
Le projectif ou la fin de l'infini ¹

Remarques sur l'ontologie des objets mathématiques

Rudolf Bkouche
IREM de Lille

*"la construction des concepts
dépend de la façon de poser les
problèmes, laquelle varie à son
tour avec le contenu même de la
civilisation"*²

Max Weber

Introduction

*"Pourquoi la droite a-t-elle deux points à l'infini en analyse et un
seul point à l'infini en géométrie ?"*

Cette question qui me fut posée il y a quelques années par une étudiante en licence de mathématique soulève le caractère problématique des concepts mathématiques, lequel caractère problématique implique que l'on ne peut comprendre un concept mathématique qu'à travers les problématiques qui ont conduit à le construire (que ce soient les problématiques originelles ou des problématiques ultérieures nous importe peu ici).

La question de l'infini n'échappe pas à ce caractère problématique, d'autant que la notion d'infini se présente sous de multiples aspects et que les diverses constructions des mathématiciens autour de cette notion se relient à ces divers aspects. Nous nous proposons ici de montrer la spécificité de cet infini géométrique qui se met en place avec la

¹ Ce texte qui reprend, en le développant, mon exposé au colloque de Brest, peut être considéré comme une suite de mon exposé au colloque de Lyon sur *"La Figure et l'Espace"* (cf. Rudolf Bkouche, "De la géométrie sans figure" in *La Figure et l'Espace*, Actes du colloque Inter-IREM Épistémologie, Lyon 1991, IREM de Lyon 1993).

² Max Weber, *Essai sur la théorie de la science* (traduit de l'allemand par Julien Freund), Plon, Paris 1965; p. 203

naissance du projectif et qui conduit, comme nous le verrons, à l'élimination de l'infini, ou plutôt à sa *banalisation*.

Nous pourrions alors revenir à la question posée ci-dessus, après avoir essayé d'expliciter les raisons qui ont conduit à introduire la droite numérique achevée en analyse réelle³ d'une part et d'autre part celles qui ont conduit à imaginer le point de vue projectif⁴.

Le point infiniment éloigné (Kepler)

Il est dit dans certains ouvrages d'histoire des mathématiques, que la notion de point à l'infini a été introduite pour la première fois par Kepler; en fait nous verrons qu'il s'agit bien plus d'un point infiniment éloigné que du point à l'infini tel qu'il apparaît aujourd'hui dans la géométrie projective.

En 1604, Kepler publie les *Paralipomènes à Vitellion*⁵, première partie d'un traité d'optique *Astronomiae Pars Optica* (pour une étude de cet ouvrage nous renvoyons à la présentation de Catherine Chevalley).

Pour les besoins de l'optique, Kepler introduit par deux fois, et de deux façons différentes, la notion de point à l'infini, ou plutôt comme je l'ai dit ci-dessus, la notion de point infiniment éloigné.

Au chapitre II, étudiant un problème d'ombre au soleil, Kepler énonce le postulat (que nous citons dans la traduction de Catherine Chevalley)

*"Deux droites lumineuses issues d'une même source ponctuelle de lumière sont considérées du point de vue de la sensation comme équivalentes à des parallèles si elles sont à une distance immensément grande de la base à laquelle elles sont toutes deux reliées, bien qu'en réalité elles soient concourantes à leur origine".*⁶

Ainsi, il s'agit bien plus d'une approximation (justifiée "du point de vue de la sensation") permettant de représenter l'ombre lorsque la

source est "immensément" éloignée, que du point de concours de deux droites parallèles.

Par contre, au chapitre IV, Kepler va beaucoup plus loin lorsqu'il considère une parabole comme une section conique dont les foyers sont séparés par une "distance infinie"⁷. En fait, toujours pour les besoins de l'optique, Kepler veut présenter les propriétés des sections coniques "d'une manière mécanique, analogique et populaire".

Considérant cinq espèces de sections coniques: la droite, le cercle, la parabole, l'hyperbole et l'ellipse, Kepler écrit:

*"Entre ces lignes -et pour parler plutôt analytiquement que selon la Géométrie- il y a un ordre, dépendant de leurs propriétés, qui est le passage de la ligne droite à la parabole par l'intermédiaire d'une infinité d'hyperboles, puis de là au cercle par l'intermédiaire d'une infinité d'ellipses."*⁸

La parabole a ainsi une position intermédiaire entre l'hyperbole et l'ellipse, la ligne droite et le cercle étant les courbes extrêmes; Kepler le précise après avoir introduit les foyers.

Kepler, comparant la position des foyers dans les cinq espèces de coniques, remarque que le cercle possède un foyer unique situé en son centre, que l'ellipse possède deux foyers situés à l'intérieur d'icelle, également éloignés du centre; la parabole quant à elle, possède un foyer situé à l'intérieur et "un autre foyer doit être imaginé sur l'axe, soit à l'intérieur, soit à l'extérieur, éloigné du premier foyer par une distance infinie"⁹, enfin l'hyperbole possède deux foyers, l'un intérieur, l'autre extérieur. Pour être complet, Kepler remarque que, "par analogie", pour la ligne droite "les deux foyers coïncident avec la droite elle-même et qu'ils sont un seul et même point"¹⁰.

On obtient ainsi les différentes espèces de sections coniques en faisant varier la distance entre les foyers; pour plus de détails, nous renvoyons à l'ouvrage de Kepler.

Ainsi la notion képlérienne de point à l'infini est liée, soit à une approximation (des droites concourant en un point immensément éloigné pouvant être considérées, du point de vue de la sensation,

³ Nicolas Bourbaki, *Topologie générale*, Ch. IV: Les nombres réels (deuxième édition), Paris, Hermann 1960

⁴ Rudolf Bkouche, "La naissance du projectif" in *Mathématiques et Philosophie* (édité par Roschdi Rasched), CNRS Paris 1991; p. 239-285

⁵ Kepler, *Paralipomènes à Vitellion* (traduction et notes par Catherine Chevalley), Vrin, Paris 1980. Le texte original latin *Ad Vitellionem Paralipomena* a été réédité par Culture et Civilisation, Bruxelles 1968

⁶ Kepler, *Paralipomènes à Vitellion* p. 154

⁷ *ibid*, p. 222-223; le terme latin est "infinito intervallo".

⁸ *ibid*, p. 220

⁹ *ibid*, p. 222

¹⁰ *ibid*, p. 223

comme parallèles), soit au mouvement (le point à l'infini comme point infiniment éloigné): ce n'est pas encore le point à l'infini de la géométrie projective, point de concours d'une famille de droites parallèles, point inconcevable pour Kepler partisan d'un monde fini et pour lequel la distance infinie dont il parle dans les *Paralipomènes à Vitellion* relève de l'infini en puissance et non de l'infini en acte.

Pour une discussion de la position de Kepler et des arguments qu'il développe contre les partisans d'un monde infini, nous renvoyons à l'ouvrage de Koyré *Du monde clos à l'univers infini*¹¹.

Le point à distance infini (Desargues)

Toute autre est la démarche de Desargues. Celui-ci publie en 1639 le *Brouillon Project d'une Atteinte aux Evénemens des Rencontres du Cône avec un Plan*¹²; après avoir précisé:

"Icy toute ligne droite est entendue alongée au besoin à l'infiny d'une part et de l'autre".¹³

Desargues définit ce qu'il appelle une ordonnance de droites,

"Pour donner à entendre de plusieurs lignes droictes, qu'elles sont toutes entre elles ou bien parallèles, ou bien inclinées à mesme point, il est icy dit, que toutes ces droictes sont d'une mesme ordonnance entre elles, par où l'on concevra de ces plusieurs droictes, qu'en l'une aussi bien qu'en l'autre de ces deux espèces de position, elles tendent comme toutes à un mesme endroit.

L'endroit auquel on conçoit que tendent ainsi plusieurs droictes en l'une aussi bien qu'en l'autre de ces deux espèces de position, est icy nommé, but de l'ordonnance de ces droictes."¹⁴

Desargues précise alors que si les droites sont parallèles, le but est dit "à distance infinie", si les droites sont concourantes, le but est dit "à distance finie".

Ici la définition est en quelque sorte *relationnelle*, un point est

¹¹ Alexandre Koyré, *Du monde clos à l'univers infini* (traduit de l'anglais par Taïssa Tarr), Gallimard, Paris 1973; chapitre III.

¹² Girard Desargues, *Brouillon Project d'une Atteinte aux Evénemens des Rencontres du Cône avec un Plan* (1639), in René Taton, *L'oeuvre mathématique de Desargues*, Vrin, Paris 1981.

¹³ *ibid.*, p. 99

¹⁴ *ibid.*, p. 100

déterminé par les droites qui concourent en ce point, cela est vrai pour une famille de droites parallèles comme pour une famille de droites concourantes. Ainsi, et cela se précise dans le développement de l'ouvrage, points à l'infini et points à distance finie participent des mêmes propriétés et jouent le même rôle; c'est ainsi que Desargues réunit cônes et cylindres sous l'appellation commune de *rouleaux*. Cette analogie explicite renvoie aux constructions perspectivistes, comme nous l'expliquons dans la suite.

On sait depuis les premiers traités de perspective que les perspectives des perpendiculaires au plan du tableau convergent au point de fuite principal (la projection de l'oeil sur le plan du tableau). D'autre part Piero della Francesca dans son traité de perspective *De Prospectiva Pingendi* (écrit vraisemblablement entre 1472 et 1475 mais imprimé pour la première fois en 1899) a remarqué que les droites horizontales inclinées à 45 degrés sur la direction perpendiculaire au plan du tableau (les diagonales d'un dallage) convergent vers ce qu'on appelle les points de distance, points de la ligne d'horizon (la ligne horizontale du tableau passant par le point de fuite principal) situés de part et d'autre du point de fuite principal à une distance égale à la distance de l'oeil au tableau¹⁵. La convergence des diagonales était connue empiriquement des peintres de l'Europe du Nord et elle sera systématisée par Jean Pélerin dit Viator dans son *De Artificiali Perspectiva*¹⁶ publié en 1505, mais le texte peu explicite qui accompagne les dessins de Viator ne donne aucune indication sur le statut des points de convergence que l'auteur appelle les *tiers-points*.

Cependant la notion générale de point de fuite d'une famille de droites parallèles sera définie et légitimée seulement au début du XVII^e siècle, d'abord par Guido Ubaldo del Monte qui publie en 1600 les *Perspectivae Libri Sex* (les six livres de perspective)¹⁷, puis par Simon Stevin qui publie en 1605 *De sciagraphia* (littéralement: du dessin des ombres), ouvrage qui sera publié en français par Girard en 1634 sous le titre *De la Scénographie, dite vulgairement Perspective*¹⁸.

Ainsi on sait au début du XVII^e siècle qu'une famille de droites

¹⁵ Jean-Pierre Legoff, "Une oeuvre aux confins de l'Art et de la Science: "De Perspectiva Pingendi" de Piero della Francesca", *Les Cahiers de la Perspective* n°4, 1987

¹⁶ Jean Pélerin dit Viator, *De Artificiali Perspectiva* (2^e édition 1509), Librairie des Arts et Métiers, Nogent-le-Roi 1978

¹⁷ Guido Ubaldo del Monte, *Les Six Livres de Perspective* (traduction française et notes par Christian Guipaud), thèse Paris 1991 (à paraître).

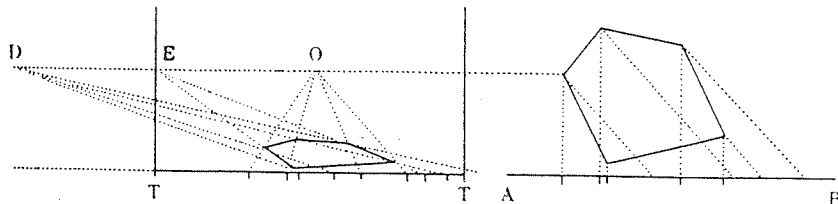
¹⁸ Simon Stevin, *De Sciagraphia* (1605), traduction française par Albert Girard in *Les Oeuvres mathématiques* de Simon Stevin, Leyde 1634

parallèles est représentée en perspective par une famille de droites concourantes si les droites de la famille ne sont pas parallèles au plan du tableau, par une famille de droites parallèles si les droites de la famille sont parallèles au plan du tableau.

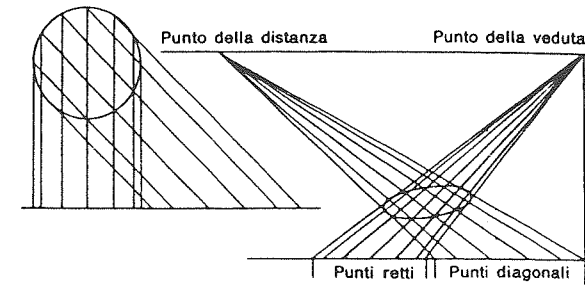
Mais ce qui nous importe ici, c'est la façon dont on utilise ces droites parallèles devenues concourantes pour *construire l'espace dans le tableau*, c'est-à-dire mettre en place sur le tableau la représentation des différents points de l'objet que l'on dessine.

Ainsi Vignola dans son ouvrage *Le due regole della prospettiva pratica* (les deux règles de la perspective pratique)¹⁹ publié après sa mort par Danti en 1582, montre comment la représentation perspective de deux familles de droites parallèles permet de construire la perspective de l'objet; il suffit de dessiner les perspectives des droites de chacune des familles, lesquelles passent par les points de fuite (ici le point de fuite principal et un point de distance), la correspondance étant assurée par les points des droites situées sur la ligne de terre (la ligne d'intersection du tableau avec le plan horizontal de référence), lesquels points coïncident avec leurs représentations perspectives.

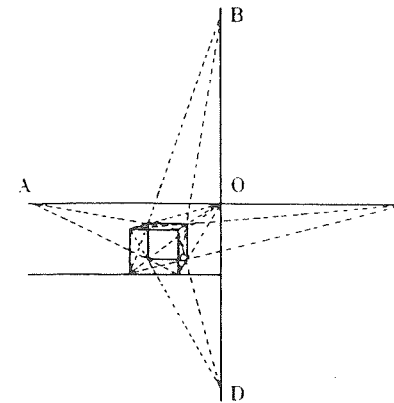
Nous reproduisons ici deux figures du traité de Vignola- Danti, la première indique la construction de la perspective d'un polygone situé dans le plan horizontal, la seconde indique la construction de la perspective d'un cercle; dans chacune des figures on représente l'objet donné dans son plan horizontal quadrillé par les deux familles de droites parallèles, la représentation perspective est alors obtenue en représentant le quadrillage en perspective à partir des points de fuite et des points de la ligne de terre qu'on a reportés à partir du dessin dans le plan horizontal.



¹⁹Jacomo Barozzi da Vignola, *Le due regole della prospettiva pratica* (commentaires de E.Danti), Bologne 1582



Notons que Vignola utilise aussi les points de distance situés sur la verticale du point de fuite principal ce qui lui permet de construire la perspective d'un cube.



On a ainsi la mise en place de ce qu'on appelle aujourd'hui un *système de lignes coordonnées*, permettant à la fois de structurer l'espace et de le représenter sur le plan du tableau.

C'est une telle *réticulation* du plan horizontal qu'utilise Desargues en 1636 dans un opuscule de douze pages *Exemple de l'une des manières universelles du S.G.D.L. touchant la pratique de la perspective...*²⁰ pour construire la représentation d'un objet.

Desargues termine en énonçant, "*pour les contemplatifs*", les principes généraux de la représentation perspectiviste; il remarque alors que des droites parallèles deviendront, en perspective, des droites concourantes ou parallèles suivant qu'elles ne sont pas ou sont parallèles au plan du tableau, et de même que des droites concourantes devien-

²⁰ Girard Desargues, *Exemple de l'une des manières universelles du S.G.D.L. touchant la pratique de la perspective...* (1636), réédité par Abraham Bosse in *Manière universelle de Mr Desargues de pratiques la perspective...* (1647); un fac-simile est publié in J.V. Field and J.J. Gray, *The Geometrical Work of Girard Desargues*, Springer Verlag, New York, Berlin, Heidelberg 1987

dront, en perspective, concourantes ou parallèles selon que la droite joignant l'oeil au point de concours de ces droites rencontre ou ne rencontre pas le plan du tableau.

Ainsi, sans que cela soit dit explicitement, familles de droites parallèles et familles de droites concourantes apparaissent analogues du point de vue de la perspective. Cette analogie sera explicitée et exploitée dans le *Brouillon Project* de 1639.

La démarche de Desargues s'appuie sur la mise en évidence d'une relation point-droite *invariante* par perspective (pour employer un langage d'aujourd'hui). C'est cette invariance qui permet de considérer points à l'infini et points à distance finie comme analogues, de *désinfiniter* l'infini en quelque sorte. C'est la différence essentielle entre la démarche de Desargues et celle de Kepler; celui-ci en considérant, par analogie avec l'ellipse, que la parabole a un second foyer à distance infinie, définit un premier mode d'unification des coniques via une famille de courbes qui se déduisent les unes des autres par déformation, mais les difficultés à appréhender l'infini ne lui permettent pas de penser un point à distance infinie comme un point ordinaire et par conséquent de penser les coniques comme une seule et même courbe. Desargues par contre, en éliminant l'infini en quelque sorte, remarque que les sections coniques (les *coupes de rouleau*)²¹ comme il les appelle dans le *Brouillon Project* définies comme perspectives de cercles participent des mêmes propriétés, qui ne sont que les propriétés du cercle transformées par perspective; ceci lui permet de considérer les sections coniques comme une seule et même courbe que l'on peut étudier "par une seule et même énonciation, construction et préparation ou pour dire mieux par un seul et même discours et sous de mêmes paroles"²².

Cette unification du fini et de l'infini géométrique posera problème, ainsi Descartes qui a senti l'importance de l'oeuvre de Desargues même s'il n'en a pas compris toute la signification, écrit à Desargues :

"Pour votre façon de considérer les lignes parallèles, comme si elles s'assemblaient à un but à distance infinie, afin de les comprendre sous le même genre que celles qui tendent à un point, elle est fort bonne, pourvu que vous vous

²¹Un *rouleau* est la surface engendrée par une droite passant par un point fixe et s'appuyant sur un cercle; si le point est à distance finie, la surface est un cône, si le point est à distance infinie, la surface est un cylindre. Ainsi Desargues ne distingue pas cône et cylindre.

²²"Lettre de Desargues à Mersenne", in René Taton, o.c. p. 83.

en serviez, comme je m'assure que vous le faites, pour donner à entendre ce qui est obscur en l'une de ces espèces, par le moyen de l'autre où il est plus clair, et non au contraire."²³

autrement dit cette analogie acceptable sur le plan de la métaphore, si elle peut en un certain sens éclairer la recherche, ne saurait intervenir dans le raisonnement mathématique.

Ici apparaît un obstacle à la compréhension de la pensée de Desargues, bien plus profond que son style ou le caractère botanique de son vocabulaire. Issue d'une certaine lecture des constructions perspectives, la notion arguésienne qui contient à la fois la définition des points à l'infini et l'élimination de leur spécificité pour en faire des points ordinaires, posait un problème d'ordre épistémologique (quel est leur statut mathématique?), problème qui ne sera résolu que par les mathématiciens du XIX^{ème} siècle avec le développement de la géométrie projective moderne.

Cet obstacle n'empêchera pas quelques géomètres de continuer l'oeuvre arguésienne tout au long des XVII^{ème} et XVIII^{ème} siècles.

Ainsi, après Desargues qui dans le *Brouillon Project* décrivait les asymptotes de l'hyperbole comme *les touchantes de ses bords à distance infinie*²⁴, Pascal, dans le premier livre de son *Traité des Coniques*²⁵ (ouvrage perdu dont on a retrouvé un manuscrit de la première partie, *Generatio conisectionum*, dans les papiers de Leibniz), définissant les propriétés élémentaires des coniques à partir du cercle par perspective et remarquant que la tangente en un point d'une conique est la perspective de la tangente au point correspondant du cercle, explique que, dans le cas de la parabole et de l'hyperbole, il y a des points du cercle qui n'ont pas d'images perspectives, et considérant ce que deviennent les tangentes à ces points sans images, écrit, en ce qui concerne la parabole

"Il y a donc sur la parabole une droite manquante qui joue vraiment le rôle d'une tangente, puisqu'elle est l'image d'une tangente"²⁶

et en ce qui concerne l'hyperbole

²³ "Lettre du 19 juin 1639", in René Taton, o.c. p.186.

²⁴ René Taton, o.c. p.159

²⁵ Blaise Pascal, "*Traité des Coniques*" in *Oeuvres Complètes* (présentation et notes de Louis Lafuma), Le Seuil, Paris 1963

²⁶ *ibid*, p. 41

"... les asymptotes jouent le rôle de tangentes à distance infinie et doivent compter comme telles."²⁷

Quant à Newton, dans son *Enumeratio linearum tertii ordinis*²⁸ (Énumération des lignes du troisième ordre) publié en 1704 mais vraisemblablement écrit beaucoup plus tôt, dans lequel il se propose de déterminer toutes les courbes du troisième degré, il écrit à propos des branches infinies d'une courbe:

"The asymptote to any branch is, therefore, found by seeking for the tangent to a point in that branch at an infinite distance."²⁹

Il faut remarquer que les méthodes perspectivistes ne sont pas étrangères à Newton; c'est ainsi qu'il explique dans l'article cité que toutes les cubiques planes s'obtiennent à partir de cinq d'entre elles par perspective comme les lignes du second ordre (les sections coniques) s'obtiennent à partir du cercle.

En fait c'est au moment où le projectif (au sens littéral: ce qui a rapport avec les projections) acquiert un statut reconnu par les mathématiciens, c'est-à-dire dans la première moitié du XIX^{ème} siècle, que le concept arguésien de point à l'infini est enfin accepté.

C'est par des considérations d'invariance que Poncelet justifie, dans son *Traité des Propriétés Projectives des Figures*³⁰ publié en 1822, la notion de point à l'infini, c'est ainsi qu'il écrit,

"Les lignes parallèles concourent en un point unique à l'infini"³¹

précisant pour justifier cette assertion

"On voit, en effet, que les points de concours à distance infinie et à distance donnée s'échangent réciproquement par

²⁷ *ibid*, p. 41

²⁸ Isaac Newton, *Enumeratio linearum tertii ordinis* (1701), english translation in D.J. Struick, *A source-book in Mathematics 1200-1800*, Princeton University Press 1986

²⁹ *ibid*, p. 171

³⁰ Jean-Victor Poncelet, *Traité des Propriétés Projectives des Figures* (2 volumes), Gauthier-Villars, Paris 1865 (le premier volume a été publié en 1822)

³¹ *ibid*, tome I, p. 51

l'effet de la projection."³²

et à cette notion, dont il rappelle qu'elle est généralement admise, il ajoute la notion de droite à l'infini, écrivant

"Tous les points situés à l'infini sur un plan peuvent être considérés idéalement distribués sur une ligne unique, située elle-même à l'infini sur ce plan."³³

notion *métaphysique* (c'est le terme utilisé par Poncelet) qu'il justifie en remarquant que

"tous ces points sont représentés, en projection, par ceux d'une ligne droite unique située, en général, à distance donnée et finie."³⁴

Ainsi Poncelet se place dans la même problématique que Desargues, savoir, l'invariance par projection. Si Poncelet, à l'époque où il rédigeait son ouvrage, n'a pu lire le *Brouillon Project* (texte alors perdu dont une copie écrite par Philippe de La Hire sera retrouvée ultérieurement par Chasles; quant au manuscrit original, il sera retrouvé en 1959, ainsi que le raconte René Taton qui le publiera en 1961³⁵), il connaissait ce texte à travers les commentaires contemporains; c'est ainsi qu'il savait par la lettre de Descartes citée plus haut que Desargues considérait un système de droites parallèles comme concourant à l'infini³⁶ et qu'il connaissait l'interprétation des asymptotes à une courbe comme tangentes en ses points à l'infini, interprétation qu'il justifiait par l'invariance projective.

Un objet "non-ontologique"

Nous avons déjà parlé de l'incompréhension que rencontrait Desargues, y compris de la part de ceux qui reconnaissait l'importance de ses conceptions, comme cela fut le cas de Descartes³⁷. C'est que Desargues, avec l'introduction du point à l'infini, bousculait la tradition géométrique.

³² *ibid*, p. 51

³³ *ibid*, p. 52

³⁴ *ibid*, p. 52

³⁵ René Taton, o.c. p. 5

³⁶ Jean-Victor Poncelet, o.c. tome II, p. xxvii

³⁷ Rudolf Bkouche, "Desargues au XIX^{ème} siècle, l'influence d'un livre non lu" in *Actes du Colloque Desargues* (Paris-Lyon 1991), à paraître in *Cahiers d'Histoire et de Philosophie des Sciences*.

Qu'est-ce que ce point qui n'existe pas et dont on use cependant comme d'un point ordinaire. Le souci d'unifier les propriétés des droites concourantes et celles des droites parallèles peut-il suffire à introduire un concept qui ne semble s'appuyer sur rien d'autre que l'unification des mots, "*cette seule et même énonciation*" dont parle Desargues dans sa lettre à Mersenne citée ci-dessus.

Pour les Anciens (c'est-à-dire les géomètres grecs) le raisonnement s'appuie sur des objets; que ceux-ci participent des idées platoniciennes ou relèvent de la connaissance sensible, ces objets ont une existence propre, indépendante des relations qu'ils ont entre eux et que l'homme s'attache à découvrir par le raisonnement. La logique formelle d'Aristote suppose les objets, si elle est formelle au sens qu'elle édicte des règles de raisonnements indépendantes des objets sur lesquels porte le raisonnement (définissant ainsi les formes de raisonnement que décrit Aristote dans les *Premiers Analytiques*³⁸), le raisonnement ne se conçoit qu'autant qu'il se rapporte à des objets. En ce sens la logique formelle d'Aristote n'est pas formaliste au sens moderne du terme³⁹.

Si l'introduction du point à l'infini marque une rupture avec la pensée géométrique grecque, c'est bien parce que, dans le raisonnement, cet objet n'a d'autre référence que sa définition; en ce sens il est sa propre référence, c'est en cela qu'il peut être considéré comme un point ordinaire, moins par une analogie de l'ordre de l'être que par une identification de forme (points ordinaires et points à distance infinie satisfont aux mêmes relations). Cette rupture n'empêche pas Desargues d'user des lourds raisonnements à la grecque dans le *Brouillon Project*,

³⁸ Aristote, *Premiers Analytiques* (traduction Tricot), Vrin, Paris

³⁹ Les méthodes formalistes s'appuient sur des signes (lesquels peuvent être des mots comme cela est le cas de l'axiomatique hilbertienne de la géométrie, cf. David Hilbert, *Les Fondements de la Géométrie* (1899) (traduction et notes de Paul Rossier) Dunod, Paris 1971), lesquels ne renvoient, en principe, à aucune signification; la logique se réduit ainsi à un calcul sur ces signes indépendamment de toute référence extérieure au calcul lui-même. Pour la distinction entre logique formelle au sens d'Aristote et logique formaliste (la logique mathématique d'aujourd'hui) nous renvoyons à un article de René Thom: "Les mathématiques modernes, une erreur pédagogique et philosophique" in *Pourquoi la Mathématique ?* UGE, Paris 1974, p. 72-73

ce qui souligne une certaine ambivalence du texte arguésien⁴⁰; d'une part la mise en place d'une nouvelle forme de pensée géométrique (le point à l'infini, la méthode des projections), d'autre part un mode de raisonnement traditionnel même si Desargues le transgresse quelquefois pour y intégrer la notion de point à l'infini: ainsi lorsqu'il annonce sans autre précaution que dans une division harmonique (la donnée de quatre points en involution dans le langage de Desargues), si l'un des points est à distance infinie, le point correspondant dans l'involution est le milieu du segment défini par les deux autres points⁴¹.

On retrouve l'effet de cette rupture de façon plus ou moins explicitée chez les successeurs de Desargues⁴².

Un exemple significatif est donné par Newton dans les *Principia*⁴³ lorsque, pour construire une conique tangente à quatre droites et passant par un point, l'auteur se ramène au cas où les quatre droites forment un parallélogramme via une transformation convenable⁴⁴.

C'est le caractère d'irréalité du point à l'infini (ce que j'appellerai son caractère *non-ontologique*) qui permet de le considérer comme un point ordinaire, et par là même, via des transformations qui échangent point ordinaire et point à l'infini, de considérer points ordinaires et

⁴⁰ On peut supposer que cette ambivalence tient à la question de la légitimité de la démonstration, légitimité qui reste pour Desargues la légitimité euclidienne; c'est en cela qu'on peut tenter d'expliquer l'écart (pour le géomètre d'aujourd'hui) entre le renouveau conceptuel apporté par Desargues et le respect de la tradition *démonstrative*. En ce qui concerne la mise en place de la démonstration projective, nous renvoyons à notre article cité "La Naissance du Projectif".

⁴¹ René Taton, o.c. p. 120. Notons que cette remarque de Desargues renvoie à l'idée intuitive d'un point infiniment éloigné; on peut considérer que si M est un point infiniment éloigné sur la droite AB, alors MA = MB.

⁴² Denis Lanier et Jean Pierre Le Goff, "L'héritage arguésien", Colloque *La Naissance du Projectif*, Lille 1989 (à paraître in *Cahiers d'Histoire et de Philosophie des Sciences*) et *Scholies* n° 7 et 8 (Lycée Malherbe, Caen).

⁴³ Isaac Newton, *Mathematical Principles of Natural Philosophy and his System of the World* (1687), (english traduction by Andrew Motte in 1729, revised by Florian Cajori), University of California Press, Berkeley, Los Angeles, London, 1962; *Principes Mathématiques de la Philosophie Naturelle* (traduction de la Marquise du Chastellet augmentée des Commentaires de Clairaut, Paris 1756), réédition Gabay, Paris 1991.

⁴⁴ Isaac Newton, *Mathematical Principles*, p. 90-94

points à l'infini comme participant d'un même concept⁴⁵.

Les points manquants (*puncta deficientia*) du texte de Pascal⁴⁶ ont ainsi acquis un statut moins par leur existence (ils n'existent pas) que par les relations qu'ils vérifient. C'est cela qui permet à Pascal de décrire la droite manquante (*recta deficientia*) comme "jouant vraiment le rôle d'une tangente parce qu'elle est l'image d'une tangente"⁴⁷

Le point à l'infini n'est pas le seul objet non-ontologique apparu dans l'histoire de mathématiques, et ce non-ontologique posera problème aux mathématiciens même si certains d'entre eux sauront utiliser ces objets dans leurs modes de raisonnement comme dans leurs calculs avant même que le statut de ces objets soit complètement élucidé.

On pourrait citer par exemple les nombres imaginaires (ainsi nommés par Descartes pour rappeler leur non-existence⁴⁸). On peut noter que lorsque ces nombres, inventés au XVI^{ème} siècle et utilisés pendant trois siècles sans que leur mode d'existence soit défini autrement que par les règles de calculs auxquels ils obéissent, acquerront une existence de droit avec la représentation géométrique, ce sera au moment même où, avec le développement de l'algèbre et de l'analyse, la géométrie perdra son caractère de lieu privilégié de la rigueur mathématique⁴⁹. C'est aussi à cette époque que Cauchy, après avoir utilisé formellement les nombres imaginaires décrira le calcul sur ces nombres comme un calcul sur les polynômes modulo $x^2 + 1$.⁵⁰

⁴⁵ C'est l'utilisation explicite des transformations qui justifie la construction arguésienne; on peut considérer que si Desargues a dépassé le point de vue ontologique, sa construction s'appuie sur une représentation (ici la représentation perspectiviste); en ce sens, si elle a un caractère formel, elle n'est pas formaliste. Si Desargues recherche une unité du langage ("la seule et même énonciation"), celle-ci découle de sa construction, elle en est la conséquence, non la cause.

⁴⁶ Blaise Pascal, o.c. p. 41

⁴⁷ ibid, p. 41

⁴⁸ René Descartes, "La Géométrie" in *Discours de la Méthode* (1637), réédition Fayard, Paris 1986; p. 404

⁴⁹ Pour une histoire des nombres complexes, on renvoie à l'article de Eduard Study et Elie Cartan, "Nombres complexes" in *Encyclopédie des Sciences Mathématiques pures et appliquées* (édition française), I, 1, Gauthier-Villars, Paris et Teubner, Leipzig, réédition Gabay, Paris 1991, p. 329-353; le texte de Cartan-Study a été publié en 1908. Ce texte est reproduit in Elie Cartan, *Oeuvres Complètes* (deuxième édition), Editions du CNRS, Paris 1984, tome II, p. 107-131

⁵⁰ Augustin Cauchy, *Exercices d'Analyse et de Physique Mathématique*, Paris 1847; *Comptes-rendus de l'Académie des Sciences de Paris*, tome 24, p. 1120 et tome 25, p. 129

Mathématiques des objets et mathématiques des relations

On peut considérer que cette *désontologisation* marque l'histoire récente des mathématiques; c'est ainsi que Dieudonné écrit :

"Il apparaît impossible d'éluder la notion de l'infini, tant qu'on considère que l'essentiel d'une proposition est son contenu, c'est-à-dire la représentation mentale dont elle est le symbole; mais la difficulté s'évanouit si on admet au contraire que l'essentiel de la proposition est sa forme, autrement dit, qu'il est inutile qu'une proposition évoque une représentation mentale autre que la perception des signes avec lesquels elle est écrite. (souligné par l'auteur)"⁵¹

C'est ce refus de la prise en compte des contenus (des représentations mentales, précise Dieudonné⁵²) qui marque la rupture avec la pensée mathématique grecque et qui réduit (au moins d'un point de vue méthodologique!) l'activité mathématique à son seul aspect formel.

Cette élimination des contenus ne signifie pas que les mathématiques se réduisent à leur seul discours ou à une simple manipulation de signes. Il faut comprendre cette élimination des contenus⁵³ comme un déplacement du statut des objets mathématiques, déplacement qui conduit d'une *mathématique des objets* à une *mathématique des relations*⁵⁴.

Ce déplacement du statut des objets mathématiques apparaît à la lecture comparée des deux grandes axiomatiques qui ont fondé, chacune à leur époque, la pensée mathématique: l'axiomatique euclidienne d'une

⁵¹ Jean Dieudonné, "Les méthodes axiomatiques modernes et les fondements des mathématiques" in *Les grands courants de la pensée mathématique* (présentés par François Le Lionnais), nouvelle édition augmentée, Blanchard, Paris 1962; p. 550

⁵² Contrairement à Dieudonné, nous distinguerons *contenu* et *représentation mentale*. Si le terme "contenu" présente un caractère d'objectivité en ce sens qu'il désigne une réalité extérieure au sujet connaissant, la "représentation mentale" désigne une construction du sujet; on peut considérer que c'est via les représentations mentales que le sujet connaissant accède aux contenus de savoir; en éliminant les représentations mentales du discours mathématique, on élimine ainsi toute référence à des contenus; c'est en ce sens que l'on peut entendre l'assertion de Dieudonné.

⁵³ laquelle conduit à l'élimination du sens; cf. Rudolf Bkouche, Bernard Charlot, Nicolas Rouche, *Faire des mathématiques, le plaisir du sens*, Armand Colin, Paris 1991; chapitre 4

⁵⁴ Rudolf Bkouche, *Les enjeux de la démonstration*, IREM de Lille (à paraître)

part, l'axiomatique hilbertienne d'autre part.

Dans la géométrie euclidienne (c'est-à-dire celle des géomètres grecs et de leurs successeurs), on peut parler du *primat des objets sur les relations*, c'est-à-dire que les objets ont une existence propre (on peut alors parler de l'*ontologie* des objets mathématiques); que cette existence relève du monde des idées platoniciennes ou du monde sensible, que nous connaissons ces objets par le seul exercice de la raison (*rationalisme*) ou qu'ils relèvent de l'expérience sensible (*empirisme*), les objets ont une réalité et l'objet de la science géométrique est la connaissance des propriétés de ces objets, et des relations qu'ils entretiennent entre eux. Ces propriétés et ces relations sont autant de vérités du monde et le but de la science est d'accéder à ces vérités.

Cette conception *ontologique* de la géométrie sera remise en cause au début du XIX^{ème} siècle avec la découverte (l'invention!) des géométries non-euclidiennes, suivie dans le cours du siècle par la naissance de la théorie des ensembles et ce qu'on a appelé la *crise* des fondements, crise qui remet en cause les principes mêmes du raisonnement mathématique et oblige à repenser de nouvelles formes de légitimation du raisonnement⁵⁵.

C'est pour répondre à cette crise que s'est mise en place la conception formaliste des mathématiques dont le principal initiateur est Hilbert. Dans la conception hilbertienne, les objets n'existent plus en tant que tels et l'on peut parler du *primat des relations sur les objets*; les objets ne sont définis qu'à travers un réseau de relations, réseau de relations lui-même défini par des axiomes énoncés *a priori*. Les axiomes et les objets qu'ils définissent sont indépendants de *toutes significations extérieures* (pour reprendre une expression de Gonsseth). L'objet de la géométrie est alors d'étudier les conséquences logiques des axiomes, conséquences logiques qui s'obtiennent à partir des seules règles du raisonnement, règles purement syntaxiques. On ne parle plus de vérité, mais de validité à l'intérieur d'un système axiomatique donné. Le problème de la validité d'une telle construction se pose alors différemment de la conception ontologique, pour n'être plus, *en principe*, qu'un problème logique.

Mais les mathématiques ne se réduisent pas à la seule logique et Hilbert explique comment, d'un point de vue formaliste, se redéfinit la notion d'objet mathématique; c'est ainsi qu'il déclare :

⁵⁵ Nous verrons ci-dessous le rôle joué par la géométrie projective dans l'émergence des conceptions formalistes.

"Comme toute science, la mathématique ne peut être construite sur la seule logique. Une donnée est indispensable, composée d'objets concrets, résultant d'une expérience extérieure à la pensée. Pour assurer la validité des déductions, ces objets doivent pouvoir être examinés sur toutes leurs faces. Leur présentation, leur discrimination, leur ordonnance, leur relation de voisinage doivent être données immédiatement et intuitivement et cela de façon irréductible à d'autres relations. Telle est ma position philosophique devant les mathématiques ou toute pensée scientifique; elle me paraît indispensable. En mathématiques, les objets que nous examinons sont des signes qui pour nous sont clairs et reconnaissables. (souligné par nous)"⁵⁶

C'est ce point de vue que Dieudonné reprend lorsqu'il réduit la compréhension d'une proposition mathématique à la *"perception des signes avec lesquels elle est écrite"*⁵⁷.

De la problématique arguésienne à la notion d'invariant

La conception arguésienne du point à l'infini est, il est vrai, bien éloignée de la conception hilbertienne⁵⁸ et ce serait recourir à la trop classique conception téléologique de l'histoire que de ne voir dans le point à l'infini de Desargues qu'un simple jalon vers la conception moderne (non-ontologique) des mathématiques, l'oeuvre de Desargues préfigurant, dans un contexte encore proche des conceptions grecques, le concept d'espace projectif.

Cela nous conduit à poser un double problème; d'abord un problème que l'on pourrait appeler local (*synchronique*), celui des raisons de l'invention d'un *concept-limite* (concept-limite au sens qu'il est inconcevable pour la plupart des contemporains) et de la façon dont

⁵⁶ David Hilbert, "Les fondements des mathématiques" conférence prononcée en 1927, publiée dans l'édition citée de l'ouvrage *Les Fondements de la Géométrie*, p. 261

⁵⁷ Il faut entendre cette réduction des mathématiques au simple usage réglé de signes d'un point de vue méthodologique. Nous avons exposé par ailleurs l'ambiguïté d'une telle réduction et l'illusion d'une mathématique *in-sensée* qu'elle peut engendrer (cf, Rudolf Bkouche, Bernard Charlot, Nicolas Rouche, o.c.) mais ce n'est pas le lieu de parler ici des dérapages de l'idéologie formaliste.

⁵⁸ pour éviter toute ambiguïté, rappelons que tout au long de son oeuvre géométrique, Desargues s'appuie sur l'axiomatique euclidienne qu'il ne remet nullement en cause comme le montre ses méthodes de démonstration.

il a été utilisé par Desargues et ses successeurs proches, ensuite un problème global (*diachronique*), celui de la place de cette invention dans l'évolution historique.

Nous noterons d'abord que le concept de point à l'infini est né de ce que l'on peut appeler la *géométrisation* d'une problématique d'ordre technique (la représentation perspectiviste des peintres), géométrisation qui se situe dans le cadre d'une problématique euclidienne: *comment déterminer les règles de constructions perspectivistes en usant des méthodes de la géométrie grecque*⁵⁹.

Comment alors expliquer que cet effort de géométrisation à la grecque ait pu conduire à ce renouvellement du paysage géométrique que constitue la naissance du projectif.

L'analogie remarquée par les perspectivistes entre droites parallèles et droites concourantes relève somme toute du contingent, elle indique tout au plus une méthode de construction.

Mais c'est moins le problème de la correspondance entre l'objet à représenter et sa représentation qui va jouer un rôle dans la mise en place du projectif que celui des constructions directes sur le tableau, lequel se pose dès les premières représentations perspectivistes, ne serait-ce que parce que le tableau représente un objet imaginaire. Le développement des méthodes perspectivistes va conduire à la mise en place d'une géométrie propre du tableau (ce que Lambert appellera plus tard la *géométrie perspective*⁶⁰), c'est la comparaison de cette géométrie du tableau et de la géométrie des objets que l'on représente (laquelle relève du cadre euclidien classique) qui conduira à passer de la simple analogie à l'identification des notions de droites concourantes et de droites parallèles.

Cette comparaison des constructions géométriques directes dans le tableau et des constructions dans le géométral (le plan des objets que l'on représente) est exposé dans le chapitre "*Aux théoriciens*" d'un ouvrage d'Abraham Bosse consacré aux méthodes perspectivistes de Desargues⁶¹. Le texte de ce chapitre publié pour la première fois en 1643, donc après le *Brouillon Project*, nous éclaire sur la démarche de Desargues quant à l'identification du concours et du parallélisme, identification déjà entrevue mais non explicitée dans l'opuscule de 1636,

⁵⁹ ainsi les ouvrages théoriques cités de Piero della Francesca et de Vignola

⁶⁰ Jean-Henri Lambert, *La perspective affranchie de l'embaras du plan géométral* (1759), réédition Alain Brieux, Paris 1977

⁶¹ Abraham Bosse, *Manière universelle de M. Desargues pour pratiquer la perspective par petit-pied...* Paris, 1647/1648

identification complètement explicitée et utilisée dans le *Brouillon Project*.⁶².

C'est cette identification de la géométrie usuelle (laquelle relève de la géométrie grecque) et de la géométrie du tableau qui permet le dépassement de l'ontologie. En ce sens, ce dépassement de l'ontologie pourrait être considéré comme une systématisation de la lecture picturale, laquelle demande de *confondre* l'objet et son image, ou si l'on préfère, de *voir* l'objet dans l'image.

On est encore loin de l'élimination des représentations mentales dont parle Dieudonné, on pourrait plutôt parler de la lecture d'une certaine situation à travers une autre⁶³, un *transfert* de représentations mentales pourrait-on dire. C'est ainsi qu'il faut comprendre le *Brouillon Project* moins comme la simple déduction des propriétés des coniques à partir de celles du cercle par la méthode des projections que la lecture des propriétés des coniques à travers les propriétés du cercle, ce qu'on peut exprimer sous la forme schématique "*toute conique est un cercle*". Cette unification des coniques est bien plus forte que la définition d'un genre de courbes dont les différentes espèces seraient les différentes coniques (c'est ainsi qu'on pourrait lire l'unification à la Kepler), l'unification arguésienne définit les coniques comme une seule et même courbe via ce qu'il a défini comme "*une seule et même énonciation*". En terme moderne, l'objet conique est un *invariant*, et c'est en ce sens qu'il perd son caractère ontologique.

L'apport de la perspective à la géométrie est alors moins la méthode des transformations en tant que telles que la mise en place de la notion d'invariance. La géométrie devient ainsi moins l'étude des propriétés d'un objet ou d'un type d'objet que de cet invariant qui apparaît sous diverses formes liées entre elles par une *énonciation commune*.

Une conception langagière des mathématiques

On peut considérer la notion d'*invariant* comme fondamentale dans l'élaboration de toute connaissance scientifique, un invariant étant

⁶² On peut se demander si c'est la construction théorique (celle de 1639) qui a précédé, auquel cas les constructions développées dans "*Aux théoriciens*" ne seraient qu'une *application* des concepts théoriques à la perspective, ou si ce sont les constructions perspectivistes qui ont conduit à la mise en place des concepts théoriques. Cette question me semble secondaire dans la mesure où l'invention mathématique n'est jamais transparente, ce qui importe, c'est la *concomitance* des constructions théoriques et techniques, chacune d'elles soutenant l'autre.

⁶³ Rudolf Bkouchi, "La naissance du projectif" p. 271

ce qui permet de reconnaître dans les objets des propriétés communes, et ce sont moins les objets eux-mêmes que ces propriétés communes que la science se propose d'étudier. Dans le cadre de la géométrie euclidienne, ces propriétés communes se définissent via les *relations d'égalité et de similitude*⁶⁴. La géométrie arguésienne apparaît alors comme la construction de nouveaux invariants (les invariants projectifs d'aujourd'hui) et l'on sait que ces géométries participent d'une théorie géométrique commune comme l'explique *Le Programme d'Erlangen* de Felix Klein⁶⁵, ce qui explique la tentation moderniste de réécrire la construction de ses invariants via cette théorie commune⁶⁶. Si cette construction à la *Erlangen* a sa place dans un *exposé logique de la géométrie*, elle est cependant inadéquate pour comprendre comment se sont construits historiquement ces divers invariants⁶⁷.

L'égalité et la similitude des géomètres grecs s'appuient essentiellement sur l'ontologie des objets. La construction de la géométrie se présente alors comme une représentation langagière de ces objets, mais cette représentation langagière doit permettre via le seul raisonnement déductif la connaissance *a priori* (c'est à dire indépendamment de l'expérience) des vérités géométriques; c'est alors le rôle de la logique d'énoncer les règles langagières du raisonnement, mais comme nous l'avons déjà expliqué, ces règles, si elles sont indépendantes des objets, ne se définissent que par rapport à ces objets (cf. note 38). La rationalité de la géométrie grecque se présente ainsi comme adéquation (*idonéité* dirait Gonseth⁶⁸) de la représentation langagière aux situations géométriques.

C'est cela qu'explique Paul Valéry lorsqu'il écrit, à propos de la géométrie grecque:

"Songez à la subtilité et à la volonté qu'il leur a fallu pour accomplir l'ajustement si délicat, si improbable, du langage commun au raisonnement précis; songez aux analyses qu'ils ont faites d'opérations motrices et visuelles

⁶⁴ Rudolf Bkouche, "De la géométrie et des transformations", Repères-IREM n° 4, juillet 1991

⁶⁵ Felix Klein, *Le Programme d'Erlangen*, (1872) (traduction Padé), Gauthier-Villars, Paris 1874

⁶⁶ Cette réécriture apparaît dans l'ambiguïté de l'expression "géométrie euclidienne" qui désigne à la fois la géométrie des *Eléments* d'Euclide et la théorie des invariants du groupe des similitudes.

⁶⁷ inadéquate aussi dans un premier enseignement de la géométrie, cf. Rudolf Bkouche, "De la géométrie et des transformations" o.c.

⁶⁸ Ferdinand Gonseth, *Les Mathématiques et la Réalité*, Blanchard, Paris 1934/1974)

*très composées; et comme ils ont bien réussi dans la correspondance avec les propriétés linguistiques et grammaticales. Ils se sont fiés à la parole et à ses combinaisons pour les conduire sûrement dans l'espace".*⁶⁹

Ce que l'on appelle le *miracle grec* tient ainsi, en ce qui concerne la géométrie, à la construction d'une représentation langagière adéquate des situations géométriques. C'est cet *adéquation* qui permet le développement de la géométrie et qui autorise la substitution du langage (celui de la science) aux choses dans le développement de la connaissance. Mais cette substitution n'est fondée que parce qu'elle renvoie aux objets; c'est en ce sens que l'on peut parler du *réalisme* de la géométrie grecque, que ce réalisme soit le réalisme des idées⁷⁰ ou le réalisme des choses. Le langage, en tant que tel, s'il ouvre la perspective d'une connaissance *a priori* via le raisonnement déductif, reste lié au réel dont il n'est qu'une forme d'expression des propriétés. L'idée d'un pur développement langagier reste étrangère à la science grecque, l'on peut y voir la raison de l'élimination de tout lieu où l'ajustement dont parle Valéry se révèle impossible, c'est le cas de l'infini soigneusement évité dans le développement de la géométrie, c'est aussi le cas du numérique dès que l'on se heurte au problème des irrationnels (lequel problème se heurte aussi au problème de l'infini)⁷¹.

Avec la géométrie arguésienne le problème de l'ajustement se déplace dans la mesure où Desargues élargit le rôle du langage avec la recherche d'une *seule et même énonciation*. Mais celle-ci ne relève pas, même si elle en ouvre la possibilité, d'une conception langagière des mathématiques. L'invariance arguésienne se définit via des constructions géométriques effectives, les coniques s'unifient parce qu'elles s'échangent par projections et ce sont ces constructions géométriques qui justifient la seule et même énonciation. Ce sont les remarques "pour les contemplatifs" de 1636 qui justifient l'analogie entre droites parallèles et droites concourantes et par cela même la notion de point à l'infini telle que Desargues la mettra en place quelques années plus tard.

De même, dans les *Principia*, c'est en faisant une transformation effective que Newton ramène le problème de la construction d'une conique tangente à quatre droites et passant par un point au cas où ces quatre droites forment un parallélogramme.

⁶⁹ Paul Valéry, "La crise de l'esprit" in *Variété I*, Gallimard, Paris 1924

⁷⁰ en ce sens le platonisme est un réalisme

⁷¹ Rappelons que la théorie d'Eudoxe-Euclide (Euclide, *Eléments*, livre V) a pour objectif de construire une théorie des grandeurs indépendantes de tout recours au numérique, les seuls nombres y intervenant étant les nombres entiers.

Il faudra que l'on compare des énoncés correspondants *d'un point de vue purement linguistique* pour que la seule et même énonciation prenne le pas sur la diversité des situations, ce que fera Gergonne en 1826 à propos de la dualité⁷². Encore aura-t-il fallu passer par la transformation par polaire réciproque par rapport à une conique (resp. une quadrique), c'est-à-dire une transformation qui change la nature des objets, un point se transformant en une droite (resp. un plan) et une droite (resp. un plan) se transformant en un point. C'est la comparaison de divers lieux où apparaît une telle correspondance aujourd'hui connue comme *dualité*⁷³ (sphère, polyèdres, transformations par polaires réciproque) qui conduira Gergonne à s'intéresser à l'aspect linguistique de la géométrie et à remarquer les correspondances entre énoncés indépendamment des contenus; il remarquera ainsi que la démonstration de la proposition duale d'une proposition donnée s'obtient en dualisant la démonstration de la proposition initiale, ce qui l'amènera à la présentation des propositions et des démonstrations en deux colonnes. Ainsi, les remarques de Gergonne vont permettre de situer la théorie des transformations dans un cadre purement langagier; la *seule et même énonciation* de Desargues devient ainsi indépendante de tout contenu⁷⁴.

Cette conception langagière de la géométrie se heurtera à ce qu'on pourrait appeler l'*obstacle ontologique*, lequel participe de la notion générale d'obstacle épistémologique introduite par Bachelard⁷⁵. On retrouve cet obstacle ontologique tout au long de l'histoire des mathématiques. C'est ainsi que l'on peut comprendre la polémique

⁷² Gergonne, "Considérations philosophiques sur la science de l'étendue" *Annales de Mathématiques pures et appliquées*, tome XVI, 1826 p. 209-231

⁷³ le terme de dualité a été introduit par Gergonne. Pour une étude historique de la notion de dualité, nous renvoyons à deux articles de Karine Chemla, "Préhistoire de la dualité" in *Sciences à l'époque de la Révolution française* (édité par Roshdi Rashed), Blanchard, Paris 1988, p. 151-201; "Sur la construction de l'idée de dualité en géométrie" Actes de la Quatrième Université d'Eté d'Histoire des Mathématiques (Lille 1990), IREM de Lille 1994

⁷⁴ Le point de vue de Gergonne sera conforté, en ce qui concerne les propriétés de l'espace lorsque l'on aura mis en évidence une nouvelle dualité échangeant points et plans liées à des phénomènes mécaniques (distribution des vitesses d'un solide, systèmes de forces) (cf. Michel Chasles, *Aperçu historique sur l'origine et le développement des méthodes en géométrie* (1837), réédition Jacques Gabay, Paris 1989-1993; p.411-416 et 674-679)

⁷⁵ Gaston Bachelard, *La formation de l'esprit scientifique* (1938), Vrin, Paris 1972. Notons que, contrairement à Bachelard, nous ne réduisons pas ici l'obstacle épistémologique à ce qui opposerait des conceptions pré-scientifiques (ou de moindre scientificité) à l'émergence des conceptions scientifiques, les obstacles épistémologiques se situent aussi dans les conflits internes aux modes de pensée scientifique, c'est à l'intérieur de la pensée scientifique elle-même qu'il faut comprendre l'obstacle ontologique.

Poncelet-Gergonne⁷⁶ (indépendamment de la part de polémique personnelle), Poncelet ne pouvant admettre que la géométrie se ramène à de simples jeux de langage. Si Poncelet signale dans un article publié en 1857⁷⁷ l'aspect linguistique de la transformation des énoncés géométriques par la transformation par polaires réciproques par rapport à une conique ou une surface du second degré, cette transformation se situe dans la situation géométrique elle-même et non dans le langage. L'aspect linguistique n'est pour Poncelet que l'expérience d'un "*pur mécanisme*", une "*simple substitution de noms et de lettres*" qui simplifie la transformation des énoncés. Dans sa réponse⁷⁸, Gergonne insiste au contraire sur le rôle de la langue dans la constitution de la Science et la nécessité, pour développer cette nouvelle géométrie, de "*créer une langue à sa taille*".

C'est cet obstacle ontologique qui explique les réticences de Descartes par rapport à la notion de point à l'infini (cf. ci-dessus) ou les critiques de Beaugrand, lequel montre dans un texte polémique comment la relation d'involution définie sur une sécante par une conique et un quadrilatère inscrit dans cette conique peut être démontrée par des méthodes s'appuyant sur des théorèmes d'Apollonius, ce qui élimine la notion de point à l'infini et l'invariance projective, autrement dit l'aspect essentiel du texte de Desargues⁷⁹.

C'est encore cet obstacle ontologique que l'on rencontre chez Frege lorsqu'il reproche à Hilbert d'énoncer des axiomes sans avoir défini préalablement les objets sur lesquels portent ces axiomes; "*c'est demander aux axiomes de jouer le rôle qui incombe aux définitions*" écrit-il, précisant plus loin:

"Les propositions non définitionnelles (axiomes, principes fondamentaux, théorèmes) ne doivent contenir aucun mot ou signe dont le sens et la référence (ou la contribution à l'expression de la pensée) ne soit pas déjà

⁷⁶ Sur la polémique Poncelet-Gergonne on peut lire les articles publiés par chacun des deux auteurs dans les *Annales de Mathématiques Pures et Appliquées*. Certains de ces articles ont été publiés dans le tome II du *Traité des Propriétés Projectives des Figures*, o.c. p. 363-396.

⁷⁷ Jean-Victor Poncelet, "Analyse d'un mémoire présenté à l'Académie Royale des Sciences" *Annales de Mathématiques Pures et Appliquées*, tome XVII, 1826/1827, p. 265-272

⁷⁸ Gergonne, "Réflexion sur le précédent article" *ibid.*, p. 272-276

⁷⁹ Rudolf Bkouche, "*Desargues au XIXème siècle, l'influence d'un livre non lu*" o. c.; le texte de Beaugrand est publié dans l'édition des oeuvres de Desargues par Poudra (Poudra, *Oeuvres de Desargues* (2 volumes), Paris 1876, tome II, p. 355-378)

pleinement établis, en sorte qu'il n'y ait aucun doute sur le sens de la proposition, sur la pensée qui y est exprimée.... Les axiomes et les théorèmes ne peuvent donc jamais établir la référence d'un signe ou d'un mot qui y figure; cette référence doit être déjà établie." (souligné par nous)⁸⁰

C'est en fait l'autonomie d'un langage sans autre référence que lui-même qui pose problème: "*de quoi parle ce langage?*", pourrait-on demander, et la réponse aujourd'hui canonique "*de lui-même*" c'est-à-dire "*de rien*" n'est pas satisfaisante telle quelle. Cette autonomie ne devient signifiante que lorsqu'elle s'inscrit dans une problématique; la conception langagière des mathématiques représente ainsi le troisième moment de l'activité mathématique, le premier étant celui de ce que nous avons appelé l'*adéquation* du langage aux choses et le second celui de la *seule et même énonciation*; c'est ce second moment qui permet d'unifier les objets participant d'une même énonciation, rendant inutile (du moins sur le plan méthodologique) toute référence à ces objets⁸¹.

C'est donc dans ce second moment que l'on peut comprendre comment se constitue cette conception langagière des mathématiques qui, d'une certaine manière, *libère les mathématiques de toute ontologie*.

Notons cependant que cette libération n'est jamais complète dans la mesure où l'ontologie reste présente dans toute activité mathématique, d'abord par les *significations extérieures* qui guident toute construction langagière quelque peu consistante, ensuite parce que ces constructions langagières engendrent ce que l'on pourrait appeler de nouvelles ontologies, *ontologies artificielles* si l'on veut, qui participe de ce que j'ai appelé par ailleurs un enrichissement de l'intuition⁸². En ce sens l'aspect intuitif de la connaissance au sens que dit Gonseth⁸³ est en perpétuelle transformation, enrichi des constructions de l'esprit humain.

⁸⁰ *Logique et fondements des mathématiques*, Anthologie (1850 - 1914) (publié sous la direction de François Rivenc et Philippe de Rouilland), Payot, Paris 1992; p. 222-223

⁸¹ On pourrait rapprocher ces trois moments des trois synthèses dialectiques proposées par Gonseth pour expliquer les divers modes d'articulation des trois aspects de la connaissance géométrique (cf. Frédéric Gonseth, *La géométrie et le problème de l'espace*, Editions du Griffon, Neuchâtel 1945/1955 et Houria Sinaceur, "La dialectique de l'espace selon Ferdinand Gonseth" in *La Figure et l'Espace*, o.c.

⁸² cf. Rudolf Bkouche, Bernard Charlot, Nicolas Rouche, o.c. p. 163

⁸³ Ferdinand Gonseth, *La géométrie et le problème de l'espace* (6 volumes), Editions du Griffon, Neuchâtel 1945/1955, volume II "*Les trois aspects de la géométrie*".

On pourrait alors dire que *les mathématiques du primat des relations sur les objets* conduisent à de nouvelles formes d'intuition, lesquelles permettent une appréhension globale de ces nouveaux objets construits par l'esprit humain.

Si nous nous restreignons, dans cet article, à la contribution des idées projectives à l'émergence du non-ontologique et de la conception langagière des mathématiques, on ne saurait réduire cette émergence aux seules raisons projectives. Il faudrait aussi parler de la *réduction au calcul*; la mise en place du calcul littéral avec Viète conduit Fermat à considérer le calcul comme manipulation réglée de lettres indépendamment de toute signification de ces lettres⁸⁴; cette conception formelle du calcul et les succès des mathématiques calculatoires dans le développement de la physique au XVIII^e siècle amèneront Lagrange à ce qu'on pourrait appeler la *réduction analytique*, c'est ainsi qu'il écrit dans la préface de sa *Mécanique Analytique*:

*"On ne trouvera point de figures dans cet ouvrage. Les méthodes que j'y expose ne demandent ni constructions, ni raisonnement géométriques ou mécaniques, mais seulement des opérations algébriques, assujetties à une marche régulière et uniforme. Ceux qui aiment l'Analyse, verront avec plaisir la Mécanique en devenir une nouvelle branche, et me sauront gré d'en avoir étendu le domaine"*⁸⁵

Paradoxe de l'oeuvre de Lagrange, les constructions lagrangiennes ont conduit à une reformulation géométrique de la mécanique analytique aujourd'hui en plein développement⁸⁶, exemple remarquable de reconstruction de l'ontologie dont nous avons parlé ci-dessus.

Le projectif et la conception langagière des mathématiques

Si la "*seule et même énonciation*" de Desargues ouvre le second moment au sens que nous avons dit, il faudra, pour arriver à la conception langagière proprement dite que les objets usuels de la géométrie que sont les figures s'effacent devant ce nouvel objet qu'est l'invariant, les figures n'apparaissant plus que comme des formes

⁸⁴ Pierre de Fermat, "*Dissertation en trois parties*", in *Oeuvres* (publiées par Paul Tannery et Charles Henry), GauthierVillars, Paris 1896 p. 109-120

⁸⁵ Jean-Louis Lagrange, *Mécanique Analytique* (1788), réédition Blanchard, Paris 1965/ Jacques Gabay, Paris 1989; préface

⁸⁶ Vladimir Arnold, *Méthodes mathématiques de la mécanique classique*, (traduit du russe par Djilali Embarek), Editions de Moscou, Moscou 1976; A.M. Vinogradov and B.A. Kupersmidt, "*The structure of Hamiltonian Mechanics*" in *Integrable Systems*, Cambridge University Press, Cambridge 1981

particulières d'icelui.

C'est ainsi que l'on peut lire l'histoire de la géométrie projective du XIX^{ème} siècle depuis les figures corrélatives de Lazare Carnot⁸⁷ jusqu'au *Programme d'Erlangen* de Felix Klein⁸⁸.

Deux figures sont en *corrélation* lorsque l'on peut passer de la première à la seconde par certaines modifications laissant invariantes certaines relations de position; cette notion a été introduite par Carnot pour ramener l'étude d'une figure à celle d'une autre figure mieux connue ou pour comparer les propriétés de deux figures proches, les modifications considérées sont ainsi liées au type de propriétés que l'on étudie. Poncelet reprendra cette définition dans un texte de 1818 sur le principe de continuité, publié dans son ouvrage *Applications d'Analyse et de Géométrie*⁸⁹. Il y distinguera alors trois types de corrélation:

"Nous dirons que la corrélation est directe toutes les fois que les figures corrélatives seront composées d'un même nombre de parties semblables quant à leur nature, se correspondant chacun à chacune, et disposées absolument dans le même ordre à l'égard les unes des autres: dans cette situation, elles ne diffèreraient évidemment que par la grandeur absolue de ces parties, et nullement par leur nature et leur position relative.

Nous dirons que la corrélation est au contraire indirecte ou inverse toutes les fois que le déplacement nécessaire à opérer dans l'une des figures, pour la rendre identique avec sa corrélatrice, changerait l'ordre, la disposition de quelques-unes des parties dont elle se compose, sans toutefois en changer la nature.

Enfin la corrélation pourrait être telle que, en vertu du déplacement toujours réel de certaines parties de la figure primitive, une ou plusieurs autres parties devinssent dans la corrélatrice, imaginaires de réelles qu'elles étaient, ou réciproquement; c'est-à-dire telles que certaines distances,

⁸⁷ Lazare Carnot, *De La Corrélation des figures géométriques*, Paris 1801 et *Géométrie de Position*, Paris 1806; pour une étude de la notion de figures corrélatives chez Carnot, cf. Karine Chemla, Lazare Carnot et la généralité en géométrie, Actes du Colloque *La Naissance du Projectif*, Lille 1989 (à paraître in Cahiers d'Histoire et de Philosophie des Sciences)

⁸⁸ Felix Klein, o.c.

⁸⁹ Jean-Victor Poncelet, *Applications d'Analyse et de Géométrie* (2 volumes), Gauthier-Villars, Paris 1862-1864

*certain points cessassent d'exister d'une manière géométrique: nous nommerons cet état de deux figures corrélation idéale."*⁹⁰

Ce dernier type de corrélation est lié au *principe de continuité*, autre forme d'unification des figures géométriques dans la construction projective.

On peut alors considérer deux figures corrélatives comme définissant le même objet géométrique; c'est en ce sens que la figure s'efface derrière l'objet géométrique. On comprend alors pourquoi l'un des plus importants ouvrages de géométrie de l'époque, l'*Aperçu historique sur l'origine et le développement des méthodes en géométrie*⁹¹ de Michel Chasles ne contient pas une seule figure⁹².

Nous pouvons remarquer ici que ce nouvel objet géométrique n'est pas sans relation avec le point de vue de la réduction au calcul cité ci-dessus; mais si les adeptes de la réduction au calcul, comme l'explique Lagrange, voient la puissance de leur méthode dans l'autonomie du calcul par rapport aux objets, les géomètres projectifs cherchent au contraire à construire un calcul sur les objets eux-mêmes, les objets ayant été convenablement transformés dans le cadre de la nouvelle géométrie. C'est ainsi que l'on peut comprendre la polémique entre géométrie analytique et géométrie synthétique.

D'une certaine manière c'est la conception langagière qui permettra de dépasser cette polémique en explicitant les liens entre les deux modes de "calcul" représentés par chacun des points de vue. mais cela demandera une nouvelle façon de penser l'invariance projective en introduisant le point de vue "structural". Ce sera le *Programme d'Erlangen* reliant l'invariance géométrique à la théorie des groupes.

Lorsque Klein écrit:

"La géométrie projective n'a pris naissance que quand on s'est accoutumé à considérer comme entièrement identiques la figure primitive et toutes celles qui s'en peuvent déduire par projection, et à énoncer les propriétés projectives de façon à mettre en évidence leur indépendance vis-à-vis des modifications apportées par la projection"

⁹⁰ *ibid*, tome II p. 301

⁹¹ Michel Chasles, *Aperçu historique sur l'origine et le développement des méthodes en géométrie* (1837), réédition Jacques Gabay, Paris 1989

⁹² Rudolf Bkouche, "De la géométrie sans figure" o. c.

il s'inscrit dans la tradition arguésienne de la seule et même énonciation mais avec l'introduction du point de vue global que permet la notion de groupe de transformation, il ajoute une dimension nouvelle, *une géométrie* devenant la donnée d'un espace sur lequel opère un groupe de transformation (le groupe principal de la géométrie dans la terminologie de Klein), l'action du groupe *structurant*, c'est-à-dire organisant, la relation entre transformations et invariants; un invariant est alors défini par le sous-groupe des transformations qui le conserve. On explicite ainsi une correspondance entre sous-groupes du groupe principal et systèmes d'invariants; ce sont ces derniers qui définissent les objets géométriques. Klein explique à la fin du *Programme d'Erlangen* comment son point de vue participe des idées de Galois⁹³.

Si Felix Klein ne s'inscrit pas dans le courant formaliste, il a fourni au courant formaliste l'un de ses principaux instruments dans la mesure où le point de vue du *Programme d'Erlangen* s'inscrit dans une conception langagière des mathématiques (même s'il est loin de se réduire à celle-ci⁹⁴), que ce soit avec les reconstructions structurales de la géométrie élémentaire (telle, aujourd'hui, le monumental ouvrage de Marcel Berger⁹⁵) ou la théorie des catégories que l'on peut considérer aujourd'hui comme la forme la plus générale du *Programme d'Erlangen*.

Des éléments à l'infini

Pour Desargues l'introduction du point à l'infini est essentiellement une façon de dire que droites parallèles et droites concourantes ont les mêmes propriétés et le fait que par projection des droites parallèles puissent devenir concourantes justifie que le point à l'infini satisfasse aux mêmes propriétés que les points ordinaires.

Cela permet une unification des méthodes de démonstration et Desargues comme ses successeurs proches ou plus lointains ont su en faire largement usage

S'introduiront alors, d'une part les droites à l'infini, à la fois ensemble des points à l'infini d'un plan et intersection d'une famille de plans parallèles, d'autre part le plan à l'infini ensemble des points à

⁹³ Felix Klein, o.c. p. 35-37

⁹⁴ Rappelons que pour Felix Klein la connaissance n'est acquise que lorsqu'elle est devenue intuitivement évidente, cf. *Programme d'Erlangen*, o.c. p. 38

⁹⁵ Marcel Berger, *Géométrie* (5 volumes), Cedic/Nathan, Paris 1979; réédition (2 volumes), Nathan, Paris 1990

l'infini⁹⁶. Ici encore ce sont les transformations projectives qui justifient l'usage de ces objets *idéaux* (idéaux en ce sens qu'ils n'ont pas d'existence, objets non-ontologiques au sens que nous avons dit ci-dessus)⁹⁷.

Une figure, au sens de la géométrie usuelle, peut alors être *complétée* en lui ajoutant ses éléments idéaux, ainsi les cercles d'un plan ont tous en commun deux points imaginaires à l'infini (les points cycliques) et toute conique passant par ces deux points est un cercle⁹⁸. Les propriétés d'une figure sont ainsi les propriétés projectives (invariantes par les transformations homographiques) de la figure obtenue en ajoutant à la figure initiale ses éléments idéaux⁹⁹.

La géométrie élémentaire (la géométrie grecque) devient ainsi une partie de cette géométrie générale qu'est la géométrie projective. Cela pose un double problème: d'une part, le problème de la reconstruction de la géométrie usuelle à partir de la géométrie projective, d'autre part, celui d'une construction autonome de la géométrie projective. Ce dernier problème allait se montrer difficile: si la géométrie projective est construite en ajoutant les éléments idéaux à la géométrie usuelle comme cela se fait depuis Desargues, elle n'en est pas indépendante; le problème de l'autonomie du projectif se situait ainsi aux limites du second moment de la construction géométrique (au sens que nous avons dit ci-dessus). On peut comprendre ainsi l'échec relatif de la première tentative d'une telle construction autonome de la géométrie projective, celle de von Staudt qui, s'il a mis en place dans son ouvrage *Die Geometrie der Lage*¹⁰⁰, les éléments d'une construction indépendante de toute notion métrique s'est heurté à certaines difficultés (définition du point à l'infini indépendante de toute notion de parallélisme, définition de la correspondance numérique-géométrique à partir du birapport

⁹⁶ Jean-Victor Poncelet, *Traité des Propriétés Projectives des Figures*, o.c. tome I, p. 52 et p. 361

⁹⁷ en fait, les objets idéaux sont les éléments à l'infini et les éléments imaginaires, ces derniers définis par le principe de continuité.

⁹⁸ Jean-Victor Poncelet, *Traité des Propriétés Projectives des Figures*, o.c. tome I, p. 47-48; Michel Chasles, *Traité de géométrie supérieure*, Gauthier-Villars, Paris 1852/1880, p. 424-425

⁹⁹ Arthur Cayley, "A sixth memoir upon quantics" *Philosophical Transactions of the Royal Society of London*, vol. CXLIX, 1859, p. 61-90; n° 158 in Arthur Cayley, *Collected Mathematical Papers*, Cambridge University Press, vol. II, p. 561-592

¹⁰⁰ Carl Von Staudt, *Die Geometrie der Lage*, Nuremberg 1847; pour une critique de l'ouvrage de Von Staudt, cf. Felix Klein, *Developments of Mathematics in the XIX^e Century* (1928) (translated by M. Ackermann) Math. Sci. Press, Brookline 1979, p. 121-125 et Morris Kline, *Mathematical Thought from Ancient to Modern Times*, Oxford University Press, 1972, p. 850-853.

indépendante de toute notions métriques).

C'est que la géométrie projective du XIX^{ème} siècle, dans son dépassement de l'ontologie, s'arrête à mi-chemin; l'invariance permet de considérer les éléments à l'infini comme des points ordinaires, la seule et même énonciation se présentant alors comme la possibilité pour les objets idéaux de se comporter comme les objets ordinaires, c'est-à-dire que l'on peut travailler comme s'ils étaient des objets ordinaires. La solution viendra de l'inversion du problème, il s'agit moins de travailler comme si les objets idéaux relevaient d'une ontologie (ce qui était le *coup de force épistémologique* de Desargues, pourrait-on dire) que d'oublier l'ontologie des objets réels, c'est ce passage à la *désontologisation* des objets mathématiques qui inaugure le troisième moment, conduisant à la conception langagière, la *substitution des mots aux choses* si l'on veut¹⁰¹.

C'est un point de vue analytique qui permettra cette désontologisation. La géométrie projective a trouvé sa représentation analytique avec les coordonnées homogènes de Plucker¹⁰², représentation analytique qui conduira à la définition des espaces numériques (de dimension quelconque) que Cayley définit ainsi dans un article de 1870¹⁰³:

"Postulate. We may conceive a m-dimensional space, the indetermination of the ratio of m + 1 coordinates, and locus in quo of the point, the unique determination of these ratios. More generally. More generally we may conceive any number of spaces, each of its own dimensionality, and existing apart by itself.

*Conversely, any m + 1 quantities may be taken as the coordinates of a point in a m-dimensional space"*¹⁰⁴

Ainsi un espace numérique de dimension n est l'ensemble des systèmes de $m + 1$ nombres défini à un facteur près.

Dans ce cadre, les points à l'infini peuvent être définis comme les

¹⁰¹ C'est cette désontologisation qu'accomplit Hilbert lorsqu'il écrit que l'objet mathématique est le signe (cf. ci-dessus)

¹⁰² Julius Plucker, *Analytisch-geometrische Entwicklungen* (2 vol.) Nuremberg 1828-1831 et *System des analytische Geometrie*, Berlin 1835

¹⁰³ Arthur Cayley, "A memoir on abstract geometry" *Philosophical Transactions of the Royal Society of London*, vol. CLX, 1870, p. 51-63; n° 413 in Arthur Cayley, *Collected Mathematical Papers*, o.c. vol. VI p. 456- 469

¹⁰⁴ *ibid* p. 458

points dont la dernière coordonnée est nulle¹⁰⁵, cette condition permet de considérer les points à l'infini comme les points d'un plan, le plan à l'infini. Les transformations projectives qui s'expriment comme des transformations linéaires des coordonnées homogènes permettent alors de transformer les éléments à l'infini en des éléments à distance finie et par conséquent de ne plus les distinguer du point de vue projectif.

Ainsi le point de vue analytique permettait la construction d'une géométrie projective autonome; la géométrie usuelle s'obtenant en choisissant arbitrairement le plan à l'infini. Dans ce cadre, l'infini n'est donc plus qu'une façon de nommer certains éléments et le choix de ces éléments relève de la libre décision du géomètre; en fait cette liberté signifie que ce choix s'inscrit dans le type de problème que l'on veut résoudre et en cela participe de la problématique arguésienne, mais au lieu de transformer la figure, il suffit simplement de la lire dans le contexte le plus favorable à la résolution du problème posé; c'est en ce sens que la *"seule et même énonciation"* s'inscrit dans une pure conception langagière.

On retrouve ici cette lecture multiple des situations géométriques qui caractérise la modernité mathématique, mais cette lecture multiple a un double aspect, d'une part elle relève de la seule forme, d'autre part elle permet de *"voir"* une situation à travers une autre, se traduisant par ce que l'on peut appeler un *transfert d'intuition* conduisant à cet enrichissement de l'intuition dont j'ai déjà parlé ¹⁰⁶.

Cette lecture multiple marque ainsi les limites de la seule réduction au calcul. La réduction au calcul met en avant la seule forme et c'est sur cette seule forme qu'elle invite le mathématicien à travailler,

¹⁰⁵ Nous rappelons l'introduction des coordonnées homogènes à partir des coordonnées cartésiennes telle qu'on la trouve dans les traités classiques de géométrie analytique: A tout point de coordonnées (x, y, z) , on associe un quadruplet (X, Y, Z, T) tel que l'on ait les relations

$$X = xT \quad Y = yT \quad Z = zT$$

Ainsi on associe à tout point un quadruplet défini à un facteur près et réciproquement un quadruplet non nul définit un point, deux quadruplets proportionnels définissant le même point.

Si l'on considère une droite déterminée par deux points (a, b, c, d) et (a', b', c', d') , et si l'on note (X, Y, Z, T) les coordonnées d'un point variable de la droite, on montre aisément que la coordonnée T tend vers 0 lorsque le point s'éloigne à l'infini.

Les points à l'infini sont ainsi définis par l'équation $T = 0$ ce qui permet de considérer l'ensemble des points à l'infini comme un plan.

¹⁰⁶ Rudolf Bkouche, "De la géométrie sans figure" o.c.

point de vue nécessaire sur le plan de la méthode comme le laisse entendre une lecture *à la lettre* du texte de Dieudonné cité ci-dessus, mais point de vue intenable autant sur le plan de la construction de la connaissance (quel est l'objet de la connaissance?) que sur le plan de l'activité mathématique.

Si la conception langagière permet une lecture multiple, c'est que la *seule et même énonciation* ne relève pas de la seule forme mais s'appuie tout autant sur la diversité des significations; parler d'infini, c'est, en donnant un nom à certains éléments de l'objet géométrique que l'on étudie, se référer à des situations géométriques particulières et jouer entre ces diverses situations particulières (l'infini renvoie ainsi aux représentations mentales). Si toute conique est un cercle c'est aussi que toute conique est une parabole, ou une hyperbole équilatère; on peut lire ainsi non seulement les propriétés des coniques à travers les coniques particulières que sont le cercle, la parabole ou l'hyperbole équilatère, mais aussi les propriétés d'une conique particulière donnée à travers une autre conique particulière.

La *seule et même énonciation* fournit ainsi un dictionnaire et la conception langagière lui apporte alors un fondement logique indépendant de la méthode des transformations; c'est cela qui marque l'émergence du troisième moment défini ci-dessus.

Si la réduction au calcul proposée par les méthodes analytiques assure ce fondement logique, elle oublie les objets en tant que tels¹⁰⁷; c'est cet oubli des objets en tant que tels que critiqueront les adeptes de la géométrie synthétique lesquels chercheront à construire *un calcul géométrique*, c'est-à-dire un calcul portant sur les objets eux-mêmes comme l'explique, de façon souvent confuse, Poncelet fasciné par la puissance et la généralité des méthodes analytiques¹⁰⁸.

C'est le point de vue structural du *Programme d'Erlangen* qui unifiera les deux points de vue, l'*analytique* et le *synthétique* en introduisant, comme on l'a vu ci-dessus, ce nouvel objet qu'est le couple formé par un espace et un groupe de transformations (le groupe principal) opérant sur cet espace; les éléments à l'infini sont alors définis comme les invariants d'un sous groupe du groupe principal ce qui redéfinit le cadre géométrique de ces éléments à l'infini. Dans ce cadre, la géométrie euclidienne plane n'est plus que la géométrie *subordonnée* à la géométrie projective plane définie par le sous groupe des

¹⁰⁷c'est cependant cet oubli qui en fait la puissance comme l'explique Lagrange dans la préface de sa *Mécanique Analytique* (cf. ci-dessus)

¹⁰⁸Jean-Victor Poncelet, *Applications d'Analyse et de Géométrie* o.c. tome II, Quatrième Cahier, p. 296-364

transformations homographiques laissant invariants une droite et deux points imaginaires conjugués de cette droite, un cercle étant une conique passant par ces deux points.

Reste alors à construire la géométrie projective de façon autonome.

Reconstruction axiomatique de la géométrie projective

Nous rappelons ici les deux grands types de construction de la géométrie projective, le premier type que nous pourrions appeler *synthétique* (pour reprendre une terminologie classique) s'inscrit dans une axiomatique *à la Hilbert*; le second type s'inscrit dans le cadre de l'algèbre linéaire¹⁰⁹.

Le plan projectif (l'espace projectif) est d'abord défini comme le plan (l'espace) de la géométrie usuelle auquel on ajoute les éléments idéaux que sont les points à l'infini; cette construction *non homogène* exige la mise en place d'un principe d'homogénéité; c'est la détermination des transformations projectives qui permet la mise en place de ce principe justifiant ainsi la *"seule et même énonciation"* arguésienne.

Cette homogénéité pose alors le problème d'une construction directe du plan ou de l'espace projectif mais une telle construction se heurte à *l'intuition journalière* comme l'explique Enriques dans son article sur les *Principes de la Géométrie*¹¹⁰. Enriques après avoir remarqué que la droite projective (la droite usuelle complétée par son point à l'infini) *"apparaît plutôt comme une ligne fermée que comme une ligne ouverte"*¹¹¹ écrit:

*"Notre intuition journalière de l'espace se trouve ainsi modifiée; le concept de l'espace ordinaire est remplacé par celui de l'espace projectif"*¹¹²

¹⁰⁹ Rudolf Bkouche, "Historique" in Daniel Lehmann-Rudolf Bkouche, *Initiation à la géométrie*, PUF, Paris 1988; p. 484-486

¹¹⁰ Federigo Enriques, "Principes de la Géométrie" in *Encyclopédie des Sciences Mathématiques pures et appliquées* (édition française), o.c. III, 1, ; le texte français de l'article d'Enriques (traduit de l'allemand par son auteur) a été publié en 1909.

¹¹¹ Cette conception de la ligne droite comme ligne fermée apparaît dans le *Brouillon Project* avec l'analogie entre la droite (munie de son point à l'infini) et le cercle, *"deux espèces d'un même genre, dont on peut énoncer le tracé en mêmes paroles"* (René Taton, o.c; p. 102)

¹¹² Federigo Enriques, o.c. p. 82

Enriques rejoint ainsi Felix Klein quant au rôle de l'intuition dans la connaissance géométrique, mais cette modification de l'intuition, pour être fondée, doit s'appuyer sur des principes rigoureux qui ressortissent d'une construction logique; ainsi peut-on comprendre la philosophie générale de l'article cité de Enriques, une dialectique entre la logique et l'intuition qui permette à la fois de connaître et de fonder cette connaissance.

La seule intuition ne suffit pas à fonder la connaissance, d'autant que l'intuition journalière (pour reprendre l'expression de Enriques) constitue un obstacle à la modification de l'intuition que demande Enriques. C'est une axiomatique à la Hilbert qui permettra la construction d'une géométrie projective autonome en éliminant tout recours à l'intuition; comme dans l'axiomatique hilbertienne, les objets géométriques ne sont plus définis que par les axiomes énoncés *a priori*, les axiomes eux-mêmes ne renvoyant, en principe, à aucune représentation mentale.

Nous ne pouvons, dans le cadre de cet article, développer l'histoire des différentes axiomatiques proposées, renvoyant à l'article cité de Enriques¹¹³ et à l'appendice historique de *l'Initiation à la géométrie* de Lehmann¹¹⁴. Pour un exposé moderne de l'axiomatique de la géométrie projective, nous renvoyons à l'ouvrage de Coxeter, *Introduction to Geometry*¹¹⁵ et à celui de Hartshorne, *Foundations of Projective Geometry*¹¹⁶.

Un autre problème se posera dans la mise en place d'une axiomatique de la géométrie projective, celui des éléments imaginaires d'autant que ceux-ci ont un rôle essentiel dans la reconstruction projective de la géométrie euclidienne.

Si l'on veut échapper à la difficulté du principe de continuité, on a besoin de donner une construction rigoureuse des éléments imaginaires; on peut lire une telle construction dans le *Traité de Géométrie supérieure* de Chasles. Chasles remarque qu'un couple de points peut être déterminé par le milieu du segment qu'il détermine et par le produit des distances de ces deux points à un point de la droite qu'ils définissent, cette détermination conduit à une équation du second degré;

¹¹³Federigo Enriques, o. c. p. 78-95 et *Leçons de géométrie projective* (traduit de l'italien par P. Labérenne), Gauthier-Villars, Paris 1930, p. 397-399

¹¹⁴Rudolf Bkouche, "Historique" o. c. p. 484-486

¹¹⁵H. S. M. Coxeter, *Introduction to Geometry*, John Wiley & Sons, New York 1961/1969/

¹¹⁶Robin Hartshorne, *Foundations of Projective Geometry*, Benjamin, New York, 1967

cette équation peut avoir des solutions imaginaires; on dit alors que les points sont *imaginaires*¹¹⁷ (ils sont nécessairement imaginaires conjugués, ceci explique pourquoi les points imaginaires se présentent toujours par couple). L'introduction des points imaginaires permet une étude générale des points doubles d'une homographie sur une droite, ces points doubles pouvant être réels, distincts ou confondus, ou bien imaginaires¹¹⁸. Un cas important est celui d'une involution (une homographie identique à son inverse), dans ce cas les points doubles sont nécessairement distincts et l'involution est déterminée par ses points doubles, deux points étant en involution (c'est-à-dire transformés l'un de l'autre par l'involution) si et seulement s'ils sont conjugués harmoniques par rapport aux points doubles¹¹⁹, ceux-ci peuvent être soit réels soit imaginaires ce qui conduit à distinguer deux types d'involution, les involutions *hyperboliques* (les points doubles sont réels) et les involutions *elliptiques* (les points doubles sont imaginaires conjugués). Un couple de points imaginaires conjugués est ainsi défini par une involution elliptique ce qui donne une définition *réelle* des couples de points imaginaires conjugués et plus généralement des éléments imaginaires¹²⁰; on peut alors reconstruire la géométrie euclidienne plane en choisissant une droite particulière (laquelle sera la droite de l'infini) et une involution elliptique sur cette droite, le groupe principal de cette géométrie étant le sous-groupe des transformations projectives laissant invariant la droite de l'infini et compatible avec l'involution (c'est-à-dire telles que deux points à l'infini en involution se transforment en deux points à l'infini en involution)¹²¹.

Le second type de construction de la géométrie projective s'exprime en termes d'algèbre linéaire.

Les coordonnées homogènes de Plücker permettent de représenter une transformation projective comme une transformation linéaire des coordonnées, cette remarque a conduit à la définition moderne de l'espace projectif comme l'ensemble des droites vectorielles d'un espace vectoriel¹²², une transformation projective est alors déterminée par la donnée, à un facteur multiplicatif près, d'une transformation linéaire (en

¹¹⁷ Michel Chasles, *Traité de géométrie supérieure*, o. c. p. 54-55

¹¹⁸ *ibid*, p. 100-101

¹¹⁹ *ibid*, p. 128

¹²⁰ John Wesley Young, *Projective Geometry* (1930), The Mathematical Association of America and The Open Court Publishing Company, Chicago 1971, p. 131

¹²¹ *ibid*, chapitre VI (dans son ouvrage, Young expose la construction dans l'espace, mais le principe en est le même)

¹²² on peut considérer que cette construction n'est autre que celle de Cayley libérée de l'utilisation de coordonnées.

termes modernes, le groupe projectif est le quotient du groupe linéaire par la sous-groupe des homothéties vectorielles).

La construction linéaire de la géométrie projective permet de définir celle-ci sur un corps quelconque; on définit ainsi la géométrie projective réelle (sur le corps des nombres complexes) et la géométrie projective complexe (sur le corps des nombres complexes), on peut alors, en considérant le groupe linéaire réel comme sous-groupe du groupe linéaire complexe, définir la géométrie réelle comme géométrie subordonnée (au sens du *Programme d'Erlangen*) de la géométrie complexe. La géométrie euclidienne est alors définie par un sous groupe convenable de ce groupe projectif réel.

La construction linéaire s'appuie sur la donnée d'un *corps de scalaires* et la géométrie est ainsi subordonnée au numérique alors que la construction axiomatique à la Hilbert est indépendante de tout recours au numérique. La question se pose alors de la compatibilité entre ces deux types de construction; on aborde ainsi, d'une façon indépendante de toute notion de mesure des grandeurs, la relation générale entre le géométrique et le numérique¹²³.

L'étude axiomatique de la relation entre géométrique et numérique a montré le rôle du théorème de Desargues sur les triangles homologues que l'on peut énoncer ainsi:

"Soient deux triangles ABC et A'B'C' tels que les droites AA', BB', CC' soient concourantes, alors, si l'on note a, b, c les points d'intersection respectifs des couples de droites (BC, B'C'), (CA, C'A') et (AB, A'B'), les points a, b, c sont alignés"

Ce théorème est publié dans l'ouvrage cité de Bosse¹²⁴ et reproduit dans l'ouvrage de Taton sur Desargues¹²⁵. La démonstration est triviale lorsque les triangles ne sont pas dans un même plan; lorsque les triangles sont dans un même plan, on peut soit montrer que les triangles sont les perspectives de deux triangles non coplanaires satisfaisant la même propriété, soit utiliser des relations numériques, que ce soit le théorème de Menelaus comme le fait Desargues, soit utiliser des coordonnées (cette dernière démonstration montre qu'un plan projectif sur un corps satisfait le théorème de Desargues). Notons le rôle de ce

¹²³Rudolf Bkouche, *Autour du théorème de Thalès*, IREM de Lille, 1994 (à paraître)

¹²⁴Abraham Bosse, o.c. p. 340

¹²⁵René Taton, o.c. p. 206-207

théorème dans la construction axiomatique: c'est lui qui permet de définir la division harmonique de façon purement graphique (c'est-à-dire indépendamment de toute relation numérique)¹²⁶. Hilbert a montré que le théorème de Desargues est indépendant des relations d'incidence¹²⁷, il faut donc le poser comme axiome dans la construction axiomatique du plan projectif; on démontre alors qu'un plan projectif satisfaisant à l'axiome de Desargues peut être défini comme plan projectif sur un corps¹²⁸.

Le théorème de Desargues assure ainsi l'équivalence des deux constructions de la géométrie projective.

Le point à l'infini du plan complexe

Nous avons rappelé ci-dessus comment la représentation géométrique des nombres complexes a donné un statut à ces derniers, un nombre complexe s'identifiant, d'une part à un point du plan, d'autre part à une opération du plan¹²⁹.

Cette représentation géométrique a conduit à la définition de ce qu'on a appelé *le plan complexe* et à relier les opérations sur les nombres complexes à certaines transformations du plan (translations, rotations, similitudes).

C'est cette représentation géométrique qui a permis à Riemann de développer une théorie géométrique des fonctions d'une variable complexe à valeurs complexes, une telle fonction définissant une application d'un domaine du plan dans le plan¹³⁰. L'étude du comportement d'une fonction pour des valeurs infiniment grande de la variable complexe a conduit à introduire la valeur ∞ de cette variable, valeur qu'on peut ramener à *distance finie* par la transformation $z \rightarrow \frac{1}{z}$.

Ainsi, via une transformation convenable, l'étude du comportement d'une fonction *au voisinage de l'infini* est analogue à l'étude au voisinage d'un point à distance finie. On peut alors aussi bien, suivant le type de problème que l'on étudie et la façon dont on l'étudie, ramener le

¹²⁶John Wesley Young, o.c. p. 36-39

¹²⁷David Hilbert, o.c. p.

¹²⁸Emil Artin, *Algèbre géométrique*, (traduction Michel Lazard), Gauthier-Villars, Paris 1962, chapitre II et Pierre Samuel, *Géométrie projective*, PUF, Paris 1986; p. 46-49

¹²⁹Eduard Study, Elie Cartan, o.c.

¹³⁰Bernhard Riemann, "Principes fondamentaux pour une théorie générale des fonctions d'une grandeur complexe" in *Oeuvres mathématiques* (traduites par Laugel) (1897), Blanchard, Paris 1968 et Jacques Gabay, Paris 19..

point à l'infini à distance finie ou envoyer un point à distance finie à l'infini¹³¹.

On a ainsi *homogénéisé* le plan complexe complété par l'introduction du point à l'infini; cette homogénéisation prend une nouvelle signification géométrique avec la *sphère de Riemann*, la projection stéréographique établissant une correspondance entre points du plan et points de la sphère¹³².

De façon précise, on considère dans l'espace rapporté à un repère orthonormé $Oxyz$ la sphère unité de centre O , la projection stéréographique de centre le pôle nord N (le point de coordonnées $(0,0,1)$) envoie un point M de la sphère sur le point m intersection de la droite NM et du plan Oxy . Si l'on note ξ, η, ζ , les coordonnées du point M , le point m a pour coordonnées dans le plan Oxy :

$$x = \frac{\xi}{1-\xi} \quad y = \frac{\eta}{1-\zeta}$$

et on lui associe le nombre complexe $z = x + iy = \frac{\xi + i\eta}{1-\zeta}$.

Cette correspondance qui envoie bijectivement la sphère privée du point N sur la plan peut être étendue à la sphère toute entière si l'on ajoute au plan le point ∞ , et si l'on considère ce point ∞ comme l'image de N par la projection stéréographique, un voisinage du point ∞ n'étant autre que l'image d'un voisinage de N par la projection stéréographique. La projection stéréographique permet ainsi de transporter sur la sphère de Riemann la notion de fonction analytique d'une variable complexe¹³³.

On pourra remarquer l'analogie entre la correspondance "sphère-plan" introduite ici et la correspondance "cercle-droite" déjà remarquée par Desargues dans son *Brouillon Project*¹³⁴.

Mais si analogie il y a, on est en présence de deux constructions

¹³¹Bernhard Riemann, "Théorie des fonctions représentables par la série de Gauss" in *Oeuvres mathématiques*, o.c.

¹³²Felix Klein, *On Riemann's Theory of Algebraic Functions and their Integrals* (1881) (translated from the German by Frances Hardcastle), Dover Publications, New York 1963, p. 15-16; *Lectures on Icosahedron* (1884) (English translation G.G. Morrice), Dover Publications, New York 1956, chapter 2

¹³³Hermann Weyl, *The concept of a Riemann Surface* (1913) (translated from the German by G.R. Mac Lane) Addison-Wesley, Reading Mass. 1955, p. 37; Henri Cartan, *Théorie élémentaire des fonctions d'une variable complexe*, Hermann, Paris 1961, p. 90-92

¹³⁴René Taton, o.c. p. 102

apparemment incohérente (si l'on se place du seul point de vue des objets); dans un cas, pour des raisons géométriques, on ajoute au plan une droite à l'infini, ensemble des points à l'infini des diverses directions du plan, dans le second cas, pour des raisons liées à l'étude des fonctions, on ajoute au plan un seul point à l'infini.

Cette apparente incohérence disparaît si l'on prend en considération, d'une part le caractère problématique des concepts, d'autre part le point de vue structural, lequel assure la cohérence de ces deux *complétions* du plan.

Nous nous intéresserons d'abord au point de vue structural, renvoyant à plus tard le point de vue problématique.

C'est l'étude analytique des homographies qui permet d'explicitier l'analogie entre la droite d'une part et le plan complexe d'autre part. Si l'on représente un point par sa coordonnée x (abscisse réelle ou affixe complexe selon que l'on étudie la droite ou le plan complexe), une homographie est définie par la relation

$$f(x) = \frac{ax + b}{cx + d}$$

a, b, c, d étant quatre nombres (réels ou complexes) tels que

$$ad - bc \neq 0.$$

Cette analogie analytique devient intrinsèque (c'est-à-dire indépendante de tout recours aux coordonnées) si l'on se place dans le cadre de l'algèbre linéaire. La droite projective sur un corps (l'espace projectif unidimensionnel) n'est autre que l'ensemble des droites vectorielles du plan vectoriel sur ce corps (espace vectoriel de dimension 2), une homographie étant déterminée par la donnée d'une transformation linéaire définie à une homothétie près (cf. ci-dessus). Ce point de vue nous conduit à considérer le "bien mal-nommé" plan complexe comme une droite sur le corps des nombres complexes, le plan complexe complété par le point à l'infini n'étant autre que la droite projective complexe.

Notons cependant que, via la représentation sur la sphère de Riemann, la géométrie du plan complexe est susceptible d'une interprétation *réelle*.

On remarque d'abord que dans le plan complexe complété par le point à l'infini, on peut considérer une droite comme un cercle passant

par le point à l'infini: il suffit de remarquer que l'image d'une droite par une homographie est une droite ou un cercle selon que le point à l'infini est invariant ou non par l'homographie et que l'image d'un cercle est un cercle en général et une droite lorsque l'un des points du cercle est envoyé au point à l'infini. On peut ainsi considérer droites et cercles comme une même espèce de courbe (les cercles au sens large); on peut ainsi, conformément à la méthode arguésienne, étudier les droites et les cercles *par une seule et même énonciation*.

Une homographie conserve ainsi l'ensembles des cercles (au sens large), d'autre part une homographie conserve l'orientation et on montre que la conservation de l'ensemble des cercles (au sens large) et de l'orientation caractérise les homographies.

Notons que l'on connaît depuis Möbius¹³⁵ des transformations qui conserve l'ensemble des cercles (au sens large) mais non l'orientation, ce sont les inversions; on montre aisément que le groupe des transformations qui conservent l'ensemble des cercles (au sens large) est engendré par les homographies et les inversions (une seule inversion suffit). On définit ainsi une géométrie (au sens du *Programme d'Erlangen*): la *géométrie anallagmatique*.

La projection stéréographique permet de définir la géométrie correspondante sur la sphère, une homographie étant une transformation de la sphère sur elle-même conservant l'ensemble des cercles et l'orientation; je laisse au lecteur le plaisir de définir ce que devient l'inversion sur la sphère.

On peut alors situer la géométrie anallagmatique dans le cadre de la géométrie projective réelle (c'est l'interprétation réelle annoncée).

On montre aisément que le groupe des transformations de la sphère sur elle-même qui conservent l'ensemble des cercles n'est autre que le groupe des transformations projectives de l'espace qui conserve la sphère, une telle transformation conservant l'orientation si et seulement si elle conserve l'intérieur de la sphère.

Remplaçant la sphère par une surface du second degré non

¹³⁵Julian L. Coolidge, *A history of geometrical methods*, Dover Publications, New York 1963, p. 278-280

dégénérée et non réglée¹³⁶, on montre que la géométrie anallagmatique est équivalente, au sens du *Programme d'Erlangen*, à la géométrie des transformations de l'espace projectif réel de dimension 3 conservant une quadrique non réglée¹³⁷. On laisse au lecteur le plaisir d'étudier la géométrie conservant une quadrique réglée.

La droite numérique achevée

Le corps des nombres réels est aussi appelé *droite numérique*, ce qui marque le lien entre le géométrique et le numérique. On définit alors la droite numérique achevée (notée $\bar{\mathbf{R}}$) en ajoutant deux bouts à la droite numérique, savoir, le nombre $+\infty$ supérieur à tout nombre réel et le nombre $-\infty$ inférieur à tout nombre réel; un élément de $\mathbf{R}$ est alors appelé un *nombre réel fini*. On définit de façon évidente une base de voisinages de $+\infty$ (resp. de $-\infty$), les éléments d'icelle étant les intervalles $[a, +\infty]$ (resp. $[-\infty, a[$) où a est un nombre réel fini quelconque¹³⁸. La droite numérique achevée devient ainsi un espace compact¹³⁹.

On prolonge à $\bar{\mathbf{R}}$ les opérations arithmétiques de la façon suivante:

$$\text{si } a \neq -\infty \quad a + (+\infty) = (+\infty) + a = +\infty$$

$$\text{si } a \neq +\infty \quad a + (-\infty) = (-\infty) + a = -\infty$$

$$\text{si } a > 0 \quad a \cdot (+\infty) = (+\infty) \cdot a = +\infty$$

$$a \cdot (-\infty) = (-\infty) \cdot a = -\infty$$

$$\text{si } a < 0 \quad a \cdot (+\infty) = (+\infty) \cdot a = -\infty$$

$$a \cdot (-\infty) = (-\infty) \cdot a = +\infty$$

On vérifie aisément que ces opérations sont continues pour la

¹³⁶ On rappelle que l'on peut distinguer dans l'espace projectif réel de dimension 3 deux types de quadriques non dégénérée, les quadriques réglées (hyperboloïdes à une nappe, paraboloides hyperboliques) et les quadriques non réglées (ellipsoïdes réels, hyperboloïdes à deux nappes, paraboloides elliptiques), deux quadriques de même type étant projectivement équivalentes (c'est-à-dire qu'elles peuvent s'échanger par une transformation projective).

¹³⁷Felix Klein, *Programme d'Erlangen*, o.c. p. 18-21

¹³⁸ On rappelle que dans un espace topologique X , une base de voisinages V d'un point x est un ensemble de voisinages de x tel qu'un voisinage de x est caractérisé par la propriété de contenir un élément de V .

¹³⁹Nicolas Bourbaki, *Les Nombres réels*, o.c. §4

topologie de $\overline{\mathbb{R}}$.

A quoi bon une telle définition? Disons d'abord que l'introduction de la droite numérique achevée permet de rendre convergente toute série à termes réels positifs, une telle série étant convergente ou divergente (au sens usuel) selon que sa somme est un nombre réel fini ou le nombre $+\infty$. L'introduction de la droite numérique achevée conduit ainsi à la *seule et même énonciation* en ce qui concerne certaines propriétés.

Le rôle de cette *même et seule énonciation* apparaît dans la théorie de la mesure; nous nous appuyons ici sur l'exposé de Rudin¹⁴⁰.

Rappelons qu'une σ -algèbre $\mathcal{M}$ dans un ensemble X est un ensemble de parties de X satisfaisant aux propriétés suivantes:

- i: X est un élément de $\mathcal{M}$
- ii: si Y est une partie de X appartenant à $\mathcal{M}$, son complémentaire $X - Y$ appartient à $\mathcal{M}$
- iii: la réunion d'une famille dénombrable de parties de X appartenant à $\mathcal{M}$ appartient à $\mathcal{M}$

Lorsque X est un espace topologique, on lui associe la σ -algèbre $\mathcal{B}$ engendrée par les ouverts de X , les éléments de $\mathcal{B}$ sont appelés les parties boréliennes de X .

Une mesure positive sur X est une application croissante

$\mu: \mathcal{B} \rightarrow [0, +\infty]$ vérifiant les propriétés suivantes:

- i: μ est additive, c'est-à-dire que si Y et Z sont deux parties boréliennes disjointes de X , alors

$$\mu(Y \cup Z) = \mu(Y) + \mu(Z)$$

- ii: μ est σ -additive, c'est-à-dire que si $(Y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite de parties boréliennes deux à deux disjointes de X , alors

$$\mu\left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} Y_n\right) = \sum_{n \in \mathbb{N}} \mu(Y_n)$$

On voit ainsi que l'introduction de l'élément $+\infty$ comme plus grand

¹⁴⁰Walter Rudin, *Real and Complex Analysis*, Mc Graw-Hill, New York 1966, chapter 1

élément de l'ensemble des nombres réels positifs permet une définition unifiée de la mesure d'une partie borélienne prenant en compte les parties de mesure finie et les parties de mesure infinie. Une définition de la mesure utilisant seulement les seuls nombres réels finis obligerait à distinguer parties de mesure finie et parties de mesure infinie et par conséquent à distinguer les *cas de figures*. La *seule et même énonciation* permet ainsi, comme en géométrie projective, d'ignorer les cas de figures.

Remarquons cependant la différence entre les deux situations, la géométrie projective d'une part, la théorie de la mesure d'autre part. Il faut en effet distinguer les deux types d'infini considérés ici par la façon même dont se met en place la *seule et même énonciation*, ce qui nous conduit à considérer les deux points de vue, le structural et le problématique. On peut alors revenir sur l'assertion de Dieudonné sur l'élimination des contenus et des représentations mentales.

C'est sur ce dernier point que nous terminerons cet article.

Des divers modes d'existence de l'idée d'infini et de leurs représentations

Dans la construction arguésienne, le point à l'infini n'est qu'une forme dont l'usage se révèle identique à celui d'un point ordinaire; c'est en ce sens que l'on peut parler de *désinfinetisation* (cf. ci-dessus) et que l'on peut dire que le point de vue projectif marque la fin de l'infini.

Le problème est tout différent avec la droite numérique achevée. L'élément $+\infty$ a une fonction spécifique et n'est pas réductible, ni dans sa définition formelle, ni dans son usage, aux nombres réels finis. Ainsi, en ce qui concerne la notion de mesure, la distinction entre parties de mesure finie et parties de mesure infinie reste essentielle; cette distinction marque la limite de la *seule et même énonciation*, celle-ci pouvant être considérée moins comme unification des objets que comme économie de langage. C'est que l'élément $+\infty$ intervient en tant que grandeur infinie (au sens que $+\infty$ est plus grand que tout nombre réel) et c'est ce caractère de grandeur infinie qui est au coeur des problématiques de l'analyse, ce qui n'est pas le cas de la géométrie projective.

Ces remarques nous amènent à revenir sur la phrase citée de Dieudonné quant à l'élimination des contenus et des représentations mentales. Si une première lecture peut inciter à mettre en avant l'aspect langagier, une seconde lecture, prenant en compte les contenus et la façon dont le langage en rend compte, nous renvoie encore une fois au

caractère problématique des constructions théoriques.

C'est le caractère problématique (et par cela même la façon dont les mathématiciens abordent les problèmes) qui conduit les mathématiciens à définir leur choix théoriques. C'est en ce sens que le théorique n'est jamais autonome, dans la mesure où il porte la marque des problèmes qui ont conduit les mathématiciens à le construire, lors même qu'il se libère des problématiques originelles et qu'il s'enrichit des divers lieux où il intervient. C'est en ce sens que l'on peut lire l'assertion de Max Weber placée en exergue de cet article.

Le point de vue structural, s'il apparaît comme une façon de se libérer du caractère problématique dans sa tentative de mettre en place une nécessité interne des constructions théoriques, reste en fin de compte lié à ce caractère problématique. C'est ainsi que l'on peut comprendre l'efficacité des constructions langagières et c'est peut-être en ce sens que l'on peut lire le texte de Dieudonné dans *Les Grands Courants de la Pensée Mathématique* d'où nous avons extrait l'assertion sur l'élimination des contenus et des représentations mentales.

Si la conception langagière s'inscrit dans une telle conception qui relève d'une épistémologie des problématiques¹⁴¹, elle est alors marquée, y compris dans sa forme même, par la façon dont le théorique s'est construit; autrement dit, non seulement le théorique s'inscrit dans une histoire, mais à chacun des moments de cette histoire, la signification du théorique (c'est-à-dire la signification que le sujet théorisant donne au théorique) se définit dans cette histoire.

Ce serait alors la conception langagière, telle qu'elle apparaît dans ce troisième moment de l'activité mathématique dont nous avons parlé ci-dessus, qui aurait conduit à distinguer les diverses formes d'infini: un infini spatial¹⁴² qui participe de l'homogénéité de l'espace (en ce sens que points à l'infini et points à distance finie s'équivalent), un infini de grandeur qui, tout en s'inscrivant dans une construction formelle (et la droite numérique achevée est une construction formelle), est marqué par son rôle spécifique dans le développement de l'analyse mathématique.

¹⁴¹Rudolf Bkouche, "La place de l'épistémologie et de l'histoire des mathématiques dans l'enseignement d'icelle" Université d'Été Européenne d'Histoire des Mathématiques, Montpellier 1993. (à paraître). La notion d'une épistémologie des problématiques s'inscrit dans ce que Gonseth appelle une stratégie d'engagement in Ferdinand Gonseth, *Le référentiel, univers obligé de médiatisation*, Editions l'Âge d'Homme, Lausanne 1975, p. 13-17.

¹⁴²Il faut évidemment distinguer cet infini spatial de celui qui est lié au problème de la divisibilité infinie de l'espace.

En cela, comme l'explique Gonseth, "*le discours n'est pas simplement surajouté à des significations extérieures qui sans lui resteraient ce qu'elles sont. Sa participation à ce qu'il énonce est une participation active organiquement opérante*"¹⁴³. Autrement dit, l'élimination du contenu permet de reconstruire un contenu plus riche, l'élimination des représentations mentales conduit à de nouvelles représentations mentales et plus généralement l'élimination du sens est porteuse de sens.

C'est dans cette reconstruction permanente du sens que se situe la réponse, si réponse il y a, à la question posée au début de cet article.

Lille le 6 octobre 1993

¹⁴³Ferdinand Gonseth, *Le référentiel, univers obligé de médiatisation*, o.c. p. 15