
L'émergence du concept de fractal

François Parisot et Vincent Langlet
I.R.E.M. de Brest

I - LES PRÉCURSEURS DU CONCEPT

- I.1 - Pierre-François VERHULST et l'équation logistique.
- I.2 - Les Courbes Pathologiques
 - I.2.1 La courbe de HELGE VON KOCH
 - I.2.2 Courbe de Giuseppe PEANO
- I.3 - Ensembles de Gaston JULIA
- I.4 - La stabilité des orbites planétaires

II - LES FONDATEURS DU CONCEPT

- II.1 - Benoît MANDELBROT
- II.2 - Les objets fractals
- II.3 - La dimension fractale
- II.4 - Modélisation de la nature
- II.5 - Mitchell FEIGENBAUM et les bifurcations
- II.6 - L'étrange attracteur de LORENZ

III - L'ENSEMBLE DE MANDELBROT

IV - LES RECHERCHES ET APPLICATIONS RÉCENTES

V - UNE MUTATION ÉPISTÉMOLOGIQUE

Nous voulons retracer l'évolution qui a conduit à l'émergence, et à la diffusion du concept d'objet Fractal. Nous partons du début du XIX^e siècle et examinerons d'abord les précurseurs du concept, ceux dont les travaux inspireront plus tard les fondateurs. Situons le contexte à l'aide de deux citations. L'une est bien connue : «une intelligence qui, pour un instant donné, connaîtrait toutes les forces dont la nature est animée et la situation respective des êtres qui la composent, si d'ailleurs elle était assez vaste pour soumettre ces données à l'analyse, embrasserait dans la même formule les mouvements des plus grands corps de l'Univers et ceux du plus léger atome : rien ne serait incertain pour elle, et l'avenir, comme le passé, seraient présents à ses yeux» de Pierre Laplace.

La seconde citation est de Marcellin BERTHELOT : «Le monde est aujourd'hui sans mystère, la conception rationnelle prétend tout éclairer et tout comprendre, elle s'efforce de donner de toutes choses une explication positive et logique, elle étend son déterminisme fatal jusqu'au monde moral».

I - LES PRÉCURSEURS DU CONCEPT

I.1 - Pierre-François VERHULST (Belgique 1844) et l'équation logistique.

Pour étudier une population, on mesure son effectif à intervalles réguliers : X_0, X_1, \dots, X_n , et le taux de croissance démographique durant chaque intervalle est défini par

$$\tau = \frac{(X_{n+1} - X_n)}{X_n}.$$

Si celui-ci est constant, on tire de cette équation : $X_{n+1} = (1 + \tau)X_n$ où on reconnaît une suite géométrique,

qui n'est autre que la suite des itérés de la fonction $f(x) = (1 + \tau)x$, avec $X_{n+1} = f(X_n)$.

On sait que $X_{n+1} = (1 + \tau)^n X_n$, formule explicite permettant de computer X_n pour tout n à partir des conditions initiales τ, X_0 . Ce modèle est trop rudimentaire pour le biologiste car :

- si $\tau > 0$ (X_n) tend vers $+\infty$
- si $\tau < 0$ (X_n) tend vers 0
- si $\tau = 0$ (X_n) est constante, et aucun de ces comportements n'est réaliste.

P.F. VERHULST améliore le modèle. Il suppose que l'environnement est protégé (par exemple : bactéries dans un tube) et permet à la population d'atteindre une taille optimum T . Si la population est inférieure à T , elle va s'accroître ; si elle est supérieure à T , elle va décroître, ces variations étant d'autant plus rapides que la population est loin de T . Il pose que le taux de (dé)croissance démographique est proportionnel à l'écart avec T , avec un certain coefficient de couplage k positif. Ce qui donne successivement :

$$\tau_n = k(T - X_n)$$

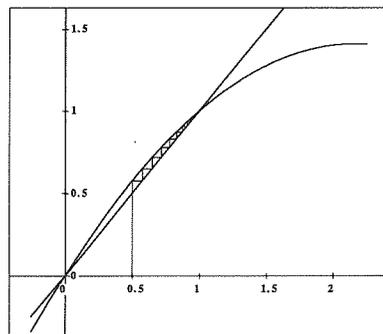
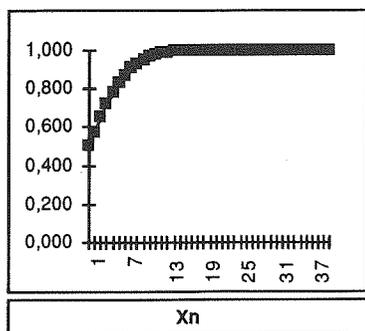
$$\frac{X_{n+1} - X_n}{X_n} = k(T - X_n)$$

$$X_{n+1} = X_n + kX_n(T - X_n)$$

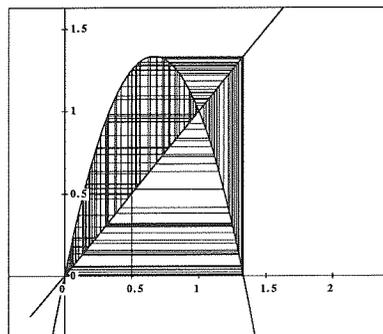
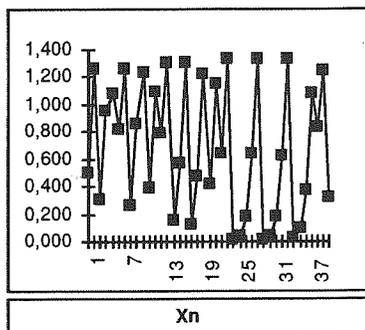
qui est la suite des itérés de la fonction $f_k(x) = x + kx(T - x)$. On peut normaliser en posant $T = 1$. Le modèle obtenu est bien meilleur :

- si X_n est petit, τ_n est assez grand et la croissance aux périodes suivantes sera forte
- si X_n est inférieur à 1 et proche de 1, τ_n est petit et positif, la croissance ralentit
- si X_n est supérieur à 1 et proche de 1, τ_n est négatif, il y a décroissance.

Voyons cela pour $k=0,3$ et $X_0 = 0,5$: on a une croissance régulière vers l'optimum de population. A gauche les points de coordonnées (n, X_n) , à droite les points de coordonnées $(X_n, f(X_n))$ et (X_n, X_n) , et la courbe représentative de f .



Voyons l'effet de coefficient de couplage k . Pour $k=3$ et $X_0 = 0,5$, on a des oscillations désordonnées autour l'optimum de population.

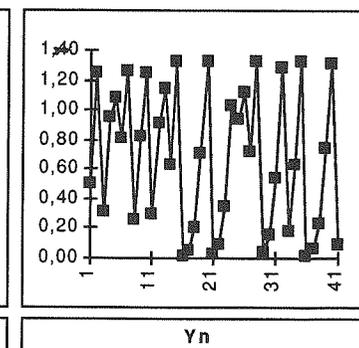
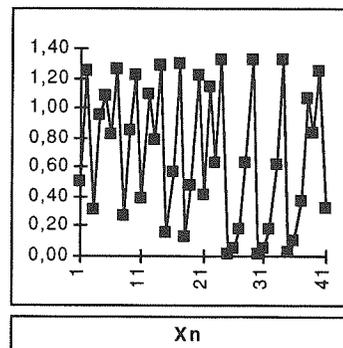


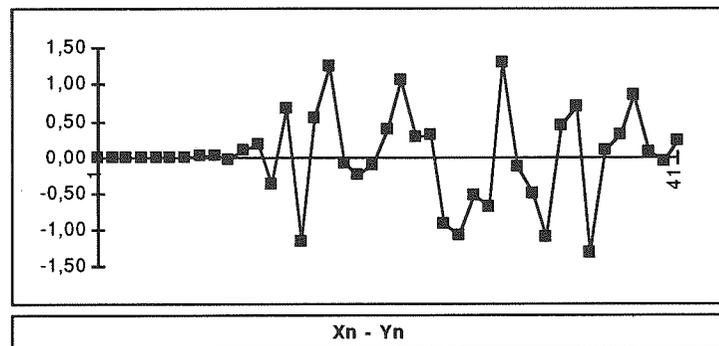
Il faut noter que le modèle est *déterministe* : bien qu'on ne puisse pas calculer explicitement X_n en fonction des conditions initiales X_0, k ; on peut calculer X_n en *itérant* la formule.

Voyons maintenant l'influence du choix de la valeur initiale X_0 : pour un coefficient de couplage assez fort $k=3$ et en prenant deux valeurs très peu différentes du premier terme comme 0,5000 et 0,5001, on s'attend à trouver deux suites dont les comportements sont très voisins. Mais à partir du terme d'indice 15 environ, elles s'écartent l'une de l'autre, et ceci de plus en plus, et à partir du terme d'indice 20 l'écart présentant lui-même des oscillations très désordonnées. On peut voir sur la figure ci-dessous les deux suites et la suite des différences :

Pierre François VERHULST : $\tau = k(1 - X_n)$
ITERATIONS DE LA FONCTION $f(x) = x + kx(1 - x)$
Sensibilité aux conditions Initiales

$k = 3,0000$	Suite $X_{n+1} = f(X_n) = X_n + k X_n (1 - X_n)$ Suite $Y_{n+1} = f(Y_n) = Y_n + k Y_n (1 - Y_n)$
$X_0 = 0,5000$	
$Y_0 = 0,5001$	





Il faut noter que le modèle est *sensible aux conditions initiales*. Une conséquence importante est que tout calcul informatisé des termes de cette suite, ou toute représentation graphique informatisée, nécessairement approchés, deviennent donc complètement et *énormément* faux au delà d'un certain nombre d'itérations. Vérifiez que la valeur absolue de l'écart atteint ou dépasse parfois 1, et est donc sensiblement égal aux valeurs de la suite elle-même ! Pour la même raison, deux calculatrices différentes donneront des termes de la suite des valeurs approchées énormément différentes !

I.2 - Les Courbes Pathologiques

Naïvement nous concevons une courbe comme un objet de dimension 1, une surface comme un objet de dimension 2. A la fin du XIXe, deux mathématiciens montrèrent les limites de cette conception en exhibant des courbes surprenantes maintenant bien connues.

I.2.1 La courbe de HELGE VON KOCH (Suède, 1906)

Il construit une suite de «courbes» selon l'algorithme ci-dessous:

- Partir d'un segment K_0 .
- Pour chaque segment de la courbe K_n : enlever le tiers central, et le remplacer par les 2 côtés d'un triangle équilatéral construit sur ce tiers central,
- On obtient ainsi K_{n+1} et on peut itérer le processus.

Chacun des quatre quarts de la courbe K_n est l'image réduite au tiers de la courbe K_{n-1} . En passant à la limite, obtient une «courbe» continue, ne contenant aucun segment de droite, et sans tangente en aucun point! Elle est de

longueur infinie, la longueur de K_n est en effet $(4/3)^n$, suite géométrique divergente.



ordre 1



ordre 3



ordre 2



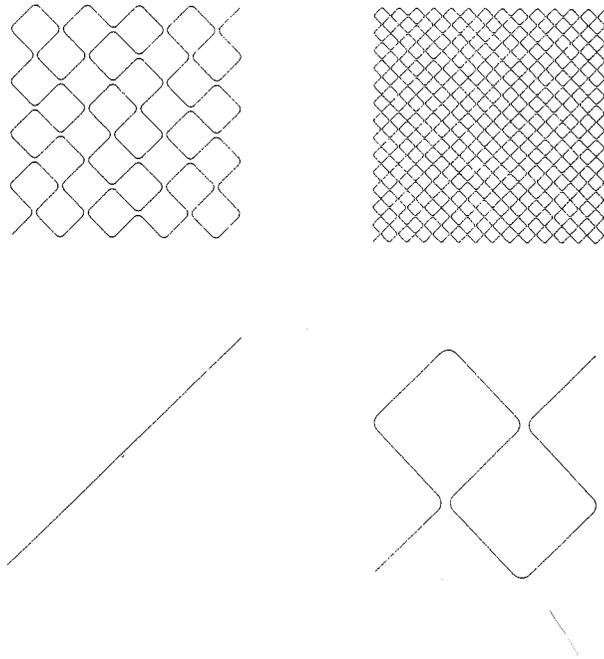
ordre 4

2.2 Courbe de Giuseppe PEANO (1858 - 1932)

Il construit une suite de «courbes» selon l'algorithme ci-dessous:

- Partir d'un segment P_0 .
- Pour chaque segment de la courbe P_n : enlever le tiers central, et le remplacer par un «huit» formé de 7 segments de même longueur que ce tiers central, en effectuant des rotations de $+90^\circ$, -90° , -90° , $+90^\circ$, $+90^\circ$, $+90^\circ$.
- On obtient ainsi P_{n+1} , et on peut itérer le processus.

Chacun des neuf parties de la courbe P_n est l'image réduite au tiers de la courbe P_{n-1} . En passant à la limite, obtient une «courbe» continue, ne contenant aucun segment de droite, et sans tangente en aucun point! Et elle semble plutôt ressembler à une partie du plan !



I.3 - Ensembles de Gaston JULIA (France 1893 - 1978)

Gaston JULIA étudie les itérations de la fonction f du corps des complexes vers lui-même définie par $f(z) = z^2 + c$ où c est un complexe fixé. Ayant choisi la valeur initiale z_0 , on obtient la suite :

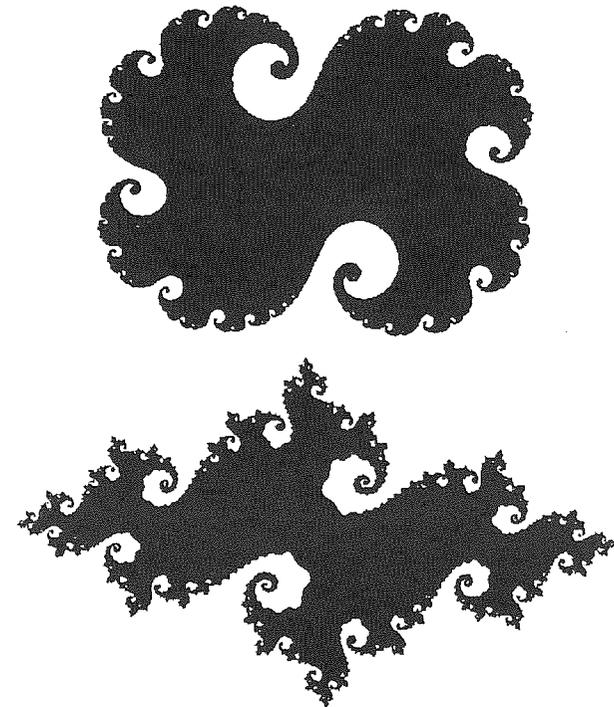
$$\begin{aligned} z_1 &= z_0^2 + c \\ z_2 &= z_1^2 + c = (z_0^2 + c)^2 + c \\ z_3 &= z_2^2 + c = ((z_0^2 + c)^2 + c)^2 + c \\ z_{n+1} &= z_n^2 + c \end{aligned}$$

Selon la valeur z_0 ou bien la suite est bornée (et la suite des points associés dans le plan complexe reste enfermée dans un cercle centré en 0) ou bien elle est non bornée (et elle sort de tout cercle de centre 0)

Par définition, l'ensemble de Julia associé à c , noté J_c est l'ensemble des z_0 tels que la suite des itérés de f est bornée.

Cet ensemble est non vide : si on choisit pour z_0 une solution ζ de l'équation $z = z^2 + c$, c'est à dire un des deux points fixes de f , on obtiendra une suite stationnaire, donc bornée et donc $\zeta \in J_c$.

Selon le choix initial de c , on s'attend naturellement à obtenir des formes diverses de J_c . L'étonnant est l'extrême diversité de ces formes, certains Julia sont bien gras, d'autres sont ténus, beaucoup ont des plumes, ou des queues d'hippocampes. Ils peuvent être partitionnés en deux classes : ceux qui sont connexes, et les autres qui sont des nuages de points analogues à l'ensemble de Cantor, explosant en une poussière d'étoiles...



I.4 - La stabilité des orbites planétaires

Par anthropocentrisme, nous pensons que le système solaire est le paragon de la stabilité et de la permanence. Les grecs anciens expliquaient qu'on avait là affaire à des

compositions de mouvements parfaits, c'est à dire circulaires.

Johannes KEPLER énonce entre 1604 et 1618 ses fameuses lois, dont la première d'entre elles dit : les orbites des planètes sont des ellipses dont le soleil est un foyer.

Isaac Newton publie en 1687 la loi de la gravitation, qui lui permet d'une part de retrouver la loi de Kepler, mais montre son imprécision si on l'applique à l'ensemble du système. Il faudrait énoncer ainsi la première loi : si *une* planète tourne autour d'*un* soleil, son orbite est une ellipse. Toute seconde planète a une influence non négligeable sur la première, et inversement. C'est le problème des trois corps, ou pire, des *n* corps. Newton pense que la stabilité du système solaire est le résultat de l'action d'un Être intelligent et tout puissant qui, de temps à autre, remet les orbites à leur place.

Lagrange, puis Laplace, formulent et étudient des équations différentielles permettant de calculer les perturbations de l'orbite d'une planète dues à ses consœurs. Laplace parvient ainsi à retrouver par le calcul les variations déjà observées par Ptolémée dans les mouvements de Saturne et Jupiter.

En 1846, Le Verrier, à la tête d'une armée d'esclaves salariés et calculateurs, reprend les opérations avec des termes d'ordre supérieur. Il annonce que les calculs de Laplace « ne peuvent s'appliquer pendant un temps infini », et il pose la question : pourra-t-on trouver un jour des solutions exactes ?

C'est enfin entre 1892 et 1899 que Poincaré démontre l'impossibilité d'intégrer les équations différentielles gouvernant le problème des 3 corps.

On ignore donc si le système solaire est stable ! Rien n'exclut que la trajectoire de la Lune, jusqu'ici considérée comme périodique, et suffisamment bien connue pour qu'on puisse établir les annuaires des marées ou prévoir les éclipses des prochains siècles, ne file un jour vers l'infini.

Les concepts de la statistique, jusque là considérés par certains comme une malpropreté nécessaire, et dont il valait mieux laisser l'usage à d'autres, ne sont donc plus une approximation de la réalité objective, mais deviennent le seul outil théoriquement concevable.

Le lecteur sera sans doute rassuré de savoir que le théorème de KAM - comme Kolmogorov, qui en a l'intuition en 1954, et Arnold et Moser qui le démontrent en 1962 - a remis en cause l'interprétation des conclusions de Poincaré : malgré l'absence de lois de conservation, les orbites stables peuvent exister. Bien plus : sous certaines conditions, la grande majorité des orbites sont stables...

II - LES FONDATEURS DU CONCEPT

II.1 - Benoît MANDELBROT

Né en Pologne en 1924, il arrive en France à 12 ans, étudie les Julia avec son oncle, est à Polytechnique de 1945 à 1947. Il émigre aux USA en 1958, et y devient IBM Fellow.

En 1965, il fait une première publication sur le concept d'*auto-similarité* : dans la distribution des erreurs dans les transmissions téléphoniques, et en analyse spectrale, dans les fonctions où intervient le hasard.

En 1967, il fait paraître le célèbre article de la revue Science : « Quelle est donc la longueur de la côte de la Bretagne ? » L'équation de la courbe nous étant inconnue, la seule méthode possible est la mesure, au sens du navigateur : étaler une carte sur la table du carré, et avec une ouverture de compas fixée, compter le nombre de reports nécessaires pour faire le tour du pays en suivant la côte. Le navigateur débutant peut s'entraîner avec un pseudo continent formé d'un grand cercle tracé au verso d'une carte périmée. En faisant varier son ouverture de compas, il aura la satisfaction de retrouver un résultat connu et de vérifier ainsi son habileté manuelle et la justesse de ses calculs...

Mesure de la circonférence d'un cercle de diamètre 1000 Km
par report d'un compas d'ouverture r

r	n = Nb entier de Cotes	DIAMETRE ESTIME : r*n
500,000Km	6	3 000,00Km
250,000Km	12	3 000,00Km
125,000Km	25	3 125,00Km
62,500Km	50	3 125,00Km
31,250Km	100	3 125,00Km
15,625Km	201	3 140,63Km
7,813Km	402	3 140,63Km
3,906Km	804	3 140,63Km
1,953Km	1608	3 140,63Km
0,977Km	3216	3 140,63Km
0,488Km	6433	3 141,11Km
0,244Km	12867	3 141,36Km
0,122Km	25735	3 141,48Km
0,061Km	51471	3 141,54Km
0,031Km	102943	3 141,57Km
0,015Km	205887	3 141,59Km

Loi de formation : on divise r par 2 à chaque ligne

Il est clair qu'à chaque division par deux de l'ouverture du compas, le nombre de reports est doublé, aux erreurs d'expérience près !

Passons alors à l'exercice suivant, après nous être approvisionné en cartes de la Bretagne à diverses échelles. Voici les résultats de Mandelbrot pour la Grande Bretagne :

Mesure de la côte de la Grande Bretagne par report d'un
compas d'ouverture r

r	n = Nb entier de Cotes	Longueur estimée : r * n
500,000Km	5	2 600,00Km
100,000Km	38	3 800,00Km
54,000Km	107	5 770,00Km
17,000Km	508	8 640,00Km

Cette fois, la division par deux de l'ouverture du compas fait beaucoup plus que doubler le nombre de reports ! En effet le compas peut suivre de beaucoup plus près les

méandres de la côte, s'engager dans les baies, visiter les rades, pénétrer les abers, raser les cailloux au passage des pointes et des caps. La question « quelle est donc la longueur... » reste donc posée !

En 1972, Mandelbrot publie un article sur les phénomènes turbulents : ayant mélangé à des données réelles sur les crues de rivière les résultats fournis par un modèle simulé, les spécialistes en hydrologie s'avèrent incapables de discerner le vrai du faux.

Enfin en 1975, c'est la sortie de l'ouvrage fondateur : Les objets Fractals, forme, hasard et dimension (Flammarion)

II.2 - Les objets fractals

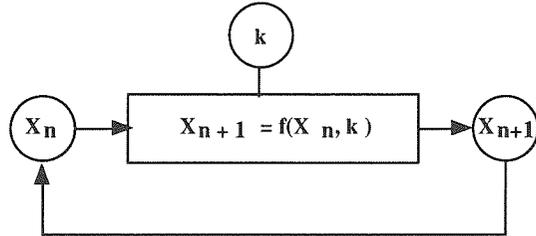
Benoît Mandelbrot dit page 160 : « je renonce à définir le concept d'ensemble fractal », après avoir cependant étudié de nombreux exemples :

- erreurs de transmission téléphoniques
- distribution des cratères de la lune
- modèles du relief
- turbulence
- structure des cellules du savon de Marseille (sphères d'Apollonius quatre à quatre tangentes)
- la répartition des trous dans le fromage de Gruyère...

Il dégage clairement 2 concepts :

- l'auto-similarité (ou homothétie interne) : chaque partie est une réduction homothétique du tout. Par exemple un quart de la courbe de Von Koch d'ordre n est une réduction dans le rapport 1/3 de la courbe de Von Koch d'ordre n-1. Donc il en est de même de la courbe obtenue en passant à la limite ! Il y a invariance d'échelle : quelle que soit l'échelle d'observation, on retrouve la même forme ou la même structure.
- Le feed back : un signal (input) subit un traitement produisant un résultat (output), qui influence plus ou moins directement le signal d'entrée. Bien des exemples précédemment évoqués, basés sur l'itération d'une même action, mettent en œuvre ce concept. Ainsi la courbe K_n sert d'objet initial à l'algorithme du I.2.1, et on obtient en sortie la courbe

X_{n+1} , qui peut à son tour servir d'objet initial à l'étape suivante. De même une simple suite géométrique ou arithmétique, ou la suite de Verhulst, sont engendrées de cette façon :



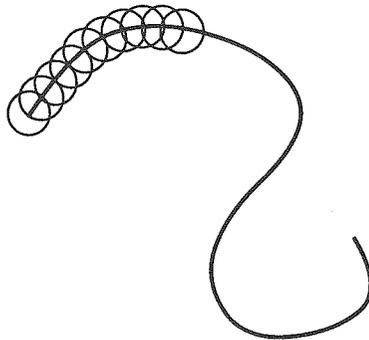
Puis il introduit la notion de dimension fractale.

II.3 - La dimension fractale

Benoît Mandelbrot suggère plusieurs façons de déterminer la dimension fractale d'un objet : dimension d'auto-similarité, dimension de contenu (de Hausdorff-Besicovitch), et dimension de recouvrement qui coïncident le plus souvent, mais pas tout le temps.

Examinons la seconde, qui est celle décrite par Mandelbrot pour la longueur de la côte bretonne. D'abord pour une ligne courbe, r désignant le rayon du cercle, $N(r)$ le nombre de reports du compas :

Mesure d'une Ligne Courbe

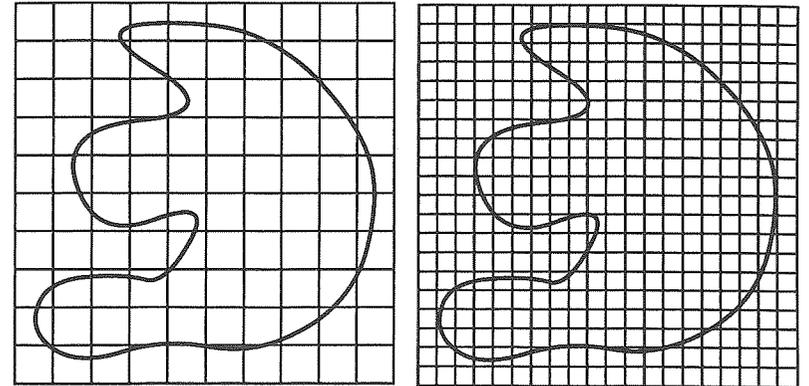


r	N(r)	r x N(r)
10,00	50	500,00
5,00	100	500,00
2,50	201	502,50
1,25	403	503,75

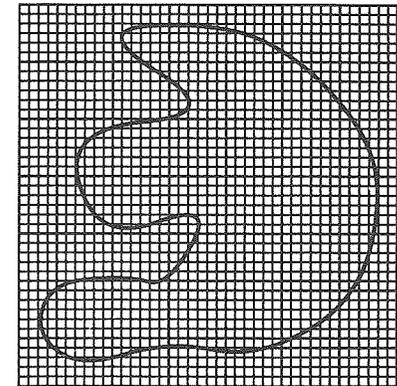
$$\lim_{r \rightarrow 0} r \times N(r) = \text{Ctte} = \text{Longueur de la courbe}$$

Puis pour l'aire d'une surface, ou le volume d'un solide, r désignant cette fois le côté du carré ou du cube servant à paver la surface ou le volume :

Mesure d'une Surface



r	N(r)	r x r x N(r)
1,00	76	76,00
0,50	247	61,75
0,25	903	56,44
0,12	3604	51,90



$$\lim_{r \rightarrow 0} r^2 \times N(r) = \text{Ctte} = \text{Aire de la surface}$$

$$\lim_{r \rightarrow 0} r^3 \times N(r) = \text{Ctte} = \text{Volume du solide}$$

Dans les expressions des limites ci-dessus, on voit que l'exposant de r donne la dimension de l'objet étudié: 1

pour une ligne courbe, 2 pour une surface, 3 pour un volume. La dimension D d'un objet est telle que :

$$\begin{cases} \lim_{r \rightarrow 0} r^D \times N(r) = \text{Ctte} \\ \text{si } d < D, \lim_{r \rightarrow 0} r^d \times N(r) = \infty \\ \text{si } d > D, \lim_{r \rightarrow 0} r^d \times N(r) = 0 \end{cases}$$

Si on procède de même avec la courbe de VON KOCH, en divisant cette fois par 3 l'ouverture du compas, ce qui multiplie par 4 le nombre de reports, on cherchera :

$$\exists D \in \mathbb{R} ? ; \lim_{p \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{3^p}\right)^D \times 4^p = \text{Ctte}$$

$$\exists D \in \mathbb{R} ? ; \lim_{p \rightarrow \infty} \left(\frac{4}{3^D}\right)^p = \text{Ctte}$$

ce qui impose $D = \frac{\text{Ln}(4)}{\text{Ln}(3)} = 1,26\dots$ et donne à cette

« courbe » une dimension fractale non entière, strictement entre 1 et 2. Il est remarquable, et conforme à l'intuition, que cette méthode donne une dimension fractale de 2 pour la courbe de Peano !

Concernant la dimension d'auto similarité, ou d'homothétie interne, elle donne pour la courbe de VON KOCH la même valeur irrationnelle. Si un objet contient N copies de lui-même dans un rapport d'homothétie r , la dimension d'homothétie interne est le nombre D tel

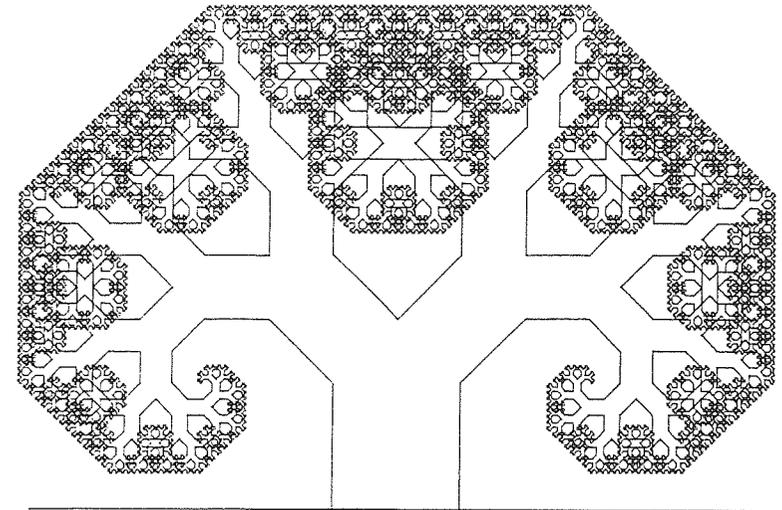
$$\text{que } N = \frac{1}{r^D} \text{ d'où } D = \frac{\text{Ln}\left(\frac{1}{N}\right)}{\text{Ln}(r)} = \frac{\text{Ln}(N)}{\text{Ln}\left(\frac{1}{r}\right)}. \text{ Pour le simple}$$

segment, qui contient 43 copies de lui-même dans un rapport $1/43$, on obtient une dimension d'auto similarité de 1, de même que la dimension d'homothétie interne d'un carré sera de 2 puisqu'il contient 1849 petits carrés 43 fois plus petits. Et pour la courbe de VON KOCH, qui est formée de quatre parties homothétiques d'elle-même dans un rapport $1/3$ on a $N=4$ et $r=1/3$, et on retrouve bien :

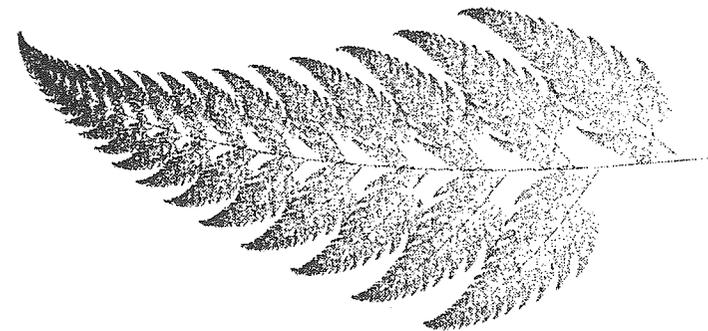
$$D = \frac{\text{Ln}(4)}{\text{Ln}(3)}$$

II.4 - Modélisation de la nature

Les objets fractals artificiels (construits par algorithme) modélisent très bien les objets naturels. Voici une modélisation Pythagoricienne du chou fleur de St Pol de Léon

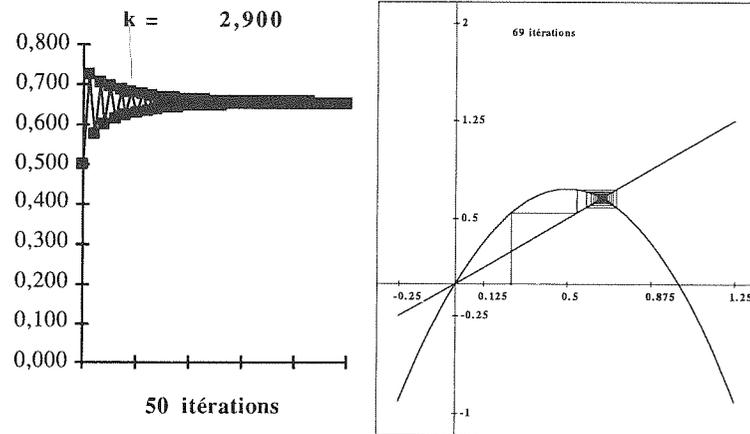


Voici une fougère obtenue par itération d'applications affines à un motif fait de quatre rectangles, un pour la queue, deux pour les folioles latérales et un pour la grande feuille centrale.

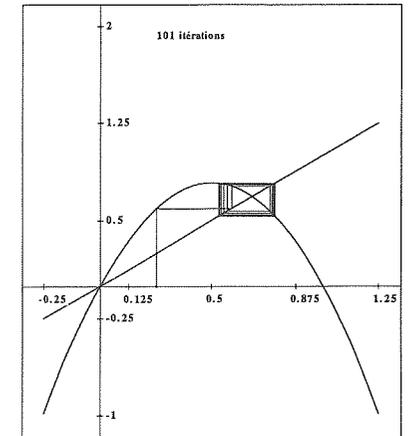
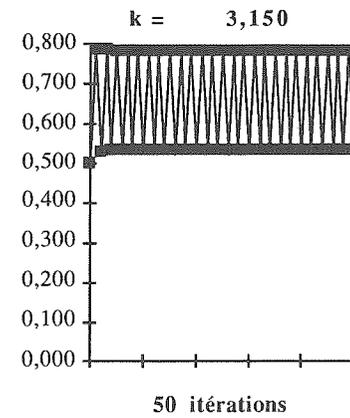


II.5 - Mitchell FEIGENBAUM et les bifurcations

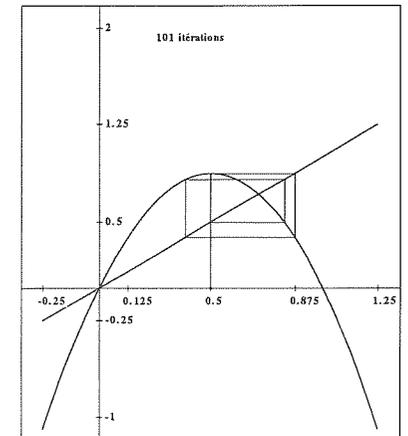
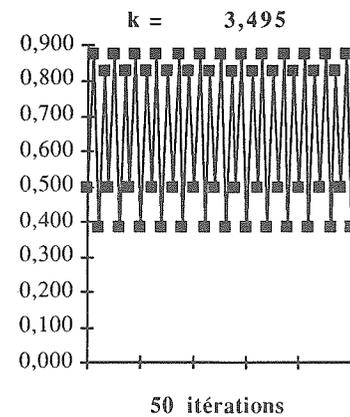
En 1979 Mitchell FEIGENBAUM publie son article « Quantitative universality for a class of non linear transformations ». Il y étudie les itérations de la fonction $f(x) = kx(1-x)$, c'est à dire quasiment la même que l'équation logistique de Verhulst, et il s'intéresse à l'influence du coefficient de couplage k . Il observe que pour des valeurs de k inférieures à 3, on a une bonne convergence de la suite des itérés vers le point fixe de f .



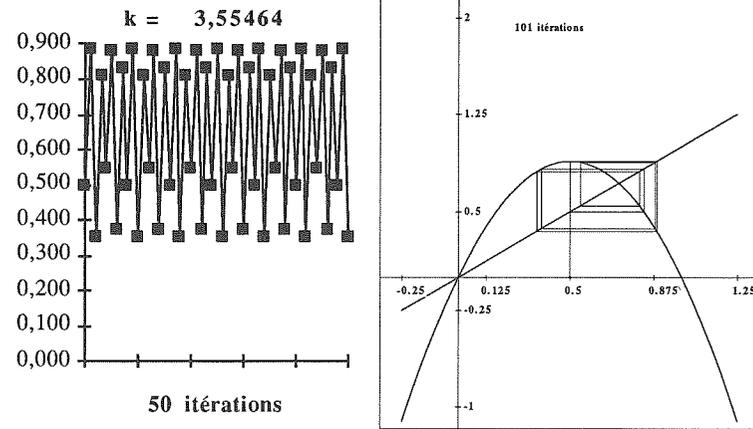
Mais pour k supérieur à 3, le point fixe devient répulsif: la suite des itérés ne peut converger qu'en étant stationnaire à partir d'un certain rang, c'est à dire en prenant comme point initial un des ascendants du point fixe. Par contre il apparaît dans les autres cas deux points attractifs, (correspondants à des points fixes de l'application f^2), autres que le point fixe de f :



En augmentant encore les valeurs de k , Feigenbaum constate que les deux points de l'attracteur deviennent à leur tour répulsifs, et qu'on a ensuite quatre points attractifs :



puis huit points attractifs...

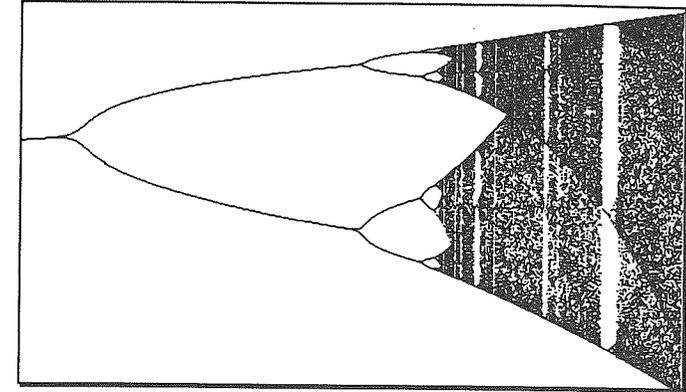


Si on note Λ_n la valeur de k pour laquelle le nombre de points de l'attracteur double pour la $n^{\text{ième}}$ fois, Feigenbaum observe que la suite formée des différences de deux termes Λ_n consécutifs, c'est à dire la longueur $(\Lambda_n - \Lambda_{n+1})$ de l'intervalle sur lequel la période 2^n est stable, suit une loi de division par un facteur qui tend vers 4,669201609103... Mieux, il pense que ce nombre a un caractère universel ! Et en effet il le retrouve en étudiant les itérés d'une fonction sinusoidale.

Par ailleurs, P.Collet (École Polytechnique), J.P. Eckmann (Université de Genève) & O. Lanford (Berkeley) ont montré qu'on retrouvait ce nombre dans l'attracteur lié à l'algorithme d'itération chaque fois que la variation du paramètre k induisait un doublement du nombre de points de l'attracteur. Ce nombre est appelé aujourd'hui nombre de Feigenbaum. On le retrouve dans bien des phénomènes physiques, en particulier dans les courants de convection apparaissant dans des fluides chauffés.

Le raccourcissement rapide des intervalles de stabilité de chaque période conduit rapidement à une situation inextricable, pour laquelle le terme de *chaos*, introduit par Jim Yorke en 1975 semble approprié, ainsi que celui d'*attracteur étrange*. Pour s'en faire une idée, on peut tracer le diagramme de bifurcation : porter en abscisse la valeur de k , pour cette valeur de k , calculer la suite des itérés de f jusqu'à ce qu'elle entre dans un cycle périodique pour

l'ordinateur ; on a obtenu les valeurs approchées des points de l'attracteur, qu'on porte en ordonnée. La figure obtenue, appelée figuier de Feigenbaum, permet de visualiser les résultats précédents : pour de faibles valeurs de k , la suite des itérés converge - un seul point dans l'attracteur - puis on obtient une suite de période 2, puis 4, puis 8 etc...



Des agrandissements de cette figure, par exemple au voisinage de la bifurcation Λ_3 montrent qu'elle jouit de la propriété d'auto-similarité.

II.6 - L'étrange attracteur de LORENZ

A la fin des années 50, E.N. Lorenz, un météorologue du MIT, pour tester les méthodes de prévision alors considérées comme les meilleures, mit au point un petit système de douze équations répondant à quelques critères simples : il devrait simuler de façon rudimentaire un modèle d'atmosphère, les solutions ne devaient pas être périodiques, mais être indéfiniment irrégulières. Après avoir fait tourner le modèle sur son calculateur et imprimé les résultats de nombreuses itérations, il décida de réutiliser des résultats intermédiaires comme nouvelles valeurs initiales. Il découvrit que la solution ainsi obtenue différait notablement de la première. Après avoir suspecté une erreur de programmation, il se rendit compte que la raison était l'infime écart

entre les valeurs originales contenues dans l'ordinateur et celles qu'il avait tapées depuis le listing où les nombres avaient été tronqués à l'impression. Après quelques itérations, la différence s'amplifiait jusqu'à devenir aussi importante que le signal lui-même.

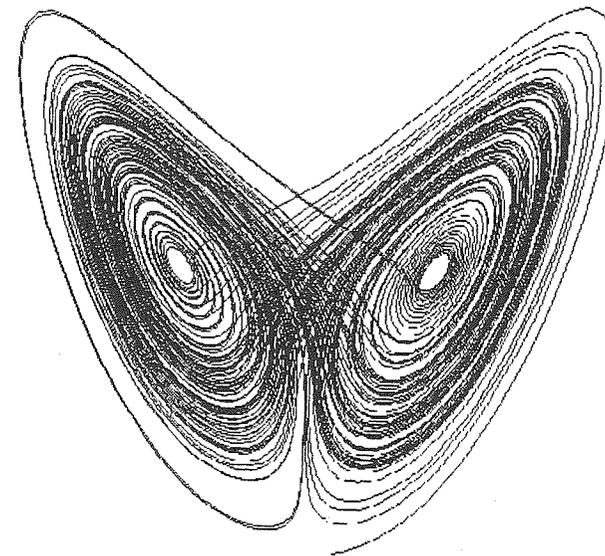
Une situation analogue a été rencontrée au paragraphe I.1 pour la suite de P.F. VERHULST : si on remplace la valeur initiale 0,5 par la valeur 0,5001 on obtient deux suites au comportement complètement différent, l'écart entre les deux étant du même ordre de grandeur que les termes de la suite !

Lorenz en conclut que même si l'on disposait d'un modèle parfaitement correct de l'atmosphère et de ses interactions avec l'océan, et d'ordinateurs infiniment puissants et précis, toute prédiction à long terme serait pourtant impossible : la mesure des paramètres (température, pression, hygrométrie etc...) nécessaires pour initialiser les calculs fournit des résultats nécessairement imprécis, et ces petites erreurs en produiront de plus grandes au fur et à mesure des itérations, et elles deviendront telles que les résultats imprimés seront complètement et *certainement* faux. Il résuma ce point de vue en une métaphore aujourd'hui célèbre : «le battement d'aile d'un papillon peut-il entraîner un ouragan sur le Texas ?». Les instituts de météorologie font aujourd'hui des prévisions à cinq jours, et pensent arriver d'ici quelques années à des prévisions à huit jours. Mais ils sont convaincus qu'il sera impossible d'aller au delà, en raison de trop nombreux papillons.

Plus tard, Lorenz détermine et étudie un système d'équations différentielles à trois variables

$$\begin{cases} \dot{x} = -10x + 10y \\ \dot{y} = 28x - y - xz \\ \dot{z} = xy - \frac{8}{3}z \end{cases}$$

Le tracé des courbes solutions issues d'un point initial fait apparaître une structure enroulée comme un feuilleté en deux nappes : c'est l'attracteur de Lorenz.



Deux points initiaux très voisins suivraient au début des trajectoires proches, mais rapidement elles vont devenir très différentes l'une de l'autre : l'un des points va s'engager vers la première nappe et l'autre vers la seconde. Là encore on retrouve, illustrée de manière frappante, la sensibilité aux conditions initiales.

III - L'ENSEMBLE DE MANDELBROT

Découvert en 1980 par Benoît Mandelbrot, c'est sans aucun doute l'objet mathématique le plus beau et le plus complexe de ce siècle, malgré la simplicité de sa définition !

On considère la fonction complexe de la variable complexe qui à z associe $f(z) = z^2 + c$ où c est une constante complexe fixée. On calcule la suite des itérés de cette fonction à partir de 0 :

$$\begin{cases} z_0 = 0 \\ z_{n+1} = f(z_n) = z_n^2 + c \end{cases} \text{obtenant ainsi successivement :}$$

$$z_0 = 0$$

$$z_1 = c$$

$$z_2 = c^2 + c$$

$$z_3 = (c^2 + c)^2 + c$$

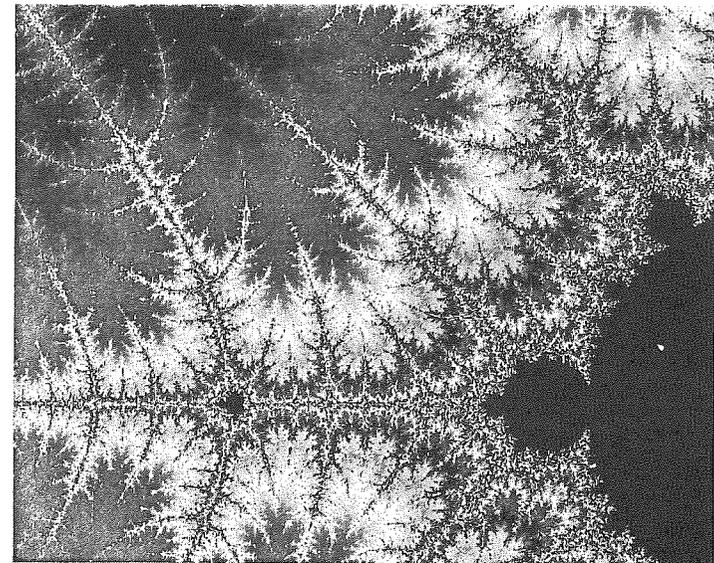
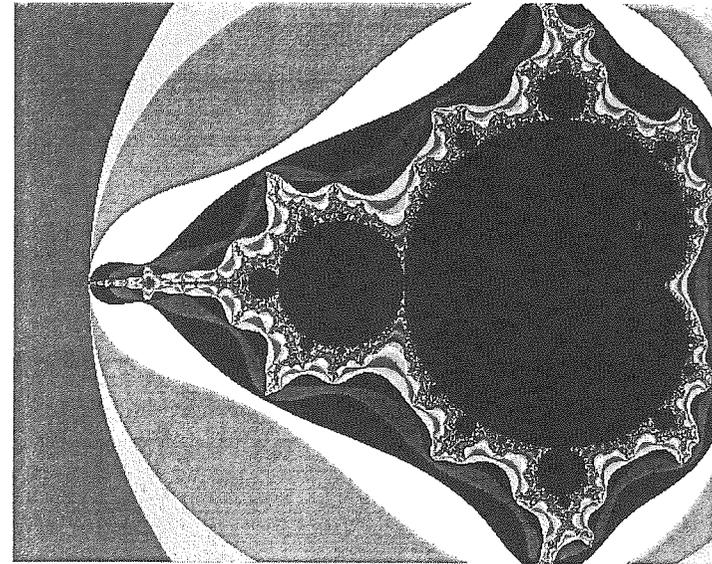
$$z_4 = ((c^2 + c)^2 + c)^2 + c$$

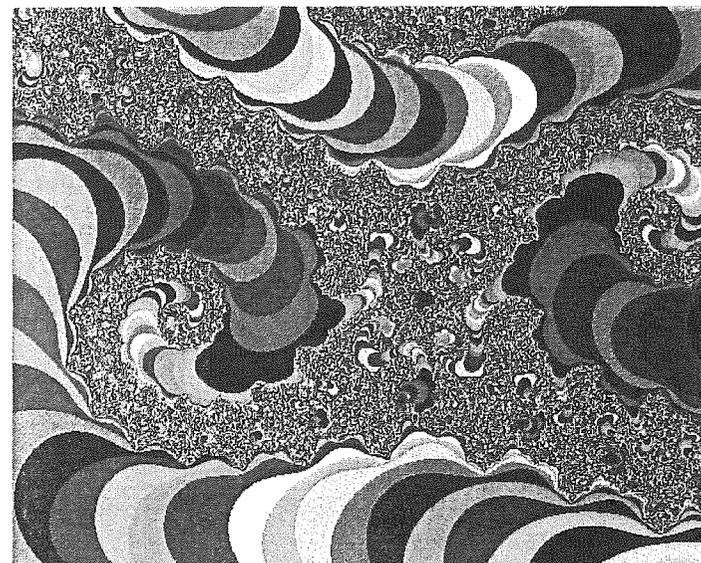
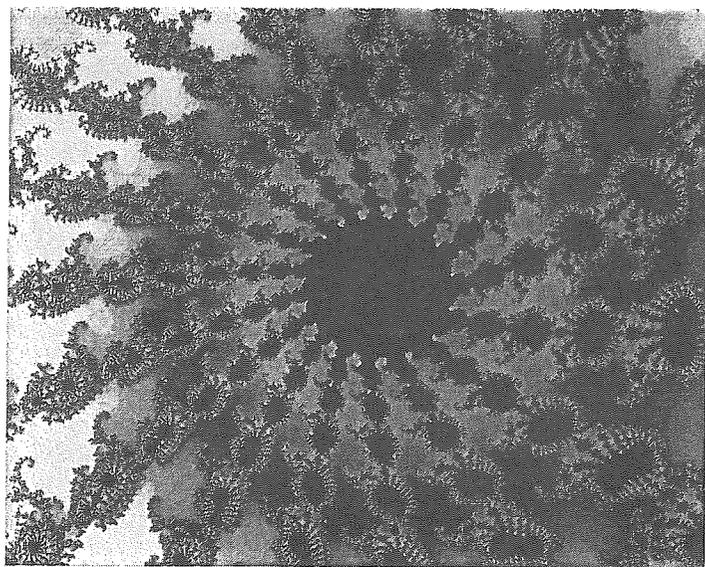
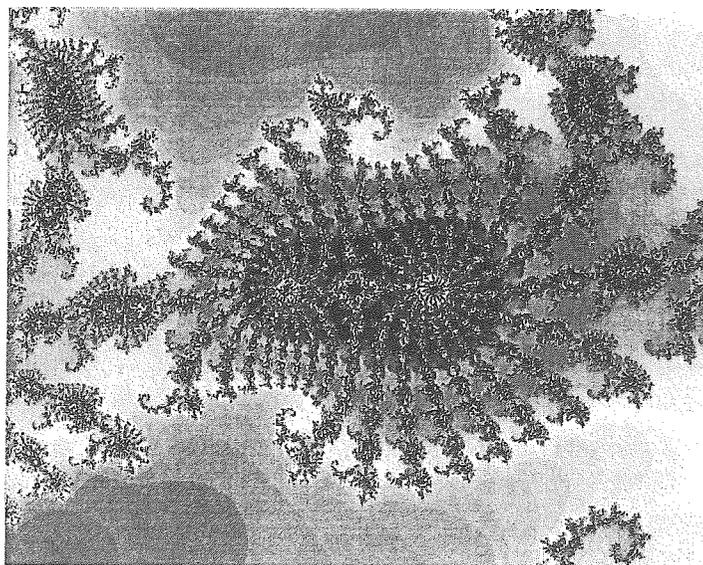
$$z_5 = (((c^2 + c)^2 + c)^2 + c)^2 + c \dots$$

Selon la valeur de c , ou bien la suite est bornée, ou bien elle est non bornée, et l'ensemble M de Mandelbrot est justement formé de tous les complexes c pour laquelle la suite des itérés de f est bornée. Cet ensemble est évidemment non vide car il contient 0, et ne contient pas tous les complexes, puisqu'il n'y a pas 1. On démontre qu'il est borné, et par exemple inclus dans le disque de centre 0 et de rayon 2. Cela permet d'établir un algorithme très simple qui traite un complexe c donné :

```
max_itérations:= 500
nb_itérations:=0
lire(c)
tant que (
  (module de c <= 2)
  et
  (nb_itérations < max_itérations)
)
  c:=c*c + c
  nb_itérations := nb_itérations+1
fin tant que
```

à la suite de quoi, ou bien le module de c dépasse 2 et il est certain que la valeur initiale de c n'est pas dans M , ou bien on a fait 500 répétitions et il est fortement probable que celle ci soit dans M . Pour visualiser M , un programme d'affichage peindra le pixel correspondant au second cas en noir, et le pixel correspondant au premier cas en couleur, puis passera au pixel voisin. Le nombre d'itérations faites avant que le module ne dépasse 2 est une bonne indication de la «proximité» de c avec M , et on pourra fixer la couleur plus ou moins sombre selon que c est plus ou moins proche de M .





En raison de la diffusion rapide de programmes affichant M sur des écrans couleurs, des milliers de personnes dans le monde ont voyagé alentour de l'ensemble de Mandelbrot, et on peut dire qu'aucun d'eux n'a fait le même voyage. Certains ont découvert des régions d'une surprenante beauté, et comme les navigateurs au mouillage d'îles nouvelles, les ont baptisées de noms évocateurs : «vallée des hippocampes», «confins de l'Ouest», «Love Canal»... Tous ont remarqué la présence obsédante de motifs répétitifs tels que disques portant sur leur frontière de nombreux autres disques plus petits portant sur leur frontière de nombreux autres disques plus petits, des spirales enchevêtrées (les queues d'hippocampes), et des images réduites de l'ensemble M lui-même.

De nombreux résultats ont été publiés concernant l'ensemble M . Par exemple sa connexité, (A. Douady et J.H. Hubbard 1982) : ainsi les copies réduites de M qui semblent en être séparées, y sont en fait connectées par de minces filaments dont la ténuité échappe aux grossiers pixels de nos écrans. Par ailleurs, M n'est pas auto-similaire, contrairement à l'impression première. Enfin le lien étroit qui unit M et les ensembles de Julia, puisque M est l'ensemble de tous les complexes c pour lesquels le Julia J_c associé est connexe. Si vous observez M avec un microscope visant le point c , ce que vous voyez ressemble à ce que vous aurez en observant le Julia J_c , avec le même microscope visant le même point c , la ressemblance étant d'autant plus forte que le grossissement est important.

IV - LES RECHERCHES ET APPLICATIONS RÉCENTES

Dans les 15 dernières années, la géométrie fractale est devenue un outil important dans la plupart des sciences « naturelles », et les domaines d'utilisation sont nombreux en physique, chimie, biologie, géologie, météorologie... :

- percolation (diffusion d'une épidémie, d'un incendie de forêt) ;
- prise en gel du yaourt bulgare ;
- structure de la boue ;
- forme des nuages ;
- cycles des glaciations terrestres ;
- structure des vaisseaux du rein ; bronchioles des poumons ;
- périodicité des vols de criquets migrateurs ;
- anomalies dans les cardiogrammes ;
- désordres boursiers ...

En mathématiques, la géométrie fractale a profondément renouvelé l'attrait de l'expérience, dont c'est la renaissance après les décennies Bourbaki.

Elle permet la synthèse d'images de fougères, arbres ou plantes monstrueuses, de paysages de montagne, donnant aux simulations un réalisme très fort. Elle suscite des créations artistiques utilisées dans de nombreux films ou spots publicitaires. Elle autorise la compression et la

décompression des données bitmap avec une très grande rapidité ...

V - UNE MUTATION ÉPISTÉMOLOGIQUE

Un point mérite d'être souligné, c'est la *rapidité de la diffusion* de ce nouveau concept. En moins de 15 ans, il a donné lieu à de nombreuses avancées dans des disciplines variées, théoriques autant qu'appliquées.

Des phénomènes jusque là délaissés car « trop compliqués » ont été remis à l'étude, comme si les chercheurs avaient le sentiment d'avoir enfin un outil de modélisation du désordre.

Ce concept est aujourd'hui devenu « grand public », suscitant de nombreux articles dans des revues de vulgarisation scientifique ou publications techniques.

Un second point à noter est *l'universalité du concept* : il est utilisé dans de nombreuses disciplines et modélise des phénomènes à toutes les échelles micro-, normalo- ou macroscopiques.

Les résultats obtenus, en particulier dans l'étude des phénomènes turbulents, ont signé la mort définitive du déterminisme. La conception du siècle dernier, faisant croire que derrière tel désordre apparent se cache un ordre inébranlable (d'essence divine ?) que la Science élucidera un jour semble aujourd'hui complètement ridicule.

Au contraire on peut se demander si l'ordre apparent de la nature ne masque pas, à une échelle plus petite ou plus grande, un véritable chaos, que l'on pourra peut-être un jour approximer par des modèles itératifs simples. C'était l'intuition d'ILYA PRIGOGINE dans La Nouvelle Alliance (1979) : « Nous sommes dans un monde irréductiblement aléatoire, où le déterminisme fait figure de cas particulier, et où l'irréversibilité et l'indétermination microscopique sont la règle... »

BIBLIOGRAPHIE

- [1] BARNESLEY M.
Fractals Everywhere Academic Press 1988
- [2] DEVANEY R.
Chaos, fractals and Dynamics Addison Wesley 1989
- [3] DOUADY A.
Julia sets and Mandelbrot Sets, in [8] Springer-Verlag 1986
- [4] ESCHER M.
L'œuvre graphique Bibliothèque Pour La Science BELIN
- [5] GLEICK J.
Chaos, Making a New Science VIKING, New York 1987
- [6] MANDELBROT B.
Les objets fractals, forme, hasard et dimension FLAMMARION 1975
- [7] PEITGEN H.O. & SAUPE D.
The Science of fractal Images Springer-Verlag 1988
- [8] PEITGEN H.O. & RICHTER P.H.
The Beauty of Fractals Springer-Verlag 1986
- [9] PEITGEN H.O., JÜRGENS H., & SAUPE D.
Fractals for the Classroom Springer-Verlag 1992
- [10] PRIGOGINE & STENGERS
La Nouvelle Alliance NRF 1979
- [11] RUELLE David
Hasard et Chaos Odile Jacob 1991
- [12] STEWART Ian
Does God Play Dice ? Penguin Books 1989
Dieu joue-t-il aux dés Flammarion 1992
- [13] YOUNG W.H. & YOUNG G.C.
The Theory of Sets Of Points Cambridge University Press 1906
Chelsea 1972
- [14] Nombreux numéros de Pour la Science, en particulier les articles de A.K. DEWDNEY dans les n° 161, 167, 170, 173 ou de La Recherche en particulier le n° spécial 232, La Science du désordre.
- [15] Cassette video «Nothing but Zooms» ; Société Art Matrix, PO Box 881-I, ITHACA, NY 14851
- [16] Cassette video par PEITGEN JÜRGENS, SAUPE & ZAHLTEN ; «Fractals, an animated discussion», Freeman 1990

**"Les élèves de collège doivent-ils ignorer
les algorithmes de calcul ou de constructions
où un nombre fini d'étapes ne suffit pas
pour trouver un résultat ?"**

Ruben Rodriguez
IREM de Basse Normandie

I - INTRODUCTION

(Quelques sujets de rencontre avec l'infini au collège).

Ce qui a d'abord attiré notre attention c'est l'utilisation de plus en plus fréquente de la calculatrice tant à l'école qu'au collège. Il est évident que ceci comporte des conséquences sur l'acquisition des notions qui sont à la base des divers concepts mathématiques abordés dans cette période (surtout dans la mesure où la calculatrice donne l'impression que tous les résultats des opérations sont obtenus avec un nombre fini de chiffres).

Un autre fait qui a attiré notre attention lors du déroulement des activités géométriques (au niveau de la 5ème), où nous avons conçu des reproductions de figures récurrentes ¹ est celui de l'algorithme de construction qui contient de façon naturelle l'infini potentiel (au sens de Hilbert) ; là encore on ne peut pas rester dans le cadre d'un nombre fini d'étapes sous peine d'occulter des questions mathématiques fondamentales et que d'ailleurs les élèves découvrent sans peine.

Voilà les deux domaines d'observations que nous avons retenus pour notre article.

Nous sommes convaincus depuis bien longtemps que dans les premières années du collège les enfants ont une curiosité très forte. Ils s'interrogent bien plus que les adultes de façon très ouverte sans les conventions de l'univers adulte qui occulte souvent les questions clés qui sont à l'origine des connaissances nouvelles..

¹ Voir Annexe : article sur les activités de reproduction des figures qui suivent un algorithme récurrent de construction.