cas proposé où il faut 12 points pour gagner. Ce qui permet de trouver le résultat annoncé, dans le cas où c = 15 et d = 27.

---

[18] Ce texte figure, en latin, dans les *Oeuvres complètes* de Huygens comme l'appendice VI au traité sur les jeux de hasard.

[19] On a donc, en deux coups, c^2 cas qui font passer de (0,0) (avec une espérance notée x) à (2,0) (avec y comme espérance), et d^2 cas qui amènent (0,2) (espérance z). A partir de (2,0), toujours en deux coups, c^2 cas donnent (4,0) donc le gain, et d^2 cas donnent (0,0) donc x. De même pour (0,2). D'où : $y = (c^2+d^2x)/(c^2+d^2)$, $z = c^2x/(c^2+d^2)$ et enfin $x = (c^2y+d^2z)/(c^2+d^2)$. D'où l'on tire : $x = c^4/(c^4+d^4)$.

[20] En un coup, à partir de (0,0) (espérance x), on c cas pour (1,0) (espérance y), et d cas pour (0,1) (espérance z). En deux coups, à partir de (1,0), on a c^2 cas qui donnent (3,0) (gain) et d^2 cas qui donnent (0,1) (z). De même, à partir de (0,1), c^2 cas pour (1,0) (y) et d^2 cas pour (0,3) (perte). D'où les équations suivantes : $y = (c^2+d^2z)/(c^2+d^2)$, $z = c^2y/(c^2+d^2)$, $x = (cy+dz)/(c+d)$. Finalement : $x = c^3/(c^3+d^3)$.

Huygens a évidemment l'idée inductive de la généralisation à p jetons : rapport c^p à d^p. Mais il n'en trouve pas de démonstration. Montmort traite le problème donné à l'aide de 22 équations linéaires. De Moivre a l'idée ingénieuse d'affecter une valeur aux jetons pour que le jeu devienne équitable, ce qui lui permet un calcul plus simple. Enfin, Struyck donne en 1716 une démonstration "moderne" en considérant la relation de récurrence portant sur la suite des espérances de gain du joueur possédant un nombre donné de jetons[21].

6. Croix ou pile.

Avant de conclure, il peut être utile d'étudier un autre exemple tiré de sa correspondance, où Huygens utilise plus explicitement le recours à l'infini. En effet, à propos des cinq derniers exercices comme sur d'autres problèmes, Huygens a continué à travailler dans le domaine des probabilités, mais sans publication officielle. Il s'agit de lettres échangées, souvent avec Hudde, ou bien avec son frère Louis.

Le problème suivant a été posé par Huygens à Hudde dans une lettre du 4 avril 1665. Après divers échanges, la solution de Huygens date de juillet 1665. Elle est reproduite dans les *Oeuvres Complètes* en appendice V au traité de Huygens. L'énoncé est le suivant :

"*A joue croix ou pile contre B ; les deux joueurs jettent tour à tour à condition que celui qui amène pile mettra chaque fois un ducat, mais qui jette croix prendra tout ce qui est mis ; et A jettera le premier, alors qu'on n'a encore rien mis. Et il est entendu que le jeu ne finira pas avant que quelque chose ait été mise, et enlevée.* "

[21] Cette démonstration peut être présentée ainsi : soit E_n l'espérance de gain du joueur quand il possède n jetons. S'il possède p jetons, au début du jeu, on a : $E_0 = 0$, $E_{2p} = 1$, et on cherche E_p. On trouve, comme Huygens que : $(c+d).E_n = c.E_{n+1} + d.E_{n-1}$, avec les mêmes notations que dans les notes précédentes. La suite des E_n est donc une suite récurrente linéaire d'ordre 2. Son équation caractéristique : $c.r^2 - (c+d).r + d = 0$, admet comme racines $r = 1$ et $r = d/c$, racines distinctes si c est différent de d. On a alors : $E_n = u + v.(d/c)^n$. u et v sont calculés à partir des conditions : $E_0 = 0$, $E_{2p} = 1$ d'où $u = c^{2p}/(c^{2p}-d^{2p})$ et $v = -u$. Finalement, l'espérance cherchée, $E_p = c^p/(c^p+d^p)$. Ce qui permet de conclure.

La difficulté vient ici du fait que, d'une part, le jeu ne peut s'arrêter que si la mise est différente de 0, autrement dit il faut que quelqu'un ait perdu avant de pouvoir gagner. D'autre part, le gain du gagnant dépend du nombre de parties perdues auparavant. Il s'agit donc ici d'un "vrai" calcul d'espérance, et non de l'évaluation de la probabilité de gain d'un enjeu fixe au cours de la partie. Huygens note a l'espérance de perte du joueur qui doit jeter la pièce alors que l'enjeu est encore nul - on peut penser, en effet, que l'espérance de gain du premier joueur est négative. On note (p,q) la situation : le premier joueur a mis p, et le second a mis q - c'est-à-dire le premier a perdu p fois, et le second q fois. -a est donc l'espérance dans le cas (0,0). De même, Huygens note respectivement b, c, d, e, f, g, h, i, k les espérances du premier joueur dans les situations (0,1), (1,1), (1,2), (2,2), (2,3), (3,3), (3,4), (4,4), (4,5). Par symétrie du jeu, on a ainsi les espérances de l'autre joueur au même moment, ou dans les cas (p,q) avec p > q. Par exemple, l'espérance du premier joueur en (1,0) est -b. A partir de (0,0), on a 1 chance de rester à (0,0) et 1 chance d'avoir (1,0). Donc $-a = (a-b)/2$. De même : $b = (1-c)/2$, $c = (1-d)/2$, $d = (2-e)/2$, $e = (2-f)/2$, $f = (3-g)/2$, $g = (3-h)/2$, $h = (4-i)/2$, $i = (4-k)/2$. En combinant toutes ces équations, on a :

$$-a = \frac{a}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{8} - \frac{2}{16} + \frac{2}{32} - \frac{3}{64} + \frac{3}{128} - \frac{4}{256} + \frac{4}{512} - \frac{k}{512}.$$

Huygens signale ici que la dernière quantité de cette somme (k/512) tend vers zéro, car on a successivement b < 1, d < 2, f < 3, k < 5, mais que les dénominateurs sont respectivement 2, 4, 8, 16, etc... En effet, Huygens veut montrer qu'il faut continuer la somme jusqu'à l'infini, et qu'on a donc :

$$-a = \frac{a}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{8} - \frac{2}{16} + \frac{2}{32} - \frac{3}{64} + \frac{3}{128} - \frac{4}{256} + \frac{4}{512} - \frac{5}{1024} \text{ etc...}$$

Huygens sépare ensuite cette somme infinie en deux sommes suivant le signe des termes. D'abord la somme des termes affectés d'un signe positif est la moitié de la somme des termes affectés d'un signe négatif. Ensuite il présente cette dernière somme sous la forme :

$$\begin{array}{r} 1/4 + 1/16 + 1/64 + 1/256 + 1/1024 + \dots \\ 1/16 + 1/64 + 1/256 + 1/1024 + \dots \\ 1/64 + 1/256 + 1/1024 + \dots \\ 1/256 + 1/1024 + \dots \\ 1/1024 + \dots \\ \dots\dots\dots\dots \end{array}$$

Les lignes sont des sommes de séries géométriques de raison 1/4, et sont respectivement égales à (1/4).(4/3), (1/16).(4/3), (1/64).(4/3), etc... La somme de toutes ces lignes vaut donc (1/4 + 1/16 + 1/64 + ...).(4/3) c'est-à-dire 4/9, pour les mêmes raisons. Finalement, on a :
-a = a/2 - 4/9 + (1/2).(4/9), d'où a = 4/27. *"Il s'ensuit que A, qui jette le premier, perd 4/27 d'un ducat. "*

Aux débuts du calcul des probabilités, l'apparition de l'infini paraît donc très discrète dans ces premières études d'espaces probabilisés infinis. Le fait que les jeux puissent se perpétuer un nombre infini de fois, ne paraît pas poser de réels problèmes, même si les objections sur la fiction de telles suppositions peuvent ressembler aux argumentations contemporaines contre les fictions infinitésimales. L'infini, chez Huygens, n'apparaît réellement que dans les calculs de sommation de sommes géométriques, ou dérivées. C'est dans cette voie que vont s'engager les successeurs de Huygens au début du 18ème siècle entraînés par le calcul infinitésimal vers la loi des grands nombres. On connaît par ailleurs l'importance des sommations dans le renouveau de l'analyse, un siècle plus tard.

Par ailleurs, on peut noter que le concept opératoire d'espérance, que Huygens a défini et explicité, va se trouver confronté à une application délicate : celle des calculs de durées de vie, où Huygens sera amené à faire la différence entre espérance-moyenne et médiane-valeur d'égale probabilité[22].

Nous conclurons, comme nous avons commencé, avec Leibniz, qui avait bien compris l'importance du nouveau calcul. La confiance dans ses méthodes et ses résultats, à peine ébauchés, est telle qu'il convoque la théorie du hasard, au secours de l'algèbre défaillante, pour régler le cas de la série divergente 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - ... Les sommes partielles avec un nombre pair de termes valent 0, et celles qui ont un nombre impair de termes valent 1. D'après Leibniz, cette série doit, en toute justice, valoir 1/2, puisque *"les prérogatives du pair et de l'impair se confondent, et l'un et l'autre ont exactement la même raison d'être, nous obtenons par conséquent (0+1)/2 = 1/2"* [23].

---

22 Cf. notre article *L'espérance du Hollandais*, SCHOLIES n°16, 1993 et MEUSNIER Norbert, *Un modèle mathématique de calcul de la valeur des événements incertains*, Actes du colloque inter-IREM, Les mathématiques dans la culture d'une époque, Strasbourg 1987.

23 G.W. LEIBNIZ, *Epistola ad V. Cl. Christianum Wolfium*, professorem matheseos halensem, circa scientiam infiniti, Acta eruditorum 1713, traduction française, Lettre au célèbre Christian Wolff, Professeur de mathématiques à Halle, sur la science de l'infini, in Naissance du calcul différentiel, trad. M. Parmentier, Vrin, 1989.

BIBLIOGRAPHIE

COUMET Ernest, *La théorie du hasard est-elle née par hasard ?*, Annales ESC, mai-juin 1970.

COUMET Ernest, *Sur "Le calcul ès jeux de hasard" de Huygens : dialogues avec les mathématiciens français (1655-1657)*, in Huygens et la France, Vrin, 1981.

DASTON Lorraine, *L'interprétation classique du calcul des probabilités*, Annales ESC, mai-juin 1989.

DAVID F.N., *Games, gods and gambling*, Londres, 1962.

FREUDENTHAL Hans, *Huygens'foudations of probability*, Historia mathematica, 7, 1980.

HUYGENS Christian, *Oeuvres Complètes Christiaan Huygens, publiées par la Société Hollandaise des Sciences*, La Haye, Martinus Nijhoff, 1888-1950, principalement tomes IV et XIV.

PASCAL Blaise, *Oeuvres complètes*, L'Intégrale, Seuil.

* * * * *