

*Sur la robe de la Mélancolie II***LA NOTION DE « POINT DE FUITE »
COMME OBSTACLE EPISTEMOLOGIQUE**Philippe LOMBARD
Irem de Lorraine

Jacob, quittant Bersabée, prit la route de Haran. Il arriva dans un endroit où il passa la nuit parce que le soleil était couché. Il se servit d'une des pierres qui étaient là pour en faire son chevet, et il s'endormit sur place. Il eut un songe : il voyait une échelle posée à terre, dont le sommet touchait le ciel ; le long de cette échelle, les anges de Dieu montaient et descendaient.

Genèse 28. 10-12.

Les colloques d'histoire et d'épistémologie des mathématiques ont un charme très particulier que vous avez sans doute remarqué vous aussi : on n'y trouve jamais vraiment ce que l'on y est venu chercher...

Le risque est grand, en effet, d'en repar-tir avec de tout autres centres d'intérêts que ceux qui vous y auront amenés et vous auront guidés dans le choix des différents exposés ou ateliers. Ici, au vu d'un titre alléchant, vous vous attendrez à une réflexion philosophique et vous vous trouverez confrontés à d'inextricables questions d'éditions anciennes que vous auriez voulu croire réservées aux spécialistes... Là, vous espérez au contraire un éclairage historique sur une question élémentaire et vous vous verrez asséner un impitoyable exposé mathématique de tous les arcanes de la théorie... ; Ailleurs, goûtant par avance l'occasion d'apprendre — et de comprendre — un point délicat de doctrine, vous sentirez peu à peu s'obscurcir vos certitudes les mieux établies dans les méandres forcément imprévisibles d'une genèse progressive.

C'est que l'histoire, l'épistémologie et les mathématiques constituent un "coquetècle de drogues dures" particulièrement difficile à réussir ! Et encore : à la condition de s'entendre sur ce que doit recouvrir exactement chacun de ces trois termes. Car — on l'aura compris — si rien n'est plus simple que de tomber d'accord sans trop d'ambiguités sur les champs respectifs accordés à l'histoire et aux mathématiques en matière d'histoire des mathématiques, il est loin d'en aller pareillement dès qu'il s'agit d'épistémologie des mathématiques. Comme si le champ dévolu à l'épistémologie était par lui-même condamné, pour longtemps encore, à échapper à toute définition satisfaisante.

Si l'on en croit les dictionnaires, le problème est pourtant simple : chargée de préciser l'origine, la portée et la valeur des connaissances, l'épistémologie n'est rien moins que *théorie de la connaissance*... Autant dire : *connaissance de la connaissance*.

Peut-être y a-t-il là de quoi réjouir le philosophe ? L'ennui pour le mathématicien rési-

de précisément dans cette définition impossible, de laquelle il ne saurait manquer longtemps de rapprocher la kyrielle de paradoxes attachés depuis belle lurette à l'idée d'un ensemble qui devrait se contenir lui-même, ou à celle de l'ensemble des ensembles ; donc à cette notion d'une connaissance chargée de s'expliquer elle-même !

Prisonnier d'une telle contradiction, l'épistémologie n'a plus qu'à réduire ses ambitions, qu'à relativiser son propos. Il ne lui reste qu'à fustiger les errements de jadis au nom des certitudes d'aujourd'hui, à s'attendrir sur les balbutiements de l'histoire, à s'extasier devant la clairvoyance ou la modernité de quelques grands hommes.

En suivant un invisible fil d'Ariane qui — pour lui — donne un sens au progrès, l'épistémologue est condamné à survoler en dilettante les œuvres du passé...

Là où l'historien traquera les subtilités de traduction, il ne remarquera le plus souvent que des images isolées, convulsives, qui font affleurer — à la manière d'un célèbre *point de capiton* — les manifestations d'un contenu latent de la science d'une époque. Là où l'historien s'inquiétera sur tout de cerner des priorités dans les

diverses découvertes, il ne retiendra que les grandes lignes d'un *inconscient scientifique* dont l'unité seule lui paraît importante.

Quitte donc, à décevoir les fêrus d'histoire ou de rigueur mathématique — s'ils se souviennent encore de ce qu'ils y sont venus chercher... — cet exposé vous propose une flânerie aux sources de la géométrie de l'espace... A l'époque où on ne la considère pas encore comme projective ; dans le court laps de temps, qui va de 1400 à 1600, où elle peut encore paraître réservée aux architectes et aux peintres ; avant Viète, avant Descartes, avant Copernic, avant la Renaissance proprement scientifique qui va ensuite bouleverser la pensée occidentale.

Et comme il convient aussi de faire ici un peu d'épistémologie, je commencerai par rappeler succinctement les bases d'une modélisation possible de la notion d'obstacle épistémologique, puis je reviendrai sur quelques points d'histoire qui ont marqué la découverte de la perspective fuyante. Je m'intéresserai enfin à la nature de l'obstacle constitué par ce qu'il est désormais convenu de regarder comme une "actualisation de l'infini" et qui est entré dans les mœurs sous le nom de *point de fuite*.

PREMIERE PARTIE : éléments d'une épistémologie structurale

Lors d'un exposé au colloque de Lyon intitulé "la représentation en perspective comme obstacle épistémologique", j'ai présenté les grandes lignes d'une modélisation de certains obstacles rencontrés dans l'élaboration des connaissances mathématiques[1]. On peut dire, pour simplifier, que l'idée direc-

trice est fondée sur la notion de *singularité*, ou — si l'on préfère — sur une certaine interprétation du concept de *catastrophe*. Je vais en décrire ici le principe avant de l'illustrer sur un exemple qui touche de près à notre sujet, puis d'en développer certaines conséquences qui me seront utiles dans la suite.

a. Un germe d'obstacle

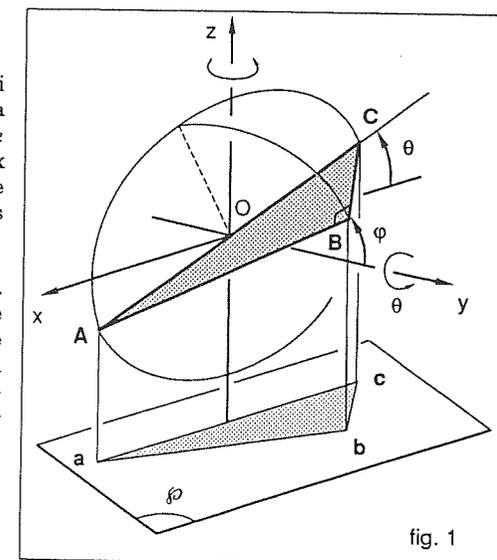
Pour comprendre l'idée de base qui pourrait à mon sens structurer ce que l'on a l'habitude de considérer comme un *obstacle à la vision claire d'une situation*, le mieux est sans doute de partir d'un exemple simple. En voici un, choisi — ce n'est pas complètement un hasard... — en géométrie.

Imaginez la configuration suivante (cf. fig 1) : on se donne une équerre ABC, isocèle et rectangle en B, que l'on suppose mobile dans l'espace. On s'intéresse à sa projection parallèle sur un plan quelconque ρ fixé. De façon plus précise, on cherche à déterminer l'angle \widehat{abc} , projeté de \widehat{ABC} , en fonction de la position de l'équerre dans l'espace.

Une analyse rapide vous convaincra vite que certains paramètres ont une influence triviale sur le résultat : les translations de l'équerre dans l'espace, ainsi que les rotations de celle-ci autour d'un axe perpendiculaire au plan ρ se traduisent de façon simple sans changer l'angle en b. En revanche, cet angle projeté dépendra essentiellement des rotations de l'équerre autour d'un axe horizontal ou autour de son hypoténuse AC.

Vous en viendrez donc, par exemple, à traduire la position de ABC dans un repère analogue à celui de la figure 1 et à paramétrer les positions de l'équerre par deux angles φ et θ exprimant les deux rotations successives qu'il suffit d'effectuer pour la faire passer d'une position horizontale à sa position la plus générale : rotation d'un angle φ autour de AC et rotation d'un angle θ autour d'un axe Oy perpendiculaire à AC et parallèle à ρ .

Après ces considérations, vous calculerez l'angle en b (ou plus simplement son



cosinus) en fonction des coordonnées des projections a, b, c de A, B, C ; c'est-à-dire en fonction de θ et φ .

Un calcul facile montre qu'en supposant $AC = 2$, on a :

$$\cos b = \frac{\sin^2\theta - \sin^2\varphi + \sin^2\theta \sin^2\varphi}{[(1 + \cos^2\theta \cos^2\varphi)^2 - \sin^2 2\theta \sin^2\varphi]^{1/2}}$$

Bref, avec peu de patience et en vous bornant à des valeurs de θ et φ pas trop importantes (comprises par exemple entre $-\pi/4$ et $+\pi/4$) vous pourrez représenter la quantité $\cos b$ en fonction de θ et φ par une surface telle que celle de la figure 2. Il est clair que ce schéma rend entièrement compte de la situation, pour peu que l'on oublie les paramètres inutiles et que l'on ait limité les amplitudes θ et φ du mouvement de l'équerre ABC. On peut dire notamment que la pro-

jection seule de la surface de la figure 2 sur le plan $\theta O \varphi$ caractérise les paramètres importants de la configuration.

Supposez maintenant que vous ne disposez pas de tous ces paramètres. Supposez par exemple que vous ne sachiez pas grand chose d'autre sur la position de l'équerre que ce que vous pouvez observer sur la position de sa projection abc...

Les points représentatifs de la situation (surface (Σ) de la figure 3) vous apparaîtront d'une façon qui dépendra des paramètres que vous pourrez alors affecter à la vision dont vous disposez, et il y a peu de chances que des considérations directes sur abc vous permettent d'établir l'existence et les valeurs des variables θ et φ ... Une façon simple d'imaginer les phénomènes qui peuvent alors se produire et de considérer que vous regardez simplement l'ensemble (Σ) de la figure 3, mais ceci au sens littéral du terme, c'est-à-dire que vous n'en connaissez plus que la projection sur le plan de la feuille de papier où je l'ai dessinée. En d'autres termes vous seriez alors construit deux paramètres nouveaux, dépendants de θ , φ et $\cos b$. Ce ne serait déjà pas si mal, mais cela ne vous permettrait pas de déduire exactement la position de l'équerre ABC... Ceci à cause d'un phénomène du type de celui que j'ai entouré sur la figure 3 et grossi sur la figure 4 : la surface (Σ) fait désormais des plis !

Ces recouvrements vous interdisent de déterminer de façon biunivoque les positions de l'équerre : celles-ci correspondent toujours — en théorie — à des valeurs de θ et de φ ; certains points de la surface (Σ) (tels que A_1 et A_2 sur la figure 5) permettent encore de retrouver des situations non ambiguës ; mais là où plusieurs feuillets se superposent, ce qui est pour vous une

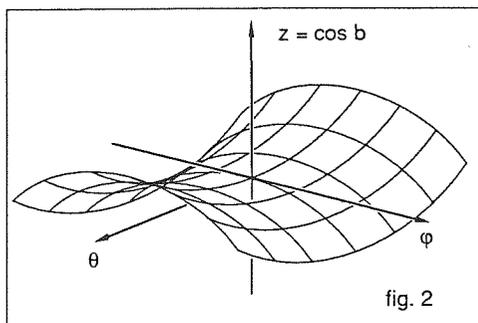


fig. 2

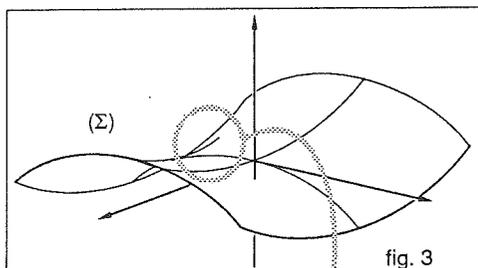


fig. 3

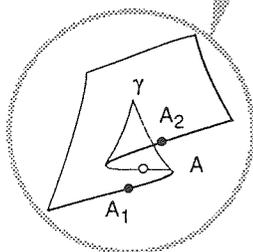


fig. 4

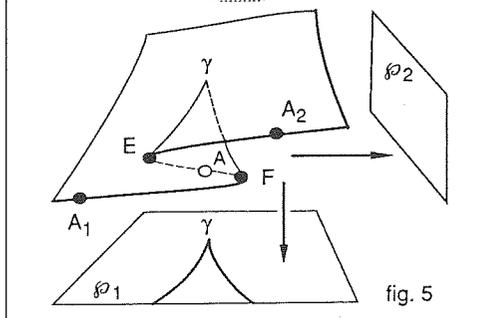


fig. 5

même configuration est attaché en réalité à trois possibilités de fixation du couple (θ, φ) .

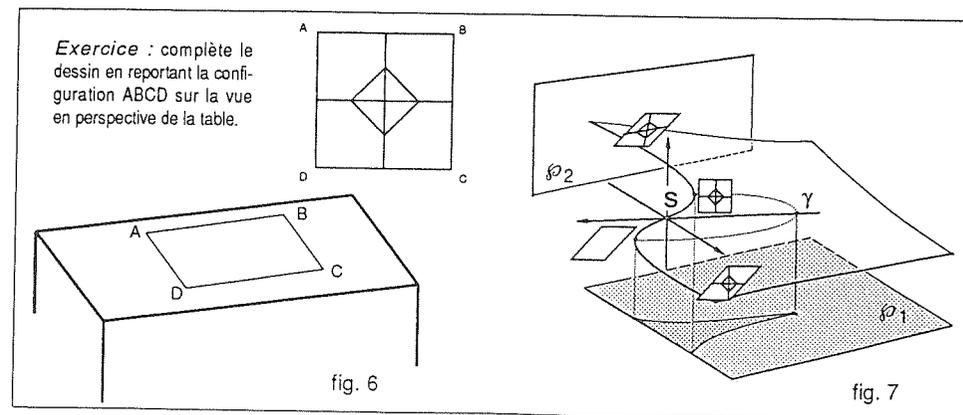
Allons plus loin : partant d'un point tel que A_2 bien déterminé, vous pourrez — par continuité — suivre le feuillet "supérieur" en conservant une certaine interprétation de la situation globale, mais arrivé en E, vous serez obligé de passer sur le feuillet "inférieur" sur lequel l'interprétation précédente deviendra fautive. Vous pourrez cependant revenir vers le point F en maintenant l'interprétation du second feuillet..., pour retomber ensuite sur le premier, etc., etc. Vous n'atteindrez jamais de cette façon l'état de la configuration globale qui correspond au point A ! Le seul moyen d'y parvenir serait d'aller passer au point γ (s'il existe), ce qui suppose en particulier de se dégager d'une analyse cantonnée aux chemins voisins de la route menant de A_1 à A_2 .

Cet "archétype" d'obstacle est donc résumé fig. 5 : une situation analysable théoriquement à partir d'un point de vue (ρ_2) (dans une "projection" qui permet de la traduire de façon biunivoque) peut être appréhendée incomplètement d'un point de vue (ρ_1) et donner naissance à des "plis" interdisant d'accéder à toute la réalité.

Cela induit, d'une part, une dynamique d'erreurs qui sont dues aux "changements de feuillets" et, d'autre part, la nécessité de réinventer de véritables paramètres à la situation, en parcourant la surface à partir du "point de passage" obligé (γ sur les figures 4 et 5) ; point que j'appellerai dans la suite le "point cusp", ou le point "fronce" de la situation étudiée.

C'est sur la base de ce "fil d'Ariane" épistémologique que j'ai détaillé quelques exemples dans l'exposé cité plus haut. J'ai notamment tenté d'expliquer comment pouvait être interprété dans ce cadre le fonctionnement d'un exercice comme celui de la figure 6 ; qui peut être modélisé par le schéma de la figure 7... Disons simplement ici qu'une analyse du problème en "déformation" ne permet pas d'atteindre le point solution (S), alors que le passage par γ — qui correspond en l'occurrence à la règle "les milieux sont conservés" — suppose au contraire de raisonner en "démontage" et en "remontage" de la figure, il fournit alors un cheminement qui aboutit au dessin cherché.

Je vais développer un peu plus longuement un autre exemple.



Exercice : complète le dessin en reportant la configuration ABCD sur la vue en perspective de la table.

fig. 6

fig. 7

b. Le cas Zénon

Il est difficile de trouver une illustration du problème de l'infini plus classique que celle qui tourne autour des paradoxes de Zénon d'Elée : ils auront fait couler plus d'encre épistémologique en quelques deux millénaires et demi que n'importe laquelle des grandes questions mathématiques.

Rappelons les faits. Zénon, sophiste grec, c'est-à-dire en réalité enquiqueur patenté spécialiste du "logos", aurait soumis timidement à ses contemporains la remarque suivante :

« Pour aller d'un point A à un point B, une tortue doit d'abord effectuer le chemin qui va de A au milieu de AB, etc., etc. »

L'observation serait aussi pertinente qu'anodine s'il ne fallait comprendre que tout est contenu dans le « etc. »... Ce que s'empressèrent de faire les exégètes de l'époque, qui traduisirent immédiatement le propos comme vous le feriez vous-même, si un spécialiste actuel du "logo" vous annonçait :

« Si, pour aller de A à B, vous programmez votre tortue en lui disant : "va de A au milieu de AB, etc.", ... alors l'ordinateur se plante ! »

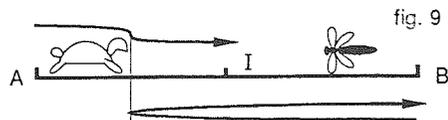
En d'autres termes : le mouvement est impossible à cause de l'infini d'étapes qu'il suppose accomplies... Bien qu'ébranlés, les contemporains de Zénon n'en continuèrent pas moins — semble-t-il — de se déplacer comme vous et moi pour aller d'un point à un autre ; cependant ils brodèrent sur cette remarque quantité de variantes, connues aujourd'hui sous le nom de "paradoxes de Zénon" et destinées à prouver l'impossibilité de tout déplacement, soit parce qu'il ne peut aboutir, soit parce qu'il ne peut commencer.

Le plus connu de ces paradoxes est certainement celui qui affirme qu'Achille ne pourra jamais rattraper une tortue, dans la mesure où il devrait pour cela commencer à réduire l'écart de moitié, etc., etc. Pour changer un peu, je partirai d'une version plus moderne et plus sophistiquée :



« Supposons (fig.8) deux points A et B distants d'un kilomètre. Au même instant une tortue et une mouche quittent A et B pour aller l'une vers l'autre à des vitesses respectives de 1 km/h et 3 km/h. Arrivée sur la tortue, la mouche — d'humeur badine — repart illico vers B pendant que la tortue poursuit son petit bonhomme de chemin. Arrivée en B, la mouche repart dare-dare vers la tortue, puis retourne en B, puis vers la tortue, etc. Quelle est la distance parcourue par la mouche lorsque la tortue arrive en B ? »

Vous vous apercevrez vite que la mouche parcourt les 3/4 du chemin BA pendant que la tortue en effectue 1/4 ; puis que la mouche a exactement le temps de retourner en B pendant que la tortue achève de rallier le point I milieu de AB (fig. 9).



A cet instant, l'histoire peut recommencer et l'étape suivante est analogue, à la

seule condition de remplacer la distance initiale AB par la distance moitié IB. On trouve donc sans trop de peine les distances parcourues par la mouche :

- 1ère étape : $3/2 \times 1$ km
- 2ème étape : $3/2 \times 1/2$ km
- 3ème étape : $3/2 \times 1/4$ km
- etc., etc.

Dès lors, si vous admettez que le problème relève simplement de l'addition de ces distances successives, vous trouverez :

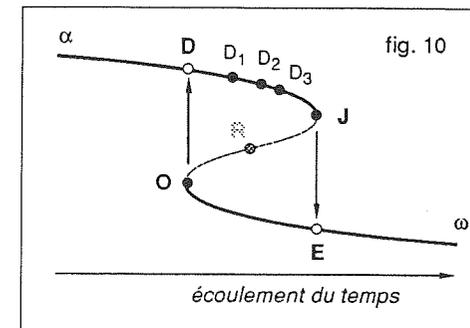
$$\begin{aligned} \text{distance totale} &= \\ &= (3/2 \times 1) + (3/2 \times 1/2) + (3/2 \times 1/4) + \dots \\ &= 3/2 \times (1 + 1/2 + 1/4 + 1/8 + \dots) \\ &= 3/2 \times 2 \text{ km} = 3 \text{ km} . \end{aligned}$$

Est-il besoin de préciser que ces 3 km ne sont rien d'autre que les 3 km parcourus en une heure par la mouche ?... puisqu'elle vole exactement pendant le temps que met la tortue pour épuiser la distance AB, ... à la vitesse de 1 km/h !

Simplement un peu accentués dans ce scénario, tous les ingrédients des paradoxes de Zénon sont en place, et pour en comprendre les ressorts, le plus simple est d'essayer de modéliser la situation sous la forme d'un pli (cf. fig.10). Je considérerai pour cela la courbe "en S" $\alpha DJRO\omega$ chargée de représenter le piège mis en place par Zénon. Les "images" situées sur la branche supérieure αJ correspondront aux faits géométriques décrits par l'énoncé. Les "images" situées sur la branche inférieure $O\omega$ seront attachées aux sentiments du temps que le problème fait naître.

De façon plus précise, la figure 10 fonctionne de la façon suivante :

1 — l'énoncé vous place tout d'abord en D_1 (première étape), puis en D_2 (deuxième



étape), puis il vous amène à envisager l'infini des aller et retour que la mouche devra accomplir. Ce faisant, vous êtes attiré par un "attracteur" situé au point "J" et qui correspond à l'image de cette infinité (de comptage) attachée aux zig-zag de la mouche. Cet attracteur pourrait correspondre à ce que vous pouvez avoir aujourd'hui comme "idée de N". Je l'appellerai (parce que c'est plus joli...) l'attracteur "échelle de Jacob", en souvenir du passage de la Bible cité en exergue.

2 — arrivé au point "J" (à cette image de l'infini du dénombrement à accomplir) vous êtes précipité sur le feuillet $O\omega$ du temps ; et cette image se transfère en un sentiment de durée immense (pas d'éternité, ... mais presque !). Vous voyez certainement défilé brutalement tous les grains de l'univers dans le sablier du destin, vous êtes submergés par les eaux de la création qui vont s'écouler dans la clepsydre de Chronos, vous êtes assourdis par tous les tic-tac à venir de la pendule d'argent qui ronronne au salon, ... Bref, vous êtes au point "E" de la figure 10, parce que vous venez de dire sans même vous en rendre compte : « il faut un temps bien trop long à la mouche pour accomplir ses aller et retour ! ».

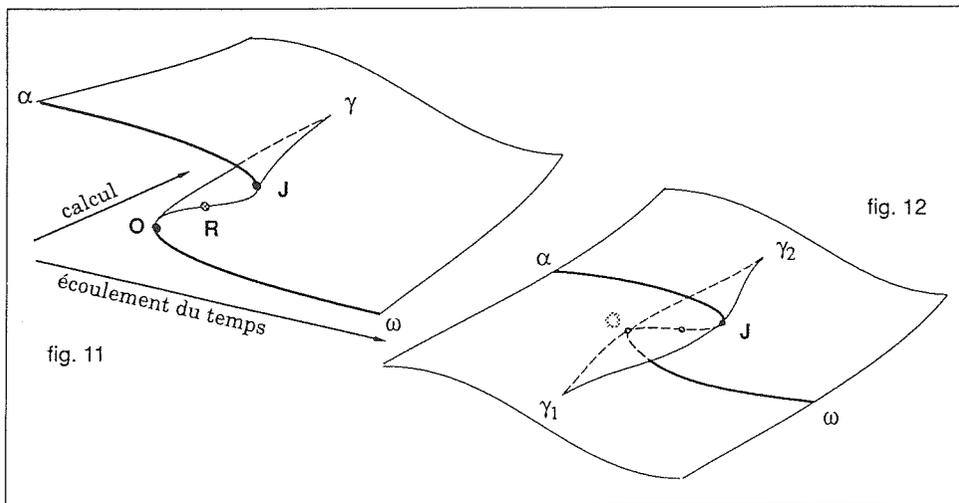
3 — vous vous rendez alors compte que cette réponse ne tient pas : pris d'un remords (mais coincés sur le feuillet inférieur) vous revenez en arrière... et vous êtes attirés par le seul autre attracteur un peu intéressant sur le feuillet $O\omega$: c'est celui qui est situé au point O et qui correspond au *temps nul*. Ce faisant vous serez précipité en "D" sur le premier feuillet, et vous aurez dit : « *le mouvement est impossible, il ne commence même pas !* ».

C'est évidemment là le paradoxe de Zénon : il fonctionne dans le cadre de la figure 10, parce que dans ce cadre votre "curseur" ne peut aller que vers la droite ou vers la gauche et que la configuration du pli vous interdit d'atteindre le point R où réside la réponse. Vous avez suivi Zénon sur un axe de réflexion que j'ai appelé *écoulement du temps* et qui consiste simplement, de façon naïve, à égrener, instant après instant, l'accumulation du *temps qui passe*...

Au contraire, pour atteindre la réponse "R", il faut passer par le point γ de la figure 11, attracteur qui pourrait correspondre à l'image mentale d'une limite du type :



Mais cela nécessite de *quitter* l'axe écoulement du temps pour *effectuer les calculs* que je vous ai présentés pour commencer. Ce qui suppose une "modélisation du temps" par un ensemble du type de celui des nombres réels. Vous noterez aussi que je vous ai en fait raconté deux *cusp* γ possibles : l'un avec le calcul global très simple (γ_1) et l'autre avec la sommation de la série géométrique (γ_2). On pourrait donc très bien représenter cela par la figure 12 à deux fronces... C'est là, bien entendu, une vision "moderne" du problème et elle n'explique pas l'intérêt accordé jusqu'ici au paradoxe de Zénon. J'y reviendrai au paragraphe suivant.



c. La question du sens

Ces deux exemples vont me permettre de m'arrêter un peu plus longuement sur quelques questions complémentaires suscitées par une telle modélisation.

Sous forme spontanée (cf. [1]), on peut tout d'abord considérer que les réactions premières sont de nature "sentimentale". C'est sans doute le lot d'une façon de présenter les choses qui s'apparente très fortement à ce qu'il est convenu d'appeler la "théorie des catastrophes". Or le modèle évoqué ici, malgré quelques variantes qui résultent d'un point de vue moins *dynamique* ou *métabolique* et plus *statique* ou *descriptif*, peut légitimement être considéré comme un avatar des idées introduites par Thom. Y compris dans le double aspect que lui affectent désormais certains philosophes : d'une part sous l'angle de lecture illustré par l'exemple de la projection de l'équerre (où l'on pourrait postuler que les "images" sont susceptibles d'une mise en équations effective), et d'autre part dans un parti-pris beaucoup plus abstrait (et moins justifiable *a priori*) d'envisager l'épistémologie des mathématiques tout entière comme l'étude d'une (énorme) variété — la "robe de la mélancolie" de [1] — dont il s'agirait d'étudier les "plis" et leur évolution dans l'histoire ou dans l'apprentissage...

Cela dit, un point d'achoppement non négligeable me semble relever de l'éternel débat entre *constructivisme* et *idéisme* dans la mesure où la modélisation présente oblige les deux points de vue à cohabiter de façon relativement complémentaire et contradictoire : *idéisme* — voire *mysticisme forcé* — à considérer d'entrée de jeu un ensemble des images mentales, préexistant quelque peu aux savoirs eux-mêmes ;

mécanisme — voire "mécanicisme" — des processus de découverte et de compréhension, qui pourraient presque se résumer à un balayage aléatoire de la *variété des savoirs*.

C'est sans doute sur la question du *sens* que se cristallise alors ce genre de difficulté, car le modèle ne prend pas vraiment parti sur cet aspect des obstacles. Il consiste en effet seulement à détecter des *singularités* qui peuvent apparaître entre plusieurs façons de "paramétrer une surface" (ou une variété de dimension supérieure) et cela sans fixer nécessairement de règles régissant la *vérité*. Ce qui compte, ainsi, dans l'exemple de l'équerre, c'est le pli entraîné par la différence de point de vue sur l'ensemble des états possibles ; c'est le *décalage* entre les projections sur \wp_1 et \wp_2 dans la fig. 5. Dès lors, chacune de ces deux projections peut être regardée comme une *façon de lire* la variété des états, c'est-à-dire de lui *donner un sens*. Mais ce "sens" est, en quelque sorte, *second* et, surtout, il est *libre* ; dans la mesure où de multiples projections peuvent rendre le même service. Un peu comme s'il s'agissait simplement de choisir d'autres paramètres pour déterminer la position de l'équerre à la place des angles θ et ϕ .

Vous noterez cependant que les "variables d'interprétation" ne sont pas complètement neutres. C'est ainsi que sur l'exemple de la fig. 7 "déformation-démontage" permettent — à l'observation — de décrire le mécanisme de l'obstacle en ce qui concerne l'analogue de la projection \wp_1 de la fig. 5. En revanche le pendant de la projection sur \wp_2 laisse libre le choix de la variable "verticale"... Or c'est dans ce choix que résidera le sens que l'on veut attribuer

à une lecture du problème dans laquelle l'obstacle est inexistant (ou surmonté !). On pourrait par exemple ne voir dans l'exercice de la fig. 6 qu'un champ correct de transformations appliqué à la figure. Le seul paramètre interdit est celui de la *déformation* ; mais n'en déplaise aux adeptes du "plaisir du sens"... il est connu depuis longtemps que les transformations géométriques *ne déforment pas*, puisque leur étude revient pratiquement à celle de leurs invariants.

Cette question philosophique mise à part, il convient de préciser quelques aspects du *fonctionnement* d'une singularité d'un point de vue épistémologique, et ceci sur deux points : la *compréhension* et la *conceptualisation*. Reprenons pour cela l'exemple du paradoxe de Zénon (fig. 10 - 11 - 12).

Utilisons le *cuspid* γ_1 (cf. fig. 12) pour atteindre la réponse située au point R : cela revient schématiquement à utiliser le savoir "distance = vitesse x temps" en aller et retour. C'est-à-dire à calculer le temps à partir de la vitesse de la tortue, puis à appliquer cette valeur à partir de la vitesse de la mouche.

Un tel aller-retour au savoir qui recèle la solution est analogue à celui que constitue le "démontage-remontage" de la figure dans l'exercice de la fig. 6. Il ne nécessite pas à proprement parler une vision différente de la surface qui constitue le pli, mais il permet d'en parcourir tous les feuillets et, principalement, d'accéder au feuillet caché... Je dirai que la pratique approfondie et répétée de tels cheminements constitue le *premier stade de la compréhension* : il permet de parcourir tous les points de la surface des états malgré le mauvais paramétrage (\wp_1 de la fig. 5) dont on dispose initialement. On peut alors imaginer un processus de compréhens-

sion face à une famille de problèmes analogue relevant d'une même fronce : les chemins en seront d'autant mieux explorés et pratiqués qu'ils seront susceptibles de mener à des points proches du *cuspid* ; de là une différence naturelle évidente entre des situations (ou des exercices) plus ou moins complexes, mais dont la solution demande de mettre en jeu la même démarche.

A ce stade de la compréhension (que l'on pourrait qualifier de *procédural* ou de *mécanique*) devrait succéder, de par la familiarisation acquise avec les points de la surface des états, une nouvelle *cartographie* de celle-ci. Cartographie (ou *paramétrage*) qui sera ressentie peu à peu comme incompatible avec la projection (\wp_1 fig. 5) entachée d'un pli. C'est un *deuxième stade* de la compréhension : une nouvelle "projection", une nouvelle façon de voir va succéder à la première. Un peu comme si le plan de projection \wp_1 de la fig. 5 tournait peu à peu vers la position \wp_2 en *dégageant* lentement le voisinage du *cuspid*...

Appliquez ce principe à la fig. 12 en admettant que les fronces γ_1 et γ_2 soient explorées simultanément ; c'est l'ensemble du pli qui disparaît peu à peu et qui peut, *a posteriori*, être considéré comme un "faux pli" dû à l'invention malicieuse d'un Zénon. C'est en tout cas cette interprétation qu'il convient de garder actuellement à l'esprit si l'on désire proposer l'exercice de la fig. 8 à des étudiants, afin (par exemple) d'illustrer le côté "naturel" d'un passage à la limite destiné à obtenir la somme d'une série...

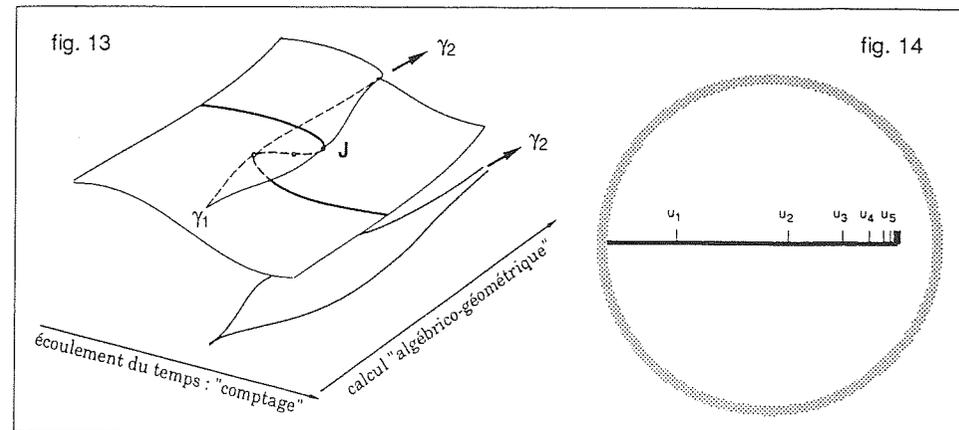
Cependant le problème spécifique au paradoxe de Zénon n'est peut-être pas aussi simple (ne serait-ce que si l'on en croit le succès qu'il faut bien lui accorder depuis quelques siècles) et cela tient (à mon avis) à

plusieurs raisons qui invitent à réfléchir plus profondément sur l'aspect épistémologique du modèle et à la nature des *cusps* γ_1 et γ_2 de la fig. 12.

D'abord il n'est pas sûr que l'on puisse parler du point *cuspid* γ_2 comme d'un savoir anodin, n'ayant posé aucun problème à ses *découvreurs*. Au contraire. Et ceci, pourrait-on dire, à toutes les périodes de l'histoire. Pour s'en tenir à Zénon, on pense depuis Tannery que l'objet même de son paradoxe était de mettre en évidence la contradiction fondamentale qui ruinait le point de vue (attribué aux pythagoriciens) selon lequel le monde géométrique aurait pu être une réunion de points "matériels", d'une dimension très petite certes, mais susceptible de servir de commune mesure à toute longueur. Dès lors, la mise en lumière par Zénon de "l'attracteur γ_2 ", que l'on peut schématiser par l'image d'une suite géométrique comme celle de la fig. 14, aurait rendu la vie aussi impossible aux tenants de cette théorie que la découverte de l'incommensurabilité du côté du carré avec sa diagonale.

Cette interprétation me paraît à la fois juste et fautive. Elle est en effet particulièrement séduisante parce qu'elle montre bien le *conflit psychologique* qui a pu se manifester entre ce que j'ai appelé l'axe du "comptage" et l'axe du "calcul", entre le sempiternel retour à l'unité et les techniques sophistiquées d'un calcul capable d'englober le cas des nombres irrationnels. C'est là sans doute un des obstacles originels que la science a eu à surmonter. C'est aussi un obstacle "didactique", toujours présent dans l'apprentissage, que les pédagogues ont particulièrement tendance à oublier... Et il n'est donc pas interdit de penser avec Tannery que le "paradoxe de Zénon" symbolise en grande partie cette étape.

Cependant cet aspect des choses laisse de côté une composante non négligeable du paradoxe, qui réside dans l'importance attribuée au *mouvement*, c'est-à-dire au *temps*. Or s'il semble légitime de penser que la science grecque a parfaitement maîtrisé assez tôt l'attracteur γ_2 (fig. 14) sur le *feuillet supérieur* de la fig. 13, autrement dit dans le *domaine géométrique*, il n'en va



pas du tout de même en ce qui concerne le *feuillelet inférieur* qui correspond au *domaine du temps*. Alors que la perversité de la situation choisie par Zénon (ou ses exégètes) est justement d'obliger à faire subir au temps le *même découpage* que celui du segment AB parcouru par la tortue ; puisque c'est le seul moyen de rejoindre le point γ_2 , sur le *feuillelet inférieur*.

En d'autres termes, il faut accepter d'affecter au paramètre temps la modélisation que nous lui connaissons actuellement : celle d'un point sur une droite, c'est-à-dire une modélisation géométrique analogue à celle qui prévaut sur le *feuillelet supérieur* ! Et je ne suis pas sûr qu'une telle vision des choses n'ait pas dû attendre le début du XVIII^e siècle (et Galilée) pour rentrer pleinement dans les mœurs. Je pense au contraire que c'est l'*inexistence de la fronce* γ_2 (dans toute l'acception qu'il faut mettre à cette notion), qui caractérise les mathématiques grecques.

Un deuxième aspect de la double fronce γ_1, γ_2 des fig. 12 et 13 résulte du problème de leur *stabilité*. Je le relierai à un autre des problèmes cruciaux des mathématiques, que vous aurez sans doute reconnu caché derrière "l'attracteur J", et que l'on appelle classiquement le problème de "l'infini potentiel".

Notez tout d'abord que ce que j'ai dit précédemment du processus de "compréhension" ne saurait épuiser le comportement du mathématicien confronté à une fronce, mais recouvre seulement son attitude face à un type limité de problèmes nécessitant le recours au point cusp. L'activité mathématique est en réalité — par nature — *généralisante*. Cela signifie, en termes du modèle qui nous intéresse ici, que la surface des états que je considère

pour décrire un problème particulier ne saurait être isolée du contexte formé par les problèmes environnants. Le champ d'étude de celui qui cherche ne se restreint évidemment pas à cette surface qui, bien au contraire, est comme "noyée" dans un espace à trois dimensions, ou même dans un espace de plus grande dimension encore. J'appellerai "conceptualisation" la phase qui complète la compréhension d'une fronce (au niveau d'une strate) pour l'étendre aux strates environnantes en *regroupant au problème originel* les situations susceptibles de s'y amalgamer.

Considérer une fronce comme "stable", c'est alors supposer qu'elle est capable de traverser cette épreuve de la *conceptualisation*. Ou, si l'on préfère, qu'elle survive à l'exploration d'un champ suffisant de problèmes analogues, effectivement susceptibles d'être résolu par recours à un cusp qui se déduirait du cusp initial par une variation simple des données. C'est admettre qu'une figure comme la fig. 5 n'est en fait qu'un résumé (un "quotient") pertinent pour tout un ensemble de problèmes.

En vérité, il y a sans doute peu de cusp stables si on les rapporte à l'ambition "universalisante" des mathématiques, et on pourrait même, sans trop se tromper, regarder l'activité mathématiques comme marquée par une fatalité : déstabiliser un jour ou l'autre les cusp les mieux assurés par souci de généralisation croissante... Mais ceci nous emmènerait sans doute trop loin ; nous nous contenterons d'envisager ici la stabilité de la fig. 12 !

L'attracteur γ_2 (ou si l'on préfère "l'image mentale" de la fig. 14) a un privilège particulier en mathématiques, qui lui vaut d'ailleurs l'insigne honneur d'être le sujet même du présent colloque : il s'est toujours révélé *très*

acrobatement stable... Revenons en effet à la fig. 12 comme illustration du problème de Zénon, et relisons la solution passant par γ_2 . Le chemin qui mène de l'énoncé à γ_2 résulte d'une "violence" : celui qui réfléchit doit se détourner de l'attracteur "J" pour en maîtriser "l'infini potentielle" et pour mettre en place un "passage à la limite" qui peut être illustré par la fig. 14. Il n'y a là rien d'autre qu'une forme "d'actualisation de l'infini", autorisée ici par le recours à la série géométrique, mais qui est bien loin de ne pas soulever une foule de questions dont l'histoire des mathématiques vous réglera à l'envi... Pour peu que vous pensiez au moindre exemple tiré de l'analyse : du calcul des indivisibles à l'analyse non-standard, en passant par tous les balbutiements possibles de la notion de "filtre". Pour peu, même, que vous remarquiez le simple fait suivant : l'importance donnée ici à la *suite géométrique* comme critère de convergence. Cette importance n'est pas neutre si l'on se souvient de l'omniprésence de cette suite dans la plupart des passages à la limite effectués par les grecs, et c'est là une raison supplémentaire d'instabilité vis-à-vis de nombre de questions d'analyse qui réclament une "image de la convergence" plus souple que celle que j'ai illustrée par la fig. 14.

DEUXIEME PARTIE : la perspective entre 1400 et 1500

Vous l'avez sans doute remarqué vous aussi. L'histoire des mathématiques a un charme très particulier : c'est que l'on n'y trouve jamais vraiment ce que l'on y peut chercher... L'histoire de la géométrie de l'espace, de la géométrie projective et de la perspective sont très frappantes à cet égard, car les habitudes actuelles dans notre façon d'envisa-

Ce simple "enrichissement de l'image" devra attendre des siècles et, pour tout dire, c'est un des buts de cet exposé d'en mettre en évidence une étape importante, mais je voudrais terminer cette première partie en vous signalant au passage une bizarrerie de l'histoire qui devrait fasciner les épistémologues qui méditeraient sur la fig. 12 : la fronce de cusp γ_1 n'est guère plus stable que la fronce γ_2 ! Revenez en effet à la solution que je lui ai attachée... et supposez que dans le problème de la mouche et de la tortue les vitesses soient données par des nombres incommensurables... La simple opération résumée par le retour à γ_1 nécessite alors des prouesses... Or ce sont précisément toutes ces prouesses qui ont été en grande partie accomplies par les Grecs (notamment par ceux que l'on rattache à la tradition d'Eudoxe) ; à tel point que γ_1 peut paraître plus stable que γ_2 , alors même que les difficultés sous-jacentes sont à peu près les mêmes.

Malgré cela le mathématicien préférera toujours passer par γ_1 plutôt que par γ_2 pour s'éviter un problème de "passage à la limite" ! Ainsi le "paradoxe de Zénon" symbolise une singulière "claudication" de l'histoire dont nous rencontrerons les effets, une fois encore, dans la suite.

ger l'espace induisent des questions envers le passé qui sont vite dénuées de sens. Les réflexes adoptés depuis quelques quatre siècles pour raisonner dans une géométrie à trois dimensions semblent si naturels que l'on a souvent peine à comprendre les véritables problématiques qui conduisirent les "primitifs" dans leur exploration de terres vierges.

C'est ainsi que l'invention de la notion de "point de fuite" pourrait presque passer aujourd'hui pour un renversement total de démarche par rapport à une présentation moderne de la question. On ne peut d'ailleurs guère suivre l'évolution historique sans connaître un aspect relativement négligé actuellement dans les rudiments de perspective : les propriétés du "point de distance".

a. La notion de point de distance

Si l'on s'avise, en effet, d'expliquer à notre époque les propriétés fondamentales de la perspective fuyante, il paraît généralement assez naturel d'en résumer d'abord le principe à l'aide d'un schéma comme celui de la figure 15, montrant un *objet*, un *observateur*, et une sorte d'*écran* transparent sur lequel viendra se fixer l'image de l'objet considéré. Chacun est censé aujourd'hui retrouver dans une telle figure un cas particulier de ce que nous appelons désormais une "projection centrale". Cela étant, la propriété essentielle qui structure l'image de l'objet choisi dans la fig. 15 tient

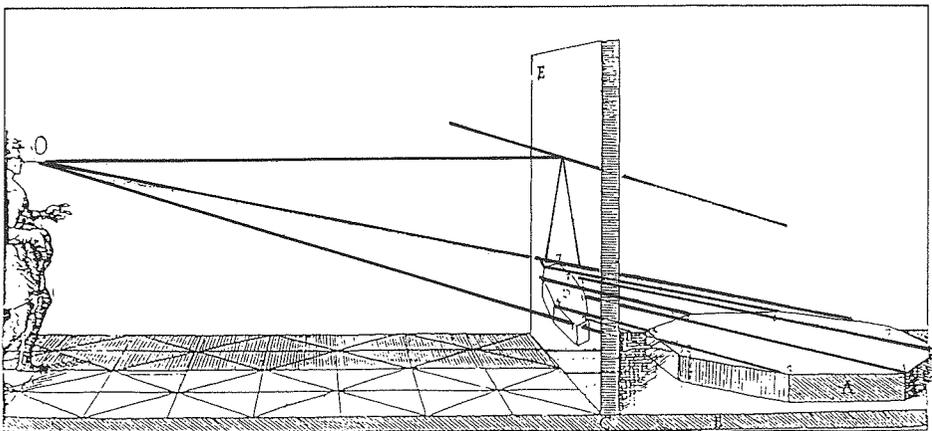


figure 15 (Vignola)

dans une règle fondamentale : "les familles de droites parallèles apparaissent à l'observateur sous forme de famille de droites concourantes". C'est la notion de "point de fuite" ; elle peut aisément (aujourd'hui !) être justifiée par un raisonnement du type de celui qui accompagne la fig. 16 de l'encadré 1. Je ne rentrerai pas dans les détails, sinon pour rappeler, d'une part une évidence : les *parallèles au plan de l'écran restent parallèles* ; d'autre part un fait général : pour que les familles de droites parallèles donnent des images concourantes, il n'est pas indispensable qu'elles soient contenues dans le plan horizontal des fig. 15-16 ... (Ce dernier point revient simplement à signaler à ceux qui l'auraient oublié que les points de fuite ne sont pas obligatoirement situés sur la "ligne d'horizon", et qu'ils ne le sont en fait que s'ils correspondent à des directions du plan horizontal.)

Jointes à un peu de pratique, ces règles du jeu constituent un bagage estimable en perspective, suffisant en tout cas pour résoudre un exercice comme celui qui était

Encadré 1. Le principe du point de fuite.

Vues de O, les images des droites parallèles (D) et (D') sur le plan vertical P, apparaissent comme concourantes en un point o appelé "point de fuite".

En effet, les "rayons visuels" OM joignant O à un point M de (D) sont contenus dans le plan déterminé par O et (D) qui coupe P selon une droite d, droite qui n'est autre que l'image de (D). Or il en va de même pour (D'), dont l'image d' sur P coupe d en un point o tel que Oo soit la droite (horizontale) d'intersection de ces deux "plans visuels".

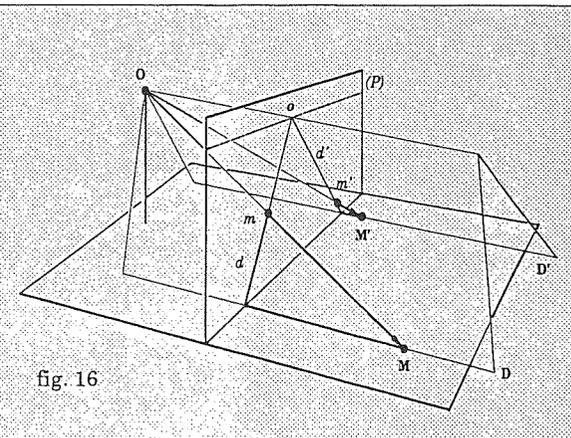


fig. 16

évoqué précédemment dans la fig. 6, mais transposé au cas de la perspective fuyante (cf. fig. 17). De la même façon, il n'est pas indispensable de posséder d'autres connaissances pour réaliser une belle illustration comme celle qui est reproduite sur la fig. 18. On notera seulement au passage que l'exercice de la fig. 17 ne relève plus exactement du modèle épistémologique résumé par la fig. 7 : il met en jeu deux savoirs qui demandent à être utilisés simultanément et indépendamment l'un de l'autre (l'appel aux deux points de fuite de la figure). Ici, la formule rituelle : "je laisse le soin au lec-

teur de compléter la fig. 17 à titre d'application", pourrait être agrémentée d'une phrase comme : "le lecteur en profitera pour modéliser l'obstacle à l'aide des deux fronces convenables" ! ... (Le lecteur en question pourra s'inspirer du § III.a du présent exposé.)

Faut-il penser que ce "bagage estimable" dont je viens de faire l'inventaire (et qui est celui d'un étudiant d'aujourd'hui ayant eu la chance de rencontrer un peu de perspective au cours de ses études) est suffisant pour surmonter les obstacles liés à la perspectives ? Je voudrais vous convaincre que non, et même vous faire sentir que les raisons peuvent en être rattachées aux deux aspects épistémologiques que j'ai distingués au paragraphe précédent : la *compréhension* et la *conceptualisation* (cf. § I.c).

Une façon simple de mesurer la *compréhension* que l'on peut avoir de la perspective — et notamment de la notion de point de fuite — est de se confronter à des exercices plus ou moins élaborés, comme (par exemple) ceux qui sont résumés par les fig. 19-20. Ces problèmes ne nécessitent qu'un *seul* point de fuite et on peut estimer

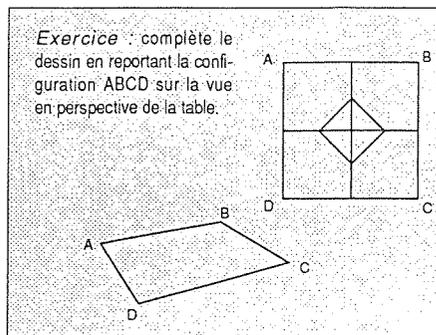


fig. 17

que leur "modélisation" se réduit d'abord à une simple "fronce". Ils demandent en revanche une excellente *compréhension* (c'est-à-dire un large aplanissement du cusp correspondant au point de fuite) afin d'éviter les erreurs classiques dues à la prégnance de l'idée de déformation, ou si l'on préfère, à la force de l'"attracteur" constitué par l'idée de parallélisme. On peut légitimement penser qu'une pratique suffisante de ce genre de problèmes aide à "domestiquer" le passage par le *cusp* ...

La question de la *conceptualisation* est plus délicate. Je vais essayer de l'illustrer à partir du problème suivant relatif à la fig. 18 : est-il possible de trouver :

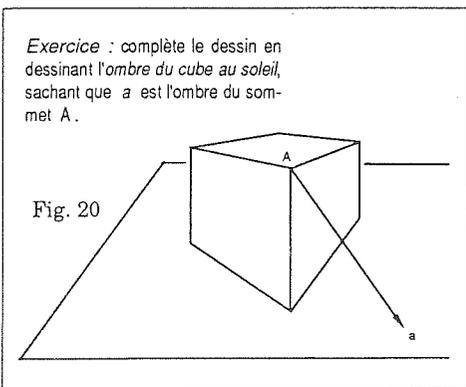
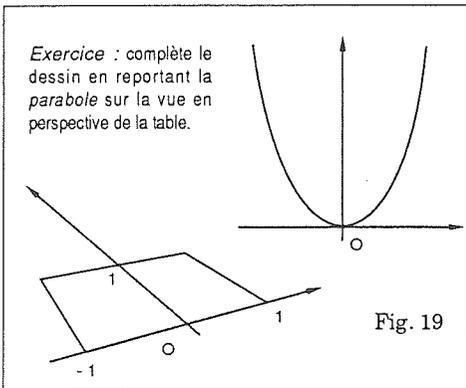
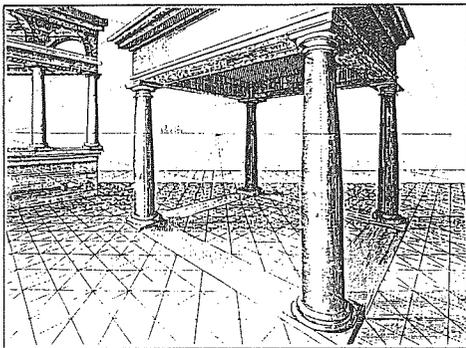
1 — le point où celui qui regarde cette figure doit placer son œil, pour que l'image qu'il aperçoit soit celle de l'observateur ayant dessiné ce "paysage" ?

2 — la place de cet observateur originel par rapport aux objets situés dans ce paysage ?

La solution de ces deux problèmes passe en fait par une seule construction : celle des points de fuite des diagonales du carrelage, et ce sont ces points qu'il est convenu d'appeler les "points de distance" du tableau (cf. encadré 2). On notera que j'ai précisément choisi la fig. 18 pour simplifier la question, et que la solution d'un problème analogue à propos de la fig. 17 serait plus délicate : elle a sans doute attendu 1639 et Desargnes... Il n'est cependant pas inutile de s'arrêter un instant sur l'utilisation des *points de distance*.

Alors que la réponse à la première des deux questions précédentes demande "d'opacifier" l'écran et de ne considérer que l'*observateur* et le *dessin* (cf. fig. 22), la réponse à la deuxième question amène à lire sur le dessin, considéré comme "transparent", les informations concernant le *paysage* et l'*observateur* (cf. fig. 23). Le lec-

Fig. 18 (V. de Vries)



Encadré 2. Le point de distance.

Fig. 21

Fig. 21 bis

Si on considère l'image d'un carrelage placé (au sol) face à l'observateur, les *diagonales* des carrés élémentaires sont parallèles et leurs images convergent en un point *t* de la ligne d'horizon. Mais alors la verticale *Tt* est l'image d'une parallèle particulière à toutes ces diagonales : celle qui passe par le point *H*, projection de l'œil sur le plan de base. Ainsi les droites *HT* et *Ot* sont inclinées de 45° sur le plan de l'écran. En d'autres termes, les triangles *HQT* et *Oot* sont des triangles isocèles rectangles (en *Q* et *o*), si bien que la *distance* *Oo* est égale à la distance *ot*.

De ce fait, le point *t* s'appelle le *point de distance* ; c'est le point de fuite du dessin qui correspond aux horizontales inclinées à 45° sur la ligne de base (noter qu'il y a évidemment deux tels points, symétriques par rapport à *o*).

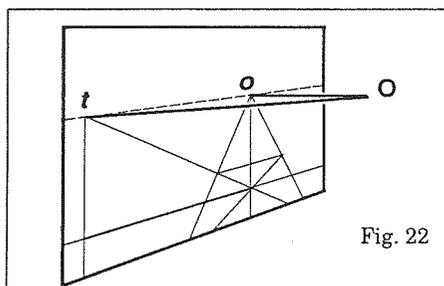


Fig. 22

Utilisation du point de distance pour déterminer la position de l'œil par rapport au tableau : comme le triangle Oot est isocèle rectangle en O (cf. encadré 2), on doit avoir $Oo = ot$ (avec évidemment o projection de O sur le tableau).

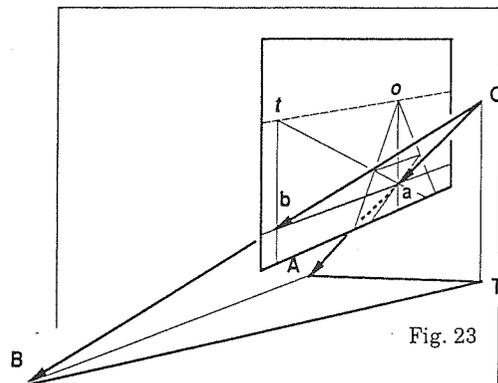


Fig. 23

Utilisation du point de distance pour déterminer la position de l'œil par rapport au sujet : soit ab l'image du segment AB situé dans le plan horizontal ; comme le triangle BAT est isocèle rectangle en A (cf. encadré 2), on doit avoir $AT = AB$. En d'autres termes, l'observateur est tel que T soit à une distance de l'objet représenté par a égale à la longueur qui correspond, dans la réalité à la distance séparant les objets représentés par a et b .

teur qui ferait l'effort nécessaire ressentirait aisément le conflit qui s'instaure immédiatement entre les deux démarches. Il en serait plus convaincu encore s'il cherchait à retrouver, à partir des fig. 22-23, les explications données dans l'encadré 2...

L'explication de ce phénomène tient à ceci : le *cusp* constitué par la notion de point de fuite n'est pas *stable*, au sens où des variations légères du problème, qui touche aux positions relatives de l'observateur, du décor et du dessin suffisent à perturber la compréhension. On le verra immédiatement si l'on mesure l'importance, pour la clarté des fig. 16-21-22, du choix d'un écran solidaire du plan horizontal. Désolidarisez ces deux éléments, vous perdez vite pied sur des questions analogues aux deux précédentes : le raisonnement se complique énormément... En termes de modélisation épistémologique, on peut dire que le cas particulier retenu ramène l'obstacle à une sorte de fronce (cf. §§III.b-c), mais qu'il s'agit là d'une simplification abusive : les problèmes voisins débouchent immédiatement sur une singularité plus complexe (comme sous le nom d'aile de papillon) qui traduit la difficulté d'exploration du problème général. Cette analyse fera l'objet d'un exposé ultérieur. Le but de la présente étude est uniquement de montrer comment la démarche historique constitue une résolution *partielle* de l'obstacle qui vient d'être évoqué. Cela va nous amener à un voyage en Italie, entre 1400 et 1500, dans un lieu que, pour simplifier, nous pourrions imaginer être Florence...

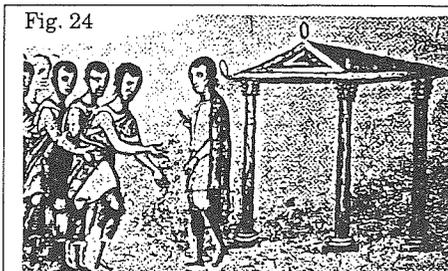
b. Les deux règles de la perspective

Même si les historiens ne sont pas toujours d'accord pour savoir à *qui* attribuer exactement l'invention de la perspective, il est incontestable que celle-ci est une des

grandes conquêtes de la Renaissance italienne. La plupart des éléments en ont pris corps au XV^{ème} siècle, à la suite d'un problème posé (et résolu) par des peintres. Dans un monde où les traditions picturales ont subi un véritable bouleversement ; à la mesure, sans aucun doute, du bouleversement intellectuel constitué par ce qu'il est aujourd'hui convenu d'appeler la "naissance de l'humanisme". Sans entrer dans les détails qui intéressaient le plus les historiens, il me semble possible de dresser un tableau général de la question et de présenter succinctement les grandes lignes d'une découverte que j'analyserai sous un angle épistémologique au cours de la troisième partie de cet exposé.

1° L'émergence d'une problématique.

Il suffit de comparer un vitrail de cathédrale ou une fresque byzantine à un tableau de Léonard de Vinci pour être frappé par une différence structurelle essentielle : l'importance, à l'intérieur même du sujet représenté, de l'espace modelé par les éléments du décor, autour des personnages principaux. Indépendamment de toute approche esthétique ou symbolique ; en s'affranchissant même de toute polémique sur les questions généralement liées au *réalisme*, c'est là un fait objectif indéniable de l'histoire de l'art à la charnière entre XIV^{ème} et XV^{ème} siècles : la composition d'un tableau a fait progressivement une place de plus en plus grande à l'agencement des volumes, à la disposition relative des lieux, à l'influence des éloignements sur la taille des objets ou des personnages. A cet égard les fig. 24-25 rappellent la différence entre un sujet traité "sans relief" et un sujet où les volumes trouvent leur importance, ... même si l'observation attentive du personnage de la fig. 25 amène à classer cette œuvre dans une phase de transition !



Ce sont deux "hiérarchies dans une vision du monde" qui se sont succédées. La base même de l'iconographie du Moyen Age, fondée sur des rapports sacrés entre les différents objets, adaptant le plus souvent la taille d'un personnage à son importance morale ou religieuse, va céder le pas à une "logique interne" complètement différente, commandée par la géométrie et à laquelle le peintre devra subordonner toute la scène ou la composition. En ce sens, on peut dire que le problème de l'artiste n'est plus uniquement *subjectif* et qu'il doit désormais prendre en compte une sorte d'espace *objectif*, d'espace de nature géométrique qu'il a la charge de traduire sur la

surface du tableau. Il serait faux de croire que le problème puisse avoir une solution unique et que celle-ci soit entièrement détenue par ce que l'on appelle aujourd'hui la technique de la perspective fuyante. Quoi qu'il en soit, les peintres du début du quattrocento en ont adopté le principe de base (connu depuis lors sous le nom de "fenêtre albertienne" et sans doute inventé par l'architecte Brunelleschi) : le "meilleur" moyen pour que celui qui regarde un tableau retrouve la sensation du relief est de se conformer au schéma de la fig. 15. A condition que l'observateur place son œil à l'endroit précis où le peintre regardait le sujet initial... En d'autres termes : le dessin est le "fantôme" laissé par le sujet sur une vitre placée entre l'artiste et la scène, le peintre doit donc déterminer sa composition en cherchant l'intersection des "rayons visuels" issus de son œil avec un plan vertical. Cette problématique clairement exprimée n'est rien d'autre que celle de la "projection centrale" dont j'ai rappelé les propriétés au paragraphe précédent.

2°) La méthode d'Alberti

Le premier à publier un ensemble de règles permettant de résoudre pratiquement le problème fut Alberti dans son *De Pittura* [2]. Sa solution a guidé le travail des peintres de tout le Quattrocento, elle repose essentiellement sur le parti pris de la "mise aux carreaux", c'est-à-dire de la construction préalable de l'image d'un "carrelage" placé sur le sol horizontal, face à l'observateur et parallèle au plan du tableau (c'est le problème de la fig. 16). De là, on peut construire l'image de n'importe quel point de l'espace : ce n'est rien d'autre que la technique des coordonnées cartésiennes bien connue aujourd'hui. Il est important de comprendre la démarche d'Alberti

pour aboutir à une représentation correcte du *quadrillage fondamental* ; elle repose sur deux idées.

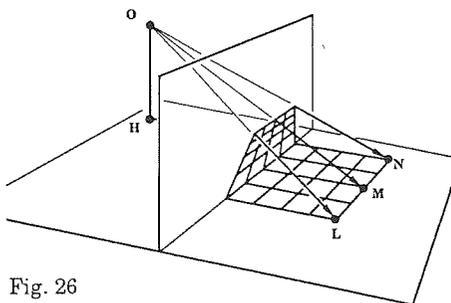


Fig. 26

La première consiste à remarquer (cf. fig. 26) que les segments égaux du carrelage qui sont situés sur une même droite *parallèle à l'écran* ont des images *parallèles à la ligne* constituant la base de cet écran et sont *égales* entre elles. La justification invoquée par Alberti est celle qui est schématisée sur la fig. 26 : elle repose sur la *similitude* entre les triangles ayant l'œil de l'observateur comme sommet commun et des bases déterminées respectivement par un segment du carrelage et par son image sur le plan de l'écran. J'appellerai cette première règle le "principe de transversalité".

La seconde remarque (cf. fig. 27) – que j'appellerai le "principe de profondeur" – concerne l'*étagement* des images des transversales précédentes au fur et à mesure que l'on s'éloigne de l'écran. Sans entrer dans un calcul donnant les hauteurs successives des droites d_1, d_2, \dots , de la fig. 27, Alberti note que ces hauteurs sont simplement données par une *construction intermédiaire* : on peut en effet se placer dans le plan vertical Q

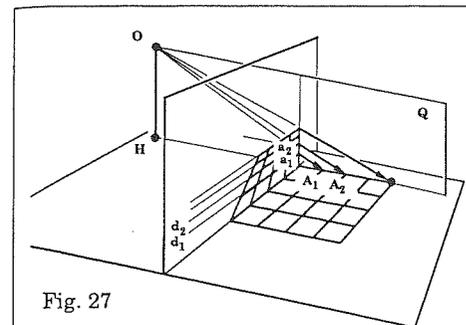


Fig. 27

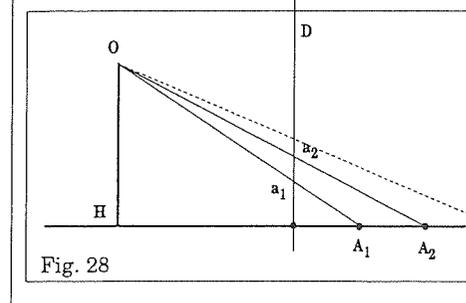


Fig. 28

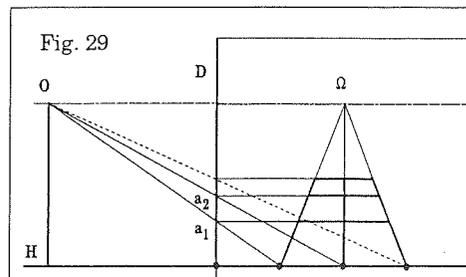


Fig. 29

Construction d'Alberti de l'image du carrelage fondamental : elle repose sur trois données : 1) choix de Ω comme projection de l'œil sur le tableau, 2) positionnement des mailles régulières au bas du tableau, 3) utilisation d'un point O et d'une droite D intermédiaires, tels que sur la fig. 28, pour trouver les hauteurs des mailles.

mené par l'œil de l'observateur et perpendiculaire à l'écran (cf. fig. 28). En plaçant le point O représentant l'emplacement de l'œil et une verticale D correspondant à la trace de l'écran sur Q, il suffit de considérer les points A_1, A_2, \dots , et de construire leurs images a_1, a_2, \dots , qui ne sont autres que les intersections de D avec OA_1, OA_2, \dots .

Il reste alors à combiner ces deux principes sur une même figure pour obtenir l'image du carrelage. Je laisse le lecteur en retrouver les éléments sur la fig. 29. Il en conclura (avec Alberti) que les mailles du réseau obtenu "tendent vers zéro" avec l'éloignement, et donc que les droites du carrelage convergent vers un point W qui est situé à la même hauteur que le point O. Il suffit pour cela (comme le fait Alberti) de "prolonger indéfiniment" le carrelage A_1, A_2, \dots , et d'observer la suite a_1, a_2, \dots , de la fig. 28. Comme la limite de a_1, a_2, \dots est située sur D, nous venons de constater que les droites du carrelage admettent un point de fuite qui n'est autre que la projection de l'œil sur l'écran...

3°) Le problème de la diagonale.

L'économie de moyens avec laquelle Alberti résoud finalement le problème est fascinante. On peut considérer légitimement que ses successeurs n'ont pas ajouté d'idée nouvelle à cette approche de la situation avant 1600, date à laquelle commencera à s'imposer une interprétation du type de celle que j'ai utilisée pour les rappels du paragraphe précédent. Ainsi l'œuvre de Piero della Francesca qui domine largement le XVème siècle sur la perspective est entièrement fondée sur la double construction albertienne, à ceci près que Piero évite les considérations de "passage à la limite" pour préciser la position du point de

fuite principal et remplace le raisonnement d'Alberti par une astucieuse construction faisant appel au théorème de Thales (cf. la proposition XIII de [3]).

On ne peut guère, cependant, résumer les savoirs de l'époque aux seuls écrits de Piero et il faut admettre que les constructions effectuées sur la base de la méthode d'Alberti se simplifièrent peu à peu autour de quelques remarques sur les propriétés des diagonales du carrelage. Il est clair en effet que les deux principes qui fondent la méthode et fournissent la construction résumée sur la fig. 29 sont d'une mise en œuvre particulièrement pénible dès que l'on veut, par exemple, obtenir une figure comme la fig. 18... ! Alberti avait toutefois déjà remarqué que *les points situés sur les diagonales* devaient être alignés à partir du moment où la construction était correcte, et on peut imaginer que les utilisateurs ne tardèrent pas à utiliser cette propriété d'alignement pour économiser la construction du carrelage complet, c'est-à-dire pour remplacer la détermination des points a_1, a_2, \dots de la fig. 29, par une *méthode mixte* (cf. fig. 30) où il suffit d'en construire un seul et de compléter la figure à l'aide des intersections des diagonales avec les

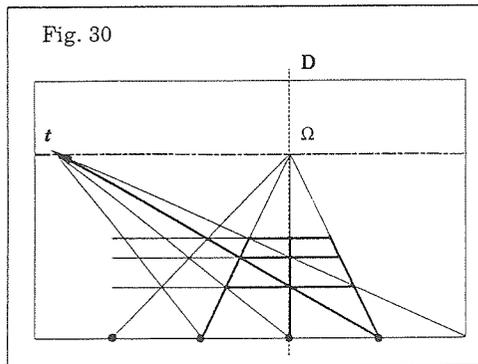


Fig. 30

droites qui passent par la base du carrelage et rejoignent le point de fuite...

Un lecteur moderne pourrait aisément vérifier (par exemple en appliquant le théorème de Desargnes...) que la concurrence des diagonales en un "point de fuite" t situé sur la "ligne d'horizon" est une conséquence *interne* des propriétés de la fig. 30. Il ne lui resterait plus qu'à démontrer que la longueur Ωt correspond à la distance de l'observateur au tableau. J'espère que le "lecteur moderne" sèchera un peu sur cette deuxième assertion...

Pourtant, malgré la difficulté de cette question – et l'absence du théorème de Desargnes ! – tout porte à croire que les peintres de la Renaissance *connaissaient* les propriétés de la diagonale dès avant 1500 (notamment Piero della Francesca ; comme l'a montré Le Goff dans [3]). Mais en vérité il est possible de retrouver de façon élémentaire les propriétés du "point de distance" t à partir de la fig. 30 : il suffit de placer la "construction intermédiaire" d'Alberti (fig. 28-29) de telle sorte que la droite D passe par Ω pour s'apercevoir que les diagonales coupent nécessairement la "ligne d'horizon" en un point qui correspond alors au point O de la fig. 28...). Et cette méthode apparaît chez Dürer vers 1500. Cependant, au niveau des principes, le raisonnement ne peut suffire, car cette "preuve" ne marche plus lorsque Ω n'est pas exactement situé à la verticale d'un nœud (ou d'une fraction de nœud) du carrelage. Cela pourrait d'ailleurs expliquer que Piero della Francesca n'en fasse pas état : il est nécessaire, en effet, de faire alors appel à un "passage à la limite" pour envisager le cas où Ω est placé dans un rapport irrationnel vis-à-vis des nœuds de la ligne de base... Il faudra attendre les alentours de 1535 et Vignola (cf. [4]) pour en trouver une démonstration simple, qui a sans doute échappé à Piero.

TROISIEME PARTIE : une interprétation épistémologique

Comme on le voit, l'approche historique de la perspective n'a pas grand chose de commun avec celle que l'on peut en donner aujourd'hui, et qui n'apparaîtra en fait que vers 1600 avec Guidobaldo del Monte. Avant cette date, les éléments théoriques se réduisent essentiellement à une lecture "transversale" et "en profondeur" du sujet, qui permettent de mettre en évidence le "point de fuite principal". Puis une évolution progressive dans l'utilisation des diagonales révèle de façon quelque peu miraculeuse deux nouveaux points de fuite qui correspondent aux points de distance. On ne voit guère comment aurait pu être abordée dans ce contexte la notion générale de point de fuite, *même lorsqu'il s'agit simplement de ceux qui sont situés sur la ligne d'horizon*.

On aurait cependant tort de croire qu'il ait fallu attendre 1600 pour connaître et utiliser de tels points et on est par exemple, surpris de voir la façon dont ils apparaissent dès 1504 chez un auteur comme Viator ([5]). Bien que nous quittons ici Florence pour rallier ce qui était sans doute déjà le plus grand centre intellectuel de l'Europe du Nord – je veux parler de la Lorraine ! –, il est plus que probable que Viator expose (sans démonstrations) des savoirs pratiques issus d'une tradition orale où l'école italienne tenait la plus grande place. Or il faut bien constater qu'il utilise sans grand détour (et qu'il est le premier à décrire) les notions de *point de distance* et de *ligne d'horizon*.

Il y a donc dans cette genèse historique de la perspective une sorte de "mystère épistémologique" que je vais tenter d'éclairer à partir du modèle fondé sur la notion de singularité ...

a. Les deux fronces d'Alberti

Simplifié à l'extrême, le problème d'Alberti aurait pu être ramené à la résolution d'un exercice du type de ceux que j'ai évoqués précédemment par les fig. 6 ou 17, mais où le but est de préciser la déformation du carrelage originel qui l'amène à apparaître sous une forme plus ou moins trapézoïdale (cf. fig. 31).

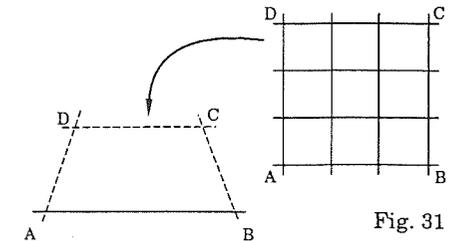
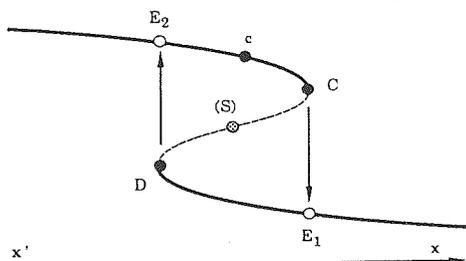


Fig. 31

On peut considérer en effet que la tradition picturale de l'époque admettait souvent de tels schémas globaux de représentations, sans pour autant maîtriser géométriquement la "logique interne" qui devait régir les diminutions (ou "dégradations") des longueurs en fonction de l'éloignement par rapport à l'observateur. Comme je l'ai dit plus haut, une fois posé le "principe de la fenêtre", la solution passe par un double démontage de la figure qui consiste à prendre en compte séparément les régularités transversales (sur AB ou DC dans la fig. 31) et les régularités en profondeurs (sur DA et CB). En termes épistémologiques, cela revient à dire qu'Alberti est amené à surmonter *deux plis* en mettant en jeu *deux fronces* distinctes, et qu'il convient de comprendre l'agencement mutuel de ces deux fronces.

Interprétons tout d'abord le problème "transversal", c'est-à-dire celui du transfert des nœuds du carrelage situés sur une parallèle à l'écran. Conformément aux analyses que j'ai déjà évoquées, l'obstacle est modélisé (fig 32) par une courbe à trois branches, et le chemin vers la solution (S) est court-circuité par deux types d'erreurs (E_1 et E_2) qui sont commandées par deux attracteurs (C et D) représentant des "images mentales" suffisamment prégnantes pour cacher la vérité... Sans vraiment disposer d'une liste exhaustive des erreurs possibles, il me semble crédible d'admettre un schéma du type suivant pour faire fonctionner la fig. 32.

Fig. 32



1 — le point représentatif de "l'état psychique" est commandé par un paramètre représentant l'éloignement sur un axe $x'x$ qui suivrait la direction des lignes considérées du carrelage.

2 — les branches supérieure et inférieure de la courbe décrites par les points représentatifs sont distinguées par un "paramètre caché" : la branche supérieure correspond à des "états" où la pensée parcourt *effectivement* le carrelage réel (comme, par exemple, si l'observateur imagine qu'il marche sur la ligne considérée), la branche inférieure correspond à des états où la pensée s'attache à

ce que *voit* le peintre (comme, par exemple, lorsque l'artiste se sert du pinceau tenu à bras tendu pour viser le sujet et en reporter la taille apparente sur le tableau).

3 — sur la branche *supérieure* le parcours mental *sur le carrelage* aboutit à un attracteur C qui correspond à ce que l'on peut regarder comme la "structure apparente" du carrelage et qui peut résulter de n'importe quelle règle conjoncturelle induite par le sujet (cf. par exemple la fig. 33). Cette "structure" peut aussi être attachée à ce que j'ai appelé plus haut "l'échelle de Jacob" : ce sera le cas lorsque le peintre cherche à imaginer une succession indéfinie de carreaux vers la droite (ou vers la gauche) ; il aboutit alors à une erreur (E_1) qui traduit l'idée personnelle qu'il est susceptible d'avoir d'une succession infinie, en cherchant éventuellement à "sortir le plus tôt possible" du champ du tableau, quitte à adopter un grossissement progressif de la taille des carreaux ...

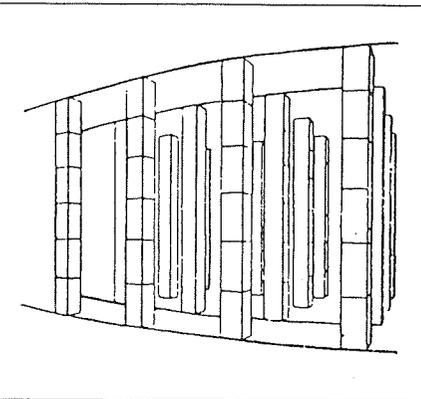
4 — sur la branche *inférieure*, l'attracteur D correspond à une fausse règle bien connue ; c'est l'idée de reporter sur le tableau le phénomène observé de diminution apparente des carreaux au fur et à mesure que l'on s'éloigne vers la droite ou vers la gauche : le retour à l'observateur (déplacement vers x' sur l'axe x) s'effectue sur la branche inférieure car le peintre pense à *ce qu'il voit*, mais il ne prend alors en compte que les *angles de vision* sous lesquels sont perçus les carreaux du carrelage. Il aboutit ainsi à une diminution progressive des écarts entre nœuds du carrelage (erreur E_2) et se comporte comme si le tableau n'était pas plan mais sphérique (cf. fig. 34).

Comme on l'a vu sur la fig. 26, la fronce d'Alberti (c'est-à-dire la règle de conservation des carreaux qui permet d'aboutir à la solu-

Fig. 33

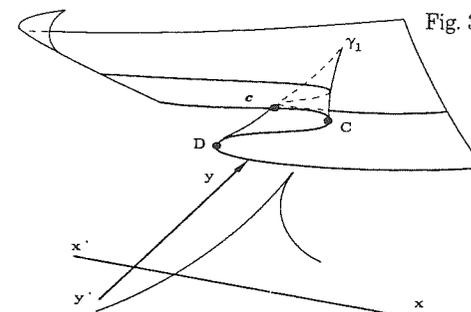


Fig. 34



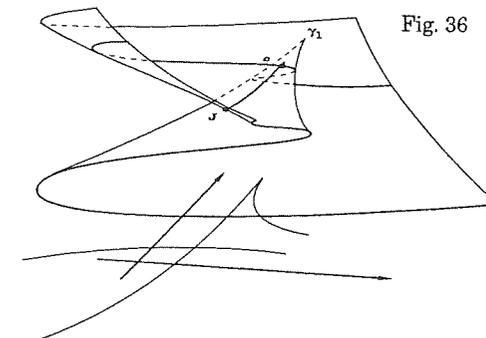
tion S) repose sur une mise en jeu de la *variable de profondeur* et sur la considération de triangles dont le sommet est situé à l'emplacement de l'œil de l'observateur. Je la schématiserai par la fig. 35 en introduisant l'axe $y'y$ pour paramétrer le déplacement "en profondeur" (perpendiculaire à l'écran) sur lequel le sens allant de y' à y correspondra au retour à l'observateur traduit par la fig. 26.

Fig. 35



C'est sur ce schéma qu'il nous faut désormais greffer l'analyse du second aspect du problème d'Alberti, c'est-à-dire de la recherche d'une règle de diminution de la taille des carreaux en profondeur.

Fig. 36



C'est ce que j'ai représenté par la présence d'un nouveau pli (cf. fig. 36) que le point représentatif rencontrera en un point J. Cette rencontre donnera naissance (par chute sur la nappe inférieure) à une erreur

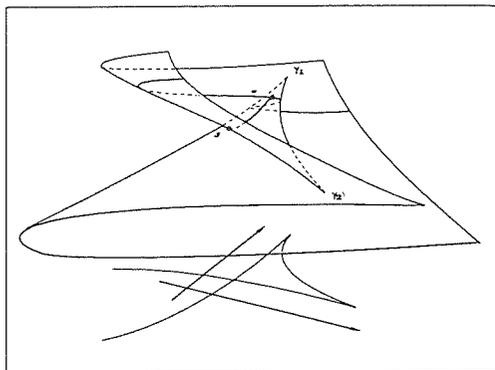
Fig. 37



produite par la traduction spontanée de "l'idée d'infini" propre à l'artiste. On peut rencontrer à cette occasion des figures "convergentes" aussi bien que "divergentes" (cf. fig. 37) et il n'est pas rare que la représentation mentale de "l'échelle de Jacob" fasse appel à des archétypes propres à la culture environnante : ainsi de nombreux peintres, avant Alberti, avaient admis une loi de dégradation des longueurs calquée sur l'image de la fig. 14, c'est-à-dire sur une progression géométrique.

Le second principe d'Alberti consiste, comme je l'ai indiqué plus haut, en un *changement de regard* qui permet de s'appuyer sur une construction intermédiaire représentant la situation *de profil*. Il y a là un phénomène particulièrement intéressant : c'est celui de *l'échange des axes y'y et x'x*, et cet échange est même effectué explicitement sur la construction, puisque ce sont les nœuds du carrelage transversal qui *vont être lus* comme les images de la section frontale de celui-ci. En d'autres termes (fig. 38) Alberti fait opérer une *bifurcation* au point représentatif *c*, non plus dans la direction de *y'* mais dans la direction de *x*, de façon à trouver la fronce γ_2 qui fournit la solution.

Fig. 38



Dès lors le transfert d'une figure du type de celle du carrelage choisi suppose une séparation en deux types d'éléments : d'une part ceux qui vont relever du principe transversal et nécessiter un passage par le cusp γ_1 , d'autre part ceux que l'on doit associer au principe de profondeur et qui vont devoir être gérés *via* le cusp γ_2 .

b. condensation et "queue d'aronde"

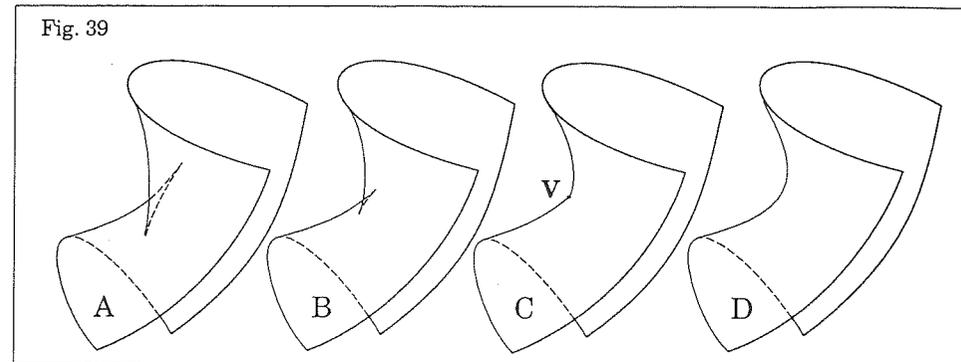
Pour faire comprendre le phénomène que je voudrais décrire maintenant, je commencerai par une remarque sur la méthode d'Alberti, pour parler d'une "dimension" que j'ai systématiquement laissée dans l'ombre jusqu'ici : le problème de la *représentation des verticales*. Envisageons par exemple la question de la représentation d'une colonne posée verticalement en un point donné du carrelage (que nous savons "transférer sur le tableau" par la méthode Alberti). La représentation de cette colonne est évidemment susceptible d'induire des erreurs supplémentaires par rapport à l'étude que je viens de faire et peut relever à son tour de phénomènes d'obstacles. Cela dit, la solution cherchée relève d'une démarche analogue à celle qui aboutit au "principe transversal" et sur laquelle je ne m'étendrai pas ici.

§ I et l'on peut légitimement considérer que le "squelette" important réside simplement dans le schéma de la fig. 38.

Nous allons devoir en revanche envisager maintenant une évolution de la figure 38 qui est liée à la *compréhension* (cf. § 1) et ceci va nous obliger à considérer un "champ" plus compliqué de "feuilles" de dimension deux ...

Comme je l'ai précisé en effet, la *compréhension* recouvrirait le phénomène de "recul des fronces", c'est-à-dire d'aplatissement (ou de "repassage"), repoussant les *cusps* à force de fréquentation des chemins qui passent par ceux-ci. On aura une idée intuitive du phénomène en considérant (cf. fig. 39) la rotation d'un pli A, dont le flan apparaît *d'abord* selon une configuration à deux fronces (fig. 38) pour évoluer peu à peu vers un bord simple de pli standard. Le "film" constitué par les images successives de cette transformation donne un *champ de surfaces* qui peut faire penser au champ précédent mais qui est structurellement très différent. Il traduit d'une part la transition entre la fig. 38 et une configuration de pli simple et d'autre part une "condensation" des deux cusp en un point V à l'instant du passage entre les deux états A et D de la fig. 39.

Fig. 39



Ce champ un peu complexe doit mathématiquement être regardé comme une singularité de dimension trois. Cela consiste (en simplifiant) à s'attacher au point V de la figure 39, et à considérer les "feuilles" A, B, C, D, etc. comme des éléments d'un voisinage du point singulier. C'est ce que l'on appelle classiquement une "queue d'aronde" et ceci va nous permettre de compléter de la façon suivante la modélisation épistémologique que nous avons entreprise au paragraphe précédent :

1 — en termes "d'images mentales", le point V (centre de la queue d'aronde) correspond au point de "l'espace des états" résumé par la fig. 30. Il contient tous les savoirs conquis par le quattrocento et les condense sur deux corollaires de la méthode d'Alberti : *position* du point de fuite principal à la hauteur de l'observateur, lien entre distance et point de convergence des diagonales.

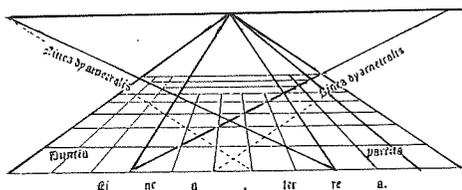
2 — entre Alberti et Vignola, l'accès complet au point V aura nécessité un siècle mais cela ne signifie pas que le champ menant de A à C (fig. 39) ait véritablement eu une telle vitesse de déroulement. On peut au contraire imaginer que chacun des auteurs a atteint son propre "point V" comme résultat de sa "compréhension" et que l'on a donc plutôt affaire à divers champs, liés à des "queues d'arondes" voisines.

Ainsi Alberti "condense" lui-même ses deux fronces sur une image qui contient la propriété du point de fuite principal et l'intuition de l'importance de la diagonale, toutefois il ne parvient à la propriété de hauteur du point principal qu'à travers un "passage à la limite" : c'est, d'une certaine façon, une jonction comme celle que j'ai évoquée à propos du cusp γ_2 de la fig. 14. C'est à Piero della Francesca qu'il reviendra d'effectuer cette jonction en "termes finis", c'est-à-dire grâce au théorème de

Thales ; et on peut d'autre part considérer (cf [3]) que Piero avait compris toute la propriété des diagonales et du point de distance mais qu'ici, à son tour, il ne disposait pas de jonction évitant le "passage à la limite"... ce qui sera réservé à Vignola.

3 — On peut admettre (cf. fig. 40) que Viator (sans en donner les clés), disposait déjà d'une "queue d'aronde" centrée sur un point V très proche de la fig. 30.

Fig. 40



Mais indépendamment d'une relation quelconque du cheminement qu'il a pu effectuer, ou si l'on préfère, en l'absence d'indications sur le "champ" voisin de V, il y a chez Viator un condensé fascinant de ce qui s'est passé au quattrocento : la *rotation* de la double fronce A de la figure 39. En effet, on aura sans doute remarqué que celle-ci comporte (ou "suppose", ou "entraîne"...) deux aspects ; le premier concerne le "changement de repère" indispensable à la rotation, le second touche à l'apparition d'un *bord de pli* à partir du stade C. Le mot "fascinant" n'est peut-être pas trop fort si l'on se laisse aller aux deux remarques suivantes :

Première remarque : entre le stade A de la fig. 39 (qui correspond à la fig. 38 paramétrée suivant les axes de transversalité et de profondeur) et le stade C, le repère à trois dimensions qui est attaché à la feuille A a

tourné de façon à faire apparaître deux nouveaux axes. Les deux nouveaux paramètres qui correspondent à ces axes sont de deux origines différentes : l'un provient de l'apparition (grâce à la rotation) de l'axe "de bout" dans A qui pourrait très bien correspondre à un *déplacement vertical* comme troisième coordonnée dans la fig. 38, l'autre provient de la "superposition" des axes y'y et x'x de profondeur et de transversalité qui, au cours de la rotation, met en évidence l'importance des axes diagonaux... Si l'on se rapporte à l'exposé [1] on pourra rapprocher cela de ce qui est dit du "savoir déclaratif" porté par l'espace tangent au point singulier : c'est précisément dans ce couple "hauteur-diagonale" que réside en définitive le savoir, plutôt que dans le couple "profondeur et transversalité" ...

Deuxième remarque : sans doute parce qu'il ne s'arrête pas aux antécédents du stade C de la fig. 39, Viator présente une originalité par rapport aux autres auteurs : il s'attache à préciser le mieux possible le stade C lui-même. Or, comme je l'ai laissé entendre plus haut, le stade C ne contient pas uniquement le point V (privilegié parce que c'est lui le centre du phénomène d'éclatement en deux cusp) mais il fait apparaître toute une ligne

de points singuliers qui appellent une forme d'interprétation en termes d'attracteurs. C'est évidemment l'occasion de revenir sur le problème des points de fuite en général... et force est bien de constater que Viator est sans doute le premier à en faire état (fig. 41) et à les utiliser systématiquement dans ses constructions au même titre que le point de fuite principal ou que le point de distance ! Ce pourrait être une "explication" au hiatus entre les possibilités théoriques du quattrocento, cantonnées en quelque sorte à une atteinte du point V, et l'*extrapolation* surprenante de ce savoir au sein d'un "champ de savoirs" intuitifs. Non pas accessibles mathématiquement, mais *nécessaires*, parce que partie intégrante de la configuration à laquelle aboutit le processus mental...

c. Stade du miroir et mise en abîme

Les progrès sur la question, c'est-à-dire l'intégration de tous les savoirs étalés par Viator à un savoir supérieur, devront attendre un siècle et vont être *subordonnés à un changement d'approche*, qui fait apparaître historiquement ce que l'on ressent forcément sur la schématisation de la queue d'aronde : celle-ci débouche en fait sur une sorte d'*impasse*, dans la mesure où

Fig. 41

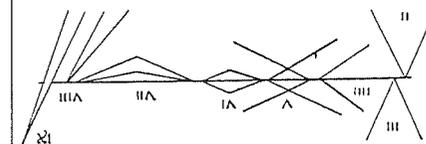
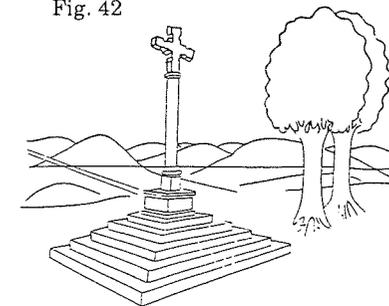


Fig. 42



le point V et le pli qui l'englobe marquent l'aboutissement (et la fin) d'un processus ... Ce n'est que vers 1600 que des considérations du type de celles que l'on utilise aujourd'hui (cf. § II.a) commencent à constituer des éléments de justification, de clarification ou de conviction.

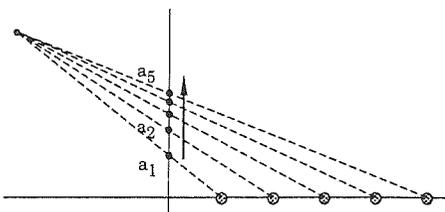
L'état de la perspective entre 1400 et 1500, et même entre 1500 et 1600, c'est avant tout l'état de la *géométrie de l'espace* à une époque et il faut bien prendre conscience que l'économie de moyens d'un Alberti (ou d'un Vignola) reflète en réalité l'impossibilité de manipuler d'autres éléments proprement géométriques que ceux que j'ai décrits jusqu'à présent. En ce sens, le modèle constitué par la fig. 39 me semble, à tout le moins, montrer la miraculeuse puissance d'une approche qui trahit avant tout ses limites. Il n'en est que plus intéressant de chercher à situer cette période dans le mouvement plus large des idées qui nous apparaît aujourd'hui.

Les "peintres-géomètres" du quattrocento ont dû souvent penser qu'il leur revenait simplement de "redécouvrir" les arcanes perdus de la perspective des Anciens. Ce faisant, il se sont largement inspirés de leurs méthodes de raisonnement et l'œuvre d'un Piero della Francesca n'a pas grand chose à envier à la rigueur des traités d'Euclide. Mais il serait sans doute faux de croire que sur le problème qu'ils se sont posé – et qu'ils ont probablement été les premiers à bien poser – la science grecque ait vraiment dépassé le stade des erreurs modélisées par la fig. 32. Au contraire, Alberti (ou ses contemporains) ont non seulement résolu le problème de façon magistrale mais ils ont, en plus, dégagé des méthodes aussi originales que celle de la projection centrale sur un plan, ou que celle de la "mise aux car-

reaux", dans laquelle il faut bien voir les prémices de la toute puissance du repérage cartésien.

Et s'il convenait d'insister sur l'apport particulier du quattrocento en ce qui concerne la notion de "point de fuite" (ne serait-ce que parce qu'il s'agit là de rien moins que de la première "actualisation de l'infini" qu'il soit possible d'étudier épistémologiquement de façon approfondie), il suffirait de considérer la situation que j'ai rapportée à la notion "d'échelle de Jacob" à propos du paradoxe de Zénon. Après Alberti, les "images" qu'il devient possible d'attacher à ce type d'attracteur auront profondément changé sur au moins deux plans et vont constituer sur chacun de ces deux plans une base particulièrement propice aux évolutions futures de l'analyse et de la géométrie.

Fig. 43



Comme on l'a vu, en effet, la clé de la compréhension du phénomène de point de fuite réside d'abord dans un passage à la limite original : celui de la suite a_1, a_2, \dots de la fig. 43. En l'introduisant, Alberti aura su se dégager de l'idée envahissante que les phénomènes de convergence étaient plus ou moins commandés par une suite géométrique et il aura ainsi montré que des phénomènes plus complexes peuvent, eux aussi, être maîtrisés mathématiquement. Par ailleurs il serait dommage de ne pas

mesurer l'importance intrinsèque de la résolution d'une forme nouvelle à deux dimensions de l'attracteur "échelle de Jacob" : celle de l'image d'un carrelage *prolongé indéfiniment en profondeur*. La fig. 18 (comme beaucoup de tableaux de la Renaissance) donne une idée du caractère surprenant du résultat qui préfigure, on le sait, les images que l'on peut attacher depuis le XVII^e siècle au concept de plan projectif, mais ce que l'on a sans doute moins à l'esprit c'est sans doute le côté "révolutionnaire" du problème posé : d'une approche de l'idée de parallèles cultivée par les Grecs, que l'on pourrait qualifier de "locale" et qui consistait à ramener systématiquement le problème du parallélisme "à distance finie" par des considérations d'angles, on va pouvoir passer à une vision "globale" et traiter le problème en termes de propriétés de concurrence, ou de non-concurrence "à l'infini"...

Mais nous rejoignons là, paradoxalement, les obstacles qu'il restait à franchir au quattrocento en matière de géométrisation de l'espace. Car ce n'est pas le moindre paradoxe de constater que les "géomètres-peintres" sont parvenus à *représenter l'espace sans géométrie* dans l'espace : ils ont *vu* (et largement maîtrisé), mais pendant deux siècles ils ont accumulé des savoirs sans trouver le véritable recul qui permettait de "comprendre" ces savoirs. Car s'il faut retenir une chose des méthodes de la Renaissance c'est avant tout une *absence* : celle des obliques ! Qu'il s'agisse même des obliques contenues dans un plan horizontal... La géométrie du quattrocento ne permet pas de gérer d'autres plans que les plans horizontaux ou frontaux.

Cela témoigne d'une *position du peintre vis-à-vis de l'espace* qui l'entoure qu'il serait

certes tentant de rapprocher de celle d'un enfant dans le cadre d'une "épistémologie génétique", mais que je me contenterai de décrire pour elle-même avant de conclure cet exposé.

Je voudrais en effet attirer l'attention sur un rapprochement intéressant entre cette genèse de la géométrie de l'espace et le procédé que l'on désigne sous le nom de "mise en abîme" et qui consiste généralement à concevoir des images emboîtées qui donnent l'impression, à la limite, de se contenir indéfiniment elles-mêmes, comme dans le cas où l'on se regarde dans un système de deux miroirs parallèles et opposés, ou comme dans la situation d'une émission de télévision où l'on peut apercevoir, sur un écran de contrôle, une image réduite identique à celle que l'on reçoit sur son propre téléviseur et qui offre, à son tour, l'occasion d'imaginer une cascade d'écrans de plus en plus petits répétant la même image.

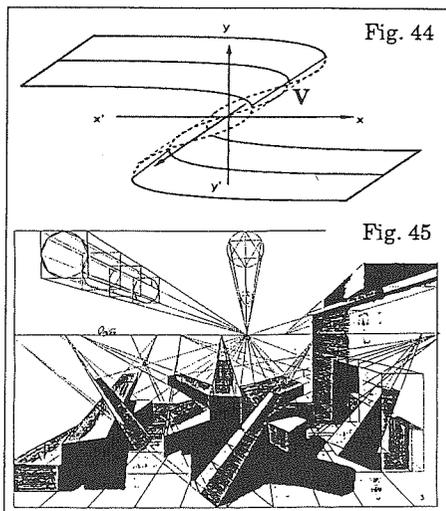
En première analyse, on a tendance à penser qu'en inventant une méthode "réaliste" pour représenter l'espace, les artistes du quattrocento ont pu se trouver placés, d'entrée de jeu, face à un phénomène de "mise en abîme" ; et il n'est effectivement pas difficile de constater que le plus souvent un tableau représentant, par exemple, une scène se déroulant à l'intérieur d'une église était tout simplement destiné à être placé... face à des spectateurs assis eux-mêmes dans une église. Or il ne semble pas que cet "emboîtement" puisse mener réellement à un processus de mise en abîme ; bien au contraire. Il est frappant en effet de constater à quel point les œuvres picturales du XV^e siècle, sous prétexte d'une mise en scène de l'espace, offrent en réalité un *miroir* de la subjectivité des artistes. Sans entrer dans de trop longs développements,

il suffit d'observer le rôle presque mystique attribué à des points comme le point de fuite central ou comme le point de distance dans la majorité des compositions : l'absence de recul théorique a très souvent conduit à les assimiler purement et simplement à la place de l'observateur à l'intérieur du tableau ; et aujourd'hui encore la plupart des historiens de l'art n'hésitent pas à parler d'une composition "à deux points de vue" lorsqu'ils ont affaire à un tableau qui fait apparaître deux points de fuite sur le schéma de la fig. 42 ! Et s'il fallait une preuve supplémentaire de ce que l'on pourrait appeler un "stade du miroir", je renvoie le lecteur à la fig. 21 où il serait bien en peine d'expliquer autrement la présence quelque peu étrange de l'œil qui apparaît en haut à gauche, à l'emplacement du point de fuite principal...

Cette gravure est pourtant extraite d'un traité de perspective ([4]) édité par Danti vers 1585 et, même s'il faut l'attribuer à Vignola, la date n'en remonte guère qu'aux alentours de 1535. C'est comme je l'ai dit une époque où les savoirs se résument à la constitution d'un "pli" et sont loin d'englober une vision stabilisée de la géométrie de l'espace. Epistémologiquement parlant, la situation pourrait se ramener à un pli du type de la fig. 44 où le pli supérieur ne serait rien d'autre que le pli simple dont nous avons étudié la constitution au paragraphe précédent (cf. fig. 39).

Jusqu'aux alentours de 1600 on rencontre (cf. fig. 45) des erreurs fréquentes qui sont manifestement le résultat d'un attracteur "les points de fuite sont situés sur la ligne d'horizon" et d'une dynamique du type de celles que j'ai déjà décrites.

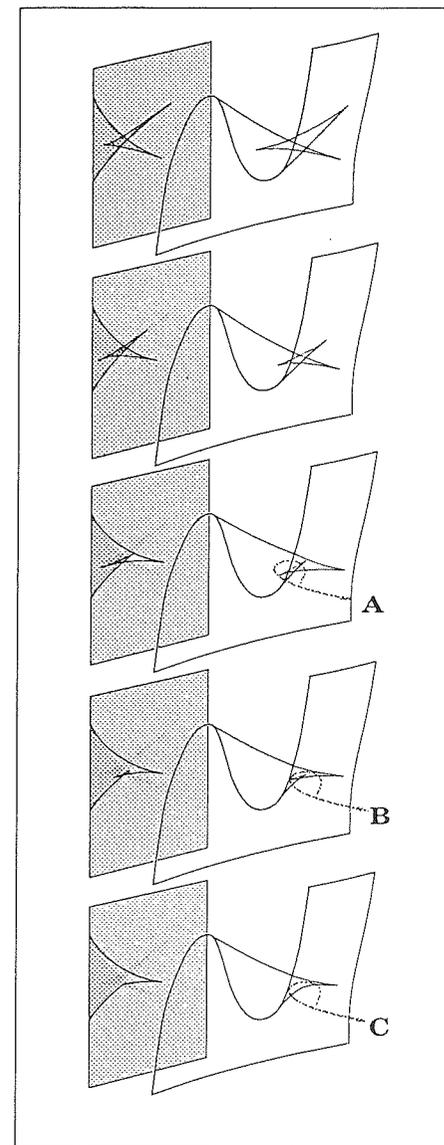
Le "sens de l'histoire" invite donc les mathématiciens à surmonter ce pli, c'est-à-dire à lui trouver une "fronce". C'est cette



"fronce" qui détient la clé de la géométrie dans l'espace et qui sera maîtrisée à partir du début du XVII^e siècle. Je tâcherai d'en expliquer la complexité dans un futur exposé, car (je l'ai déjà signalé au § II.a) il ne s'agit pas là d'une fronce simple, mais d'une singularité de dimension 4 connue sous le nom "d'aile de papillon".

Pour le dire sur un dessin (cf. fig. 46) le pli de la figure 44 (dont la partie supérieure résulte de la transformation résumée sur la fig. 39) doit être regardé comme la dernière phase du schéma d'évolution représenté par la fig. 46 et constitue une approche trop partielle de la singularité totale pour suffire à sa résolution... On peut cependant se faire une idée du genre de problèmes qui doivent être modélisés pour aboutir à la singularité en question en revenant aux explications que j'ai dû donner lorsqu'il s'est agi de résumer les principes de la perspective.

Fig. 46



En effet, les figures 16, 20, 22 ou 23 constituent ce qu'il faut cette fois regarder comme une réelle *mise en abîme* géométrique de l'espace. Il ne s'agit plus de dessiner une scène quelconque, mais de représenter une scène où un observateur regarde un objet et (surtout) de figurer de façon précise et cohérente l'image observée sur l'écran en l'intégrant au dessin global. Pour peu qu'on y réfléchisse un peu, cet emboîtement supplémentaire dans la "mise en abîme" fait appel de façon inévitable à toutes les ressources d'une géométrie dans l'espace très sophistiquée... De même par exemple que les problèmes d'éclairages et d'ombres, que les peintres se gardaient bien d'aborder géométriquement dans cette période de la Renaissance.

On peut considérer, si l'on veut, que cette transition nécessite un nouveau "changement de point de vue" analogue à celui qui marque la révolution copernicienne, où il ne s'agit plus d'être capable de rapporter à la position de la terre les orbites apparentes des planètes mais aussi de concevoir un modèle cohérent englobant dans une même chorégraphie non seulement le mouvement des planètes mais aussi celui de la terre elle-même.

Faut-il dès lors s'étonner de l'absence de progrès manifestée en matière de perspective entre 1500 et 1600 ? Il me semble au contraire qu'il faille rechercher dans cette longue période de maturation les signes de gestation d'une telle révolution... J'en ai en fait donné deux au cours de cet exposé car j'ai utilisé au § II.a les deux seules figures que je connaisse (et qui soient antérieures à 1600) susceptibles d'expliquer la perspective à travers une réelle tentative de *mise en abîme* : Ce sont les fig. 15 et 21 bis, extraites du traité de Vignola et Danti ([4]).

Malgré leurs imperfections, elles témoignent à elles seules de la naissance d'une nouvelle problématique et de la révolution qui s'opère au XVI^{ème} siècle. C'est de *notre* espace et je pense avoir montré en quoi *notre idée* de l'espace n'est, au fond, pas si évidente que l'on a tendance désormais à le croire ...

On me permettra, je l'espère, de faire appel pour conclure à tous ceux qui, de Stengel à André Breton en passant par Freud, se sont penchés sur une question qui n'est peut-être pas si différente : celle de l'identité entre *l'espace et le temps réels* et l'espace et le temps perçus dans son sommeil par *un sujet en train de rêver*. Tous ont été saisis par le processus de mise en abîme qui transparait souvent lorsque le rêveur intègre à son rêve un événement *qui lui semble rêvé...*

Ne pourrait-on pas transposer à la géométrie de l'espace l'explication communément admise pour le "rêve dans le rêve" et qui lui confère avant tout le rôle de *rendre plus crédible* le contenu du rêve lui-même ?

Il est bien difficile de se défendre de l'idée que la réussite de la géométrie est précisément dans cette capacité magique à se mettre elle-même en abîme, afin d'intégrer l'image du "réel".

A moins qu'il ne s'agisse que d'un rêve : le rêve d'une ambition condamnée, par essence, à se faire géométrie de la géométrie, science de la science, connaissance de la connaissance, ...

Pour être à son tour une "magie qui réussit"...

Bibliographie

[1] *Comptes rendus du colloque Inter-Irem d'histoire et d'épistémologie des mathématiques de Lyon 1991*. Publications de l'Irem de Lyon.

[2] Alberti, *De Pictura*, 1435.

[3] *Aux confins de l'art et de la science : le de prospectiva pingendi de Piero della Francesca*, Jean Pierre Le Goff, in *Destins de l'art desseins de la science*, actes du colloque Aderhem de Caen 1986.

[4] Vignola et Danti, *Les deux règles de la perspective*, Bologne 1582

[5] *Jean Pélerin Viator ...*, Liliane Brion-Guerry, Ed. Les Belles Lettres, Paris 1962.

On trouvera aussi d'intéressants éléments historiques dans :

[6] *La perspective en première scientifique ...*, Jean Pierre Le Goff, in *Repères-Irem n°7*, Avril 1992.

J'en profite pour remercier cet auteur pour la grande patience avec laquelle il sait répondre aux questions les plus saugrenues sur l'histoire de la perspective ...

COMMISSION INTER-IREM HISTOIRE ET EPISTEMOLOGIE DES MATHÉMATIQUES

PROBABILITE ET INFINI

Actes du 9^{ème} colloque INTER IREM
Epistémologie et Histoire des Mathématiques