BIBLIOGRAPHIE

[1] BARNSLEY M.
Fractals Everywhere — Academic Press 1988

[2] DEVANEY R.
Chaos, fractals and Dynamics — Addison Wesley 1989

[3] DOUADY A.
Julia sets and Mandelbrot Sets, in [8] — Springer-Verlag 1986

[4] ESCHER M.
L'œuvre graphique — Bibliothèque Pour La Science BELIN

[5] GLEICK J.
Chaos, Making a New Science — VIKING, New York 1987

[6] MANDELBROT B.
Les objets fractals, forme, hasard et dimension FLAMMARION 1975

[7] PEITGEN H.O. & SAUPE D.
The Science of fractal Images — Springer-Verlag 1988

[8] PEITGEN H.O. & RICHTER P.H.
The Beauty of Fractals — Springer-Verlag 1986

[9] PEITGEN H.O., JÜRGENS H., & SAUPE D.
Fractals for the Classroom — Springer-Verlag 1992

[10] PRIGOGINE & STENGERS
La Nouvelle Alliance — NRF 1979

[11] RUELLE David
Hasard et Chaos — Odile Jacob 1991

[12] STEWART Ian
Does God Play Dice ? — Penguin Books 1989
Dieu joue-t-il aux dés — Flammarion 1992

[13] YOUNG W.H. & YOUNG G.C.
The Theory of Sets Of Points — Cambridge University Press 1906
Chelsea 1972

[14] Nombreux numéros de Pour la Science, en particulier les articles de A.K. DEWDNEY dans les n° 161, 167, 170,173 ou de La Recherche en particulier le n° spécial 232, La Science du désordre.

[15] Cassette video «Nothing but Zooms» ; Société Art Matrix, PO Box 881-I, ITHACA, NY 14851

[16] Cassette video par PEITGEN JÜRGENS, SAUPE & ZAHLTEN ; «Fractals, an animated discussion», Freeman 1990

"Les élèves de collège doivent-ils ignorer les algorithmes de calcul ou de constructions où un nombre fini d'étapes ne suffit pas pour trouver un résultat ?"

Ruben Rodriguez
IREM de Basse Normandie

I - INTRODUCTION

(Quelques sujets de rencontre avec l'infini au collége).

Ce qui a d'abord attiré notre attention c'est l'utilisation de plus en plus fréquente de la calculatrice tant à l'école qu'au collége. Il est évident que ceci comporte des conséquences sur l'acquisition des notions qui sont à la base des divers concepts mathématiques abordés dans cette période (surtout dans la mesure où la calculatrice donne l'impression que tous les résultats des opérations sont obtenus avec un nombre fini de chiffres).

Un autre fait qui a attiré notre attention lors du déroulement des activités géométriques (au niveau de la 5ème), où nous avons conçu des reproductions de figures récurrentes [1] est celui de l'algorithme de construction qui contient de façon naturelle l'infini potentiel (au sens de Hilbert) ; là encore on ne peut pas rester dans le cadre d'un nombre fini d'étapes sous peine d'occulter des questions mathématiques fondamentales et que d'ailleurs les élèves découvrent sans peine.

Voilà les deux domaines d'observations que nous avons retenus pour notre article.

Nous sommes convaincus depuis bien longtemps que dans les premières années du collège les enfants ont une curiosité trés forte. Ils s'interrogent bien plus que les adultes de façon trés ouverte sans les conventions de l'univers adulte qui occulte souvent les questions clés qui sont à l'origine des connaissances nouvelles..

[1] Voir Annexe : article sur les activités de reproduction des figures qui suivent un algorithme recurrent de construction.

Nous finirons cette introduction par un avertissement qui concerne le présent travail. Il s'agit, plus que d'un travail d'aide didactique possible (comme nous vous le proposons dans nos publications du groupe IREM Raisonnement Déductif et Démonstration), d'un écrit sur des interrogations plus ou moins spontanées sur la notion d'infini au collège. N'oublions pas que toute production didactique comporte un temps d'interrogations, d'expérimentations, et de conclusions provisoires.

II - QUELQUES OBSERVATIONS AU COLLEGE.

a) En sixième.

Bien que notre principal but dans nos classes de sixième soit celui de fonder les bases méthodologiques pour pouvoir aborder les problèmes d'arithmétique et les constructions géométriques, (avec tout ce que cela comporte au niveau du sens des opérations, de la connaissance des figures usuelles et de l'utilisation rigoureuse des instruments de dessin), nous n'avons pas pu laisser de côté certaines questions pédagogiques concernant l'infini.

Premier exemple : Les divisions qui ne s'arrêtent pas.

A propos d'un problème d'arithmétique nous avons discuté avec les élèves sur l'existence des solutions en fonction des nombres donnés au départ. Ceci nous a conduit à étudier des divisions où le diviseur est 3. Les élèves se sont engagés sur des discussions portant sur le résultat affiché par les calculatrices et les résultats obtenus par une division faite "à la main". En premier lieu une division comme 1:3 faite à la calculatrice donne une idée fausse du résultat car on obtient un nombre fini de chiffres, mais si on observe le schéma de l'opération "faite à la main" on voit que les élèves parlent aussitôt d'une division **qui ne finit jamais**, ils disent par exemple : "ça continuera toujours comme ça et ça ne s'arrêtera pas".

L'intérêt des élèves de sixième vers des nombres comme O,333.... est éveillé. C'est ainsi qu'ils n'ont aucune peine à se lancer, calculatrice en main, **à conjecturer** sur certaines divisions qui ne finiront jamais. Mais seul, le schéma de division "à la main" constitue pour eux une **preuve** pour **argumenter** que la division ne s'arrêtera pas.

C'est ainsi que parmi certains "décimaux illimités" ils font connaissance avec 0,111.... ; 0,222...; 0,333...; 0,444...; etc et ils sont vite intrigués par 0,999 ... car ils peuvent écrire des divisions 1 : 9 ; 2 : 9 ; 3 : 9 etc jusqu'à 8 : 9 mais 9 : 9 est égal à 1; et on ne peut pas obtenir 0,999.... Ceci nous à permis de signaler la différence entre les divisions ; comme 3333333 :100000000 = 0,3333333 qui s'arrête (on le voit avec le schéma "à la main") mais qui à la calculatrice donne un affichage identique à la division 1 : 3. Ceci nous a servi à poser les premiers jalons sur la notion de quotient approché, d'approximation, d'encadrement et des dangers d'une lecture non critique des résultats affichés par la calculatrice.

Cette recherche suscitait donc un grand intérêt chez les élèves et nous avons relevé alors quelques unes de leurs idées qui allaient dans une bonne direction : par exemple il y a eu des élèves qui nous ont proposé d'inventer un symbole pour les quotients du type

(1 : 3) ; (2 : 3) ; (1 : 7) etc, (qui ne finissent pas) ;

nous avons proposé d'écrire $\frac{1}{3};\frac{2}{3};\frac{1}{7}$

Les élèves étaient trés attirés par l'idée de fabriquer des nombres par un simple jeu d'écriture décimale. C'est ainsi qu'on s'est amusé à écrire des nombres comme :
0,1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 ....nombre qui à suscité beaucoup d'admiration et de commentaires.

C'est là que nous avons profité de l'occasion pour nous lancer sur la représentation des décimaux par un axe gradué.

Deuxième exemple : "L'infinité des points d'un segment".

Une fois donnés les mécanismes de représentation des nombres sur un axe gradué nous avons observé que l'idée d'assimiler un point à l'endroit géométrique où on représente un nombre, conduit naturellement à parler d'un "nombre d'infini" de points dans le segment [OI] (correspondant à l'intervalle [0,1]. Les argumentations étaient de nature arithmétique du type :"entre deux nombres par exemple 0,3 et 0,4 on peut placer toujours d'autres nombres et comme ceci correspond aux points, alors on peut dire que entre deux points il y a d'autres points". Bien entendu c'est encore sous une forme potentielle que l'infini (dénombrable) est soujacent aux discours des élèves.

Troisième exemple : "La mise en correspondance de deux suites des numérateurs et dénominateurs des fractions.

Dans le cadre de l'apprentissage des fractions et aussi ultérieurement, de la correspondance proportionnelle, nous avons travaillé autour d'une situation avec des billes de deux types et des équilibres dans une balance de Roverbal . Quand ils ont conjecturé sur le nombre de billes du prochain couple de billes "bleues-rouges" en équilibre l'idée d'infini qui commençait à s'intégrer dans l'univers des concepts des élèves leur est venue spontanément. Il y a eu des élèves qui disaient qu'à partir de la "base" $\frac{3}{4}$ on pouvait obtenir d'autres couples $\frac{6}{8}$; $\frac{9}{12}$; $\frac{12}{16}$ etc "jusqu'à l'infini", mais qu'il fallait respecter la relation. C'est ainsi que la quotient 0,75 prend toute sa valeur d'invariant mathématique qui exprime numériquement le phénomène des équilibres successifs et son invariance de la relation proportionnelle.

b) En cinquième

A propos d'une des activités qui s'inscrit dans notre stratégie à long terme (de la sixième à la troisième) pour l'apprentissage de la démonstration où il fallait reproduire une figure par un algorithme récurrent (cf note 1), nous avons eu encore à faire à l'infini potentiel et à une notion de convergence dans le plan géométrique.

En effet à propos de la deuxième phase de cette activité où on rentre directement dans la jusitification des propriétés de la figure par des argumentations très proches de celles utilisées dans une démonstration nous avons observé un prolongement des conjectures à propos d'une convergence des figures successives vers un des sommets du carré (voir figure). Les élèves ont avancé des arguments qui allaient vers une distinction entre un "point de vue visuel" où les figures deviennent de plus en plus petites en se rapprochant du sommet et un "point de vue plus raisonné où ils disaient que bien que les triangles deviennent de plus en plus petits ils continuent à être des triangles et ils ne seront jamais confondus à un point.

Nous arrêtons nos observations pour effectuer quelques réflexions "à chaud".

III - QUELQUES REFLEXIONS

Comme nous pouvons le constater à travers le récit des observations présentées ici, l'enseignement des mathématiques au collège ne peut pas ignorer les infinis sous peine de cacher aux élèves des notions indispensables à la compréhension des concepts concernant par exemple les fractions, les quotients, les approximations, les points d'un segment et les limitations des calculs à la calculatrice.

Nous constatons aussi que les élèves n'ont aucun mal à intégrer l'infini potentiel dans son discours.

Ceci confirme une fois de plus qu'ils sont bien capables d'effectuer des raisonnements qui portent sur un univers des possibles. C'est-à-dire sur des processus qui "se répètent à l'infini". Une autre réflexion qui nous paraît importante est celle qui concerne l'utilisation des supports qui facilitent l'apparition des infinis (par exemple "les divisions" faites à la main ") ou bien qui l'empêchent comme la calculatrice dans les divisions. De même nous pensons que les nombres décimaux et leur représentation sur un axe permettant d'affiner la notion de point géométrique sur un segment, mais on a vu aussi que les élèves distinguent le point considéré comme un objet physique que serait la limite de la perception "à l'oeil nu" et le point comme "objet idéal" que seuls des raisonnements nous permettent de manipuler.

ANNEXE

Activités géométriques de reproduction des figures qui suivent un algorithme récurrent de constructions

Le groupe "RAISONNEMENT DEDUCTIF ET DEMONSTRATION de l'I.R.E.M de Basse-Normandie présente ici une activité centrée sur la reproduction d'un dessin complexe qui suit un algorithme récurrent de construction.[2]

OBJECTIFS :

Provoquer une rupture entre la notion des données purement perçues à partir du dessin et les instruments utilisés pour observer et la notion des données formulées explicitement en dehors du dessin afin de pouvoir justifier les conjectures géométriques.

Première phase : "Objet physique"

Pratique de l'observation des propriétés géométriques et de l'utilisation rigoureuse des instruments de dessin.

Plan de construction "Film" de la construction. Formulation de conjectures.

Conflit entre des conjectures. Impossibilité de justifier à partir des données expérimentales.

Deuxième phase : "Objet idéal"

Formulation de données explicites.

Justification des conjectures avec des argumentations qui utilisent des propriétés simples du cours. Discours de formulation proche des démonstrations.

[2] Il s'agit d'une des recherches du groupe que j'ai expérimenté dans le cadre de nos travaux sur l'apprentissage de la démonstration.

I - PRESENTATION DE L'ACTIVITE.

Dans nos objectifs à long terme sur l'apprentissage de la géométrie et de la démonstration nous sollicitons les élèves de niveau cinquième à aller encore plus loin dans l'apprentissage de la géométrie.

En effet nous avons d'abord bien mis en place en sixième des activités de reproduction de dessins complexes avec les apprentissages sur les propriétés des figures usuelles, sur la rigueur de l'utilisation des instruments, sur la forme d'écriture d'un plan de construction, sur la notion d'étapes de construction dessinées à l'aide d'un "film" (où les élèves expliquent à chaque étape le pourquoi de tel ou tel tracé, la propriété utilisée et l'instrument choisi)[3] .

Nous proposons de fixer maintenant l'idée d'objet physique et d'objet idéal à l'aide d'une activité qui se déroule en deux phases : premièrement il s'agit de reproduire une figure (voir annexe), soit à la même échelle ou soit dans une autre échelle. Dans cette partie les élèves réinvestissent les acquis, à savoir : la capacité d'observation en vue de la recherche d'invariants géométriques dans le suite de figures, utilisation rigoureuse des instruments de géométrie, connaissance des propriétés des figures usuelles, rigueur dans l'écriture du plan de construction.

Deuxièmement après avoir constaté qu'il est impossible d'avoir des certitudes sur les conjectures faites sur le dessin (qui est seulement un objet physique) soumis à des vérifications expérimentales tachées d'incertitude) on montre aux élèves la structure (à partir d'un carré) qui a servi à élaborer l'algorithme de construction (on passe à l'objet idéal sur lequel on peut avoir des certitudes). On prend conscience du fait que toutes les conjectures ne peuvent pas avoir de justification si on ne dit pas explicitement les données du départ.

[3] Voir article : Géométrie 6ème-4ème IREM de Basse-Normandie Groupe Raisonnement déductif et démonstration (Janvier 1992)

II - OBSERVATIONS SUR LA PRODUCTION DES ELEVES.

La production des élèves dans la première phase est en général trés convergente. Ils utilisent des invariants d'une étape à la suivante pour suivre un algorithme itéré. Il y a eu cependant certains élèves, notamment un élève qui a une très bonne capacité de raisonnement, qui ont fait la construction par un transport de mesures du modèle et qui n'ont fait allusion à aucun invariant dans son plan de construction. Ce dernier élève argumentait que comme il n'avait aucune structure géométrique donnée explicitement il fallait se contenter de reproduire la figure à partir des données expérimentales.

A partir des propriétés conjecturées par les élèves on a réussi à faire comprendre qu'aucune conjecture ne pouvais être prouvée par la simple observation empirique du modèle.

C'est ainsi que la transition vers la deuxième phase est apparue.

Dans la deuxième phase nous analysons la figure mais cette fois elle est construite à partir d'un cadre qui est le carré ABCD et c'est ainsi qu'on s'aperçoit de la structure géométrique sous-jacente aux constructions itérées.

C'est par l'utilisation successive des diagonales du carré et des médianes de ce même carré qu'on construit la figure. Dans cette phase on peut alors justifier certaines des propriétés remarquées dans la phase 1. Par exemple la plupart des élèves avaient conjecturé sur quelques familles de droites parallèles, et ici ils l'ont justifié par la propriété des diagonales d'un carré qui sont perpendiculaires et par la propriété des droites perpendiculaires à une même droite d'être parallèles entre elles.

Il s'agit donc d'utiliser des propriétés connues du cours de géométrie pour valider les conjectures.

Le discours argumentatif a une forme analogue à celui qu'on utilisera en quatrième pour les démonstrations mais bien entendu il ne s'agit pas encore de dire qu'on fait des démonstrations à la manière dont on entend cette activité spécifique de la quatrième.

III - RESUME DE L'ACTIVITE.

Phase 1 :

Observation du modèle. Structuration de celui-ci autour des conjectures personnelles. Utilisation rigoureuse des instruments pour effectuer une reproduction à l'échelle libre. Ecriture d'un plan de construction. Mise en commun d'une liste des conjectures sur des propriétés géométriques remarquables (parallélisme, perpendicularités, angles, relations des distances, etc..........). Statut de l' "objet physique" expérimental. Impossibilité d'avoir des certitudes sur cet "objet physique".

Phase 2 :

Structuration de la figure autour du carré. Argumentation pour justifier certaines conjectures de la phase 1. Utilisation d'un discours qui s'appui sur les propriétés du cours. La mise en forme du discours est de même style que celui utilisé en quatrième pour les activités de démonstration.

Statut de "l'objet idéal".

LISTE NON EXHAUSTIVE DES PROPRIETES UTILISABLES :

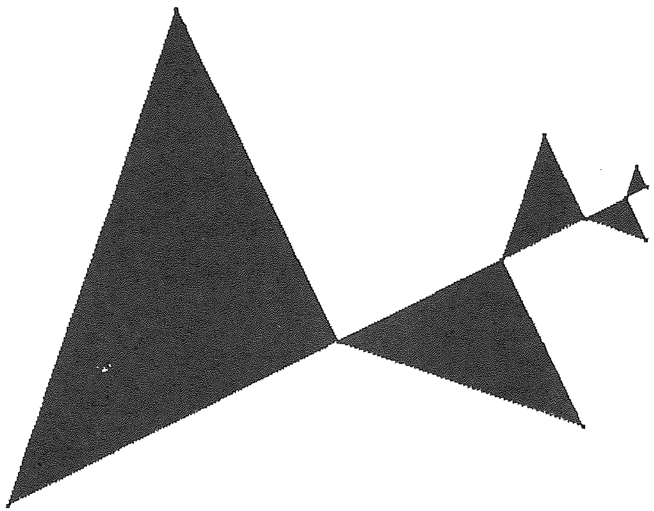
"Les diagonales d'un carré se coupent perpendiculairement dans son milieu".

"La somme des mesures en degrés des trois angles d'un triangle vaut 180".

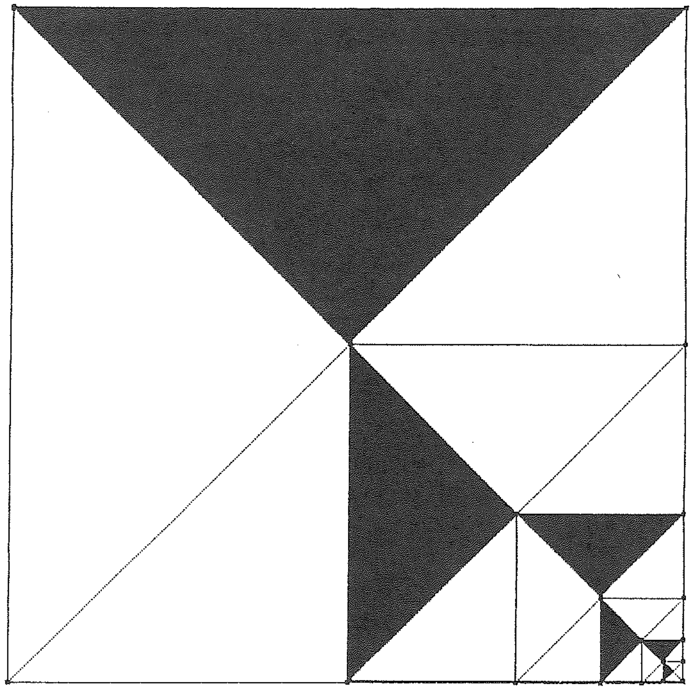
"Un triangle ayant deux côtés de même mesure est isocèle et alors il a deux angles égaux".

"Toutes les droites perpendiculaires à une même droite sont parallèles entre elles".

"Si les mesures des angles internes sont égales alors les deux droites coupées par la droite sécante sont parallèles".



Première phase
(le dessin)
Activité expérimentale.
Rigueur des instruments, conjectures.



Deuxième phase
(à partir d'un carré)
Justification de l'algorithme récurrent
Utilisation des propriétés du cours

COMMISSION INTER-IREM
HISTOIRE ET EPISTEMOLOGIE DES MATHEMATIQUES

GEOMETRIE PROJECTIVE ET INFINI

Actes du 9ème colloque INTER IREM
Epistémologie et Histoire des Mathématiques