ANNEXE

Le nombre e : calcul d'une limite (?)

$e = \lim_{x \to \infty} (1 + 1/x)^x$ (calculatrice HP 42 S)

```
01  LBL "NE"
02  1
03  STO 01
04  LBL "E"
05  RCL 01
06  1/X
07  1
08  +
09  RCL 01
10  Y↑X
11  STO O2
12  VIEW O2
13  PSE
14  RCL 01
15  2
16  x
17  STO 01
18  GTO E
19  END
```

On calcule la suite $(1 + 1/x_n)^{x_n}$ avec $x_n = 2^n$. Elle semble converger rapidement vers 2 , 71828... puis s'en éloigner, et, après quelques errances, devenir stationnaire en prenant la valeur 1.

Explication: les décimales de rang supérieur à 12 ne sont pas prises en compte par la calculatrice; donc pour $x_n > 10^{12}$, $1 + 1/x_n$ est remplacé par 1, et $(1 + 1/x_n)^{x_n}$ aussi.

Un comportement étrange des calculatrices

François Parisot
IREM de Brest

Introduction : énoncé du problème

Enoncé

Pour étudier la limite à l'infini de la fonction f définie par $f(x) = \left(x \sin \frac{1}{x}\right)^{x^2}$, on souhaite observer des valeurs numériques des nombres $f(x_n)$, pour $x_n = 2^n$.

Ce qui a motivé mes recherches

La réalisation d'un programme pour la calculatrice HP 42S par Marianne Guillemot lui a fait apparaître à partir d'un certain rang une étrange suite apparemment aléatoire de 0 et de 1.

Programme "LI" : un comportement étrange de la calculatrice

Programme

```
01 LBL "LI"
02 1
03 STO 01
04 LBL "L"
05 2
06 STO×01
07 RCL 01
08 1/x
09 SIN
10 RCL 01
11 ×
12 RCL 01
13 x↑2
14 y↑x
15 STO 02
16 VIEW 02
17 PSE
18 GTO "L"
19 END
```

limite de $\left(\frac{\sin x}{x}\right)^{\frac{1}{x^2}}$ quand $x \to 0$ =limite de $\left(x\sin\frac{1}{x}\right)^{x^2}$ quand $x \to +\infty$.

Calcul direct : $f(x) = \left(x\sin\frac{1}{x}\right)^{x^2} = e^{x^2 \ln\left(x\sin\frac{1}{x}\right)}$

$$x\sin\frac{1}{x} = x\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{6x^3} + o\left(\frac{1}{x^4}\right)\right) = 1 - \frac{1}{6x^2} + o\left(\frac{1}{x^3}\right)$$

$$x^2 \ln\left(x\sin\frac{1}{x}\right) \propto x^2 \frac{-1}{6x^2} \to -\frac{1}{6}$$

f(x) tend vers $\underline{e^{-\frac{1}{6}} \approx 0,84648172489}$

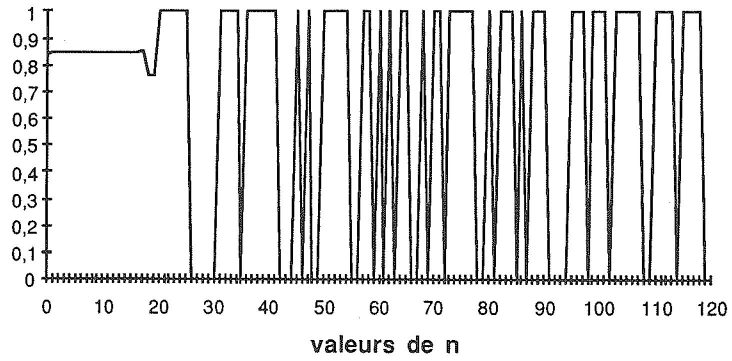
On calcule $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n)$ pour $x_n = 2^n$.

La suite semble converger vers 0,8464817 puis s'en éloigner ; puis on voit une suite de 1 et de 0 répartis de façon apparemment aléatoire ...

A sa demande, j'ai étudié le comportement de la machine pour expliquer les résultats observés, puis j'ai expérimenté à l'aide d'autres outils : calculatrice Casio, tableurs (quatro et Excel), langages de programmation (Scheme, UBasic et C++), logiciel de calcul formel (Derive).

Cas des calculatrices Hewlett-Packard (HP48SX par exemple)

valeurs de f(x) pour x=2^n (HP48SX)



Elimination du sinus

La valeur de $\frac{1}{x}$ décroissant très rapidement vers 0, la différence entre $\frac{1}{x}$ et $\sin\frac{1}{x}$ (de l'ordre de $\frac{1}{6x^3}$) doit devenir négligeable pour la calculatrice. Un petit programme le confirme : pour la calculatrice HP48 travaillant avec 12 chiffres, dès 2^{19}, $\frac{1}{x} - \sin\left(\frac{1}{x}\right)$ vaut 0. A partir de n=19, la calculatrice effectue en fait $\left(x\frac{1}{x}\right)^{x^2}$ et ne trouve pas toujours 1 !

n	f(x)	n	f(x)	n	f(x)	n	f(x)
1	0,845287879959	31	1	61	0	91	0
2	0,846186687247	32	1	62	1	92	0
3	0,846408175689	33	1	63	0	93	0
4	0,846463350686	34	1	64	1	94	0
5	0,846477131784	35	0	65	1	95	1
6	0,846480581836	36	1	66	0	96	1
7	0,846481437828	37	1	67	0	97	1
8	0,846481629288	38	1	68	1	98	0
9	0,846482096683	39	1	69	0	99	1
10	0,846482352220	40	1	70	1	100	1
11	0,846479697829	41	1	71	1	101	1
12	0,846497452084	42	0	72	0	102	0
13	0,846568464941	43	0	73	1	103	1
14	0,846454848201	44	0	74	1	104	1
15	0,847591703460	45	1	75	1	105	1
16	0,845773467160	46	0	76	1	106	1
17	0,856741685771	47	1	77	1	107	1
18	0,759664867368	48	0	78	0	108	0
19	0,759664867368	49	0	79	0	109	0
20	1	50	1	80	1	110	1
21	1	51	1	81	0	111	1
22	1	52	1	82	1	112	1
23	1	53	1	83	1	113	1
24	1	54	1	84	1	114	0
25	1	55	0	85	0	115	1
26	0	56	0	86	1	116	1
27	0	57	1	87	0	117	1
28	0	58	1	88	1	118	1
29	0	59	0	89	1	119	0
30	0	60	1	90	1	120	0

Le produit d'un nombre par son "inverse" ne vaut pas toujours 1

La calculatrice arrondit en effet $\frac{1}{x}$ pour ne conserver que 12 chiffres significatifs et commet donc une erreur majorée par $0{,}5\ 10^{-12-\mathrm{int}(\log(x))}$ qui après multiplication par x donne pour le produit une erreur majorée par $5\ 10^{-12}$ (la démonstration est laissée au lecteur).

C'est là que la valeur 1 du résultat exact joue un rôle fondamental :

— quand l'erreur est commise par excès, elle porte sur le 13ième chiffre et ne modifie pas le résultat 1,

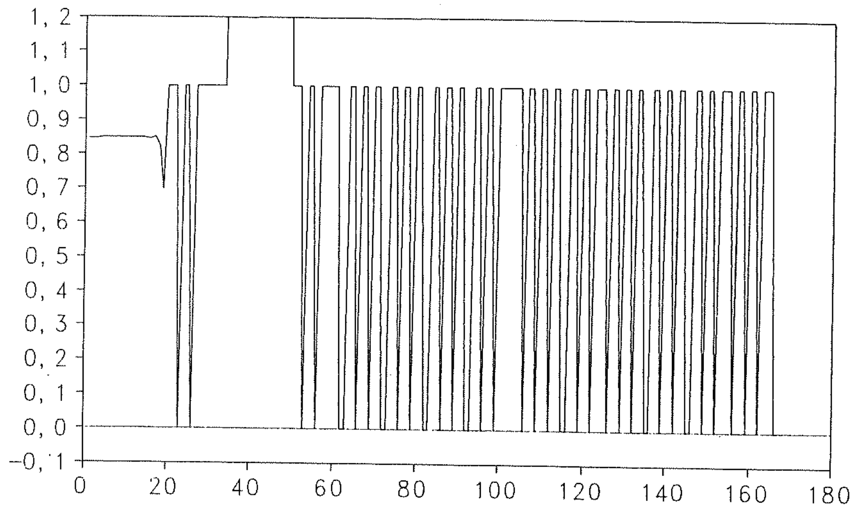
— quand l'erreur est commise par défaut, elle porte sur le 12ième chiffre puisque le chiffre des unités devient 0 ($1-3\ 10^{-12}$ est effectivement affiché 0.999999999997).

Explication des résultats 0 et 1

Quand le résultat de $x \sin\frac{1}{x}$ est 1, f(x) vaut évidemment également 1, mais quand le résultat est strictement inférieur à 1, l'exposant x^2 est assez grand pour que la machine confonde f(x) avec la limite de la suite géométrique de raison strictement inférieure à 1, c'est-à-dire 0. C.Q.F.D.

Cas de la calculatrice Casio fx-8000G

valeurs de f(x) pour x=2^n (Casio fx-8000G)



valeurs de n

n	f(x)	n	f(x)	n	f(x)	n	f(x)
0	0,84147098481	43	infini	86	0	129	0
1	0,84528787996	44	infini	87	1	130	1
2	0,84618668722	45	infini	88	1	131	1
3	0,84640817573	46	infini	89	0	132	0
4	0,84646335066	47	infini	90	1	133	1
5	0,84647713196	48	infini	91	1	134	1
6	0,84648057591	49	infini	92	0	135	0
7	0,84648144060	50	1	93	0	136	0
8	0,84648163484	51	1	94	1	137	1
9	0,84648171945	52	1	95	1	138	1
10	0,84648173090	53	0	96	0	139	0
11	0,84648147303	54	1	97	1	140	1
12	0,84648325033	55	1	98	1	141	1
13	0,84646620907	56	0	99	0	142	0
14	0,84654574048	57	1	100	1	143	1
15	0,84640940576	58	1	101	1	144	1
16	0,84468439812	59	1	102	1	145	0
17	0,85087438472	60	1	103	1	146	0
18	0,81931514023	61	1	104	1	147	1
19	0,69953372080	62	0	105	1	148	1
20	1	63	0	106	0	149	0
21	1	64	1	107	1	150	1
22	1	65	1	108	1	151	1
23	0	66	0	109	0	152	0
24	1	67	1	110	1	153	1
25	1	68	1	111	1	154	1
26	0	69	0	112	0	155	1
27	1	70	1	113	1	156	0
28	1	71	1	114	1	157	1
29	1	72	0	115	0	158	1
30	1	73	0	116	0	159	0
31	1	74	1	117	1	160	1
32	1	75	1	118	1	161	1
33	1	76	0	119	0	162	0
34	1	77	1	120	1	163	1
35	infini	78	1	121	1	164	1
36	infini	79	0	122	0	165	1
37	infini	80	1	123	1	166	0
38	infini	81	1	124	1	167	x^2 trop grand
39	infini	82	0	125	1		
40	infini	83	0	126	0		
41	infini	84	1	127	1		
42	infini	85	1	128	1		

Astuce utilisée pour que le produit d'un nombre et de son inverse soit toujours 1

Contrairement aux calculatrices Hewlett-Packard qui affichent tous les chiffres des résultats, la fx-8000G fait ses calculs avec 13 chiffres pour n'en afficher que 10. Ces 3 chiffres de réserve sont un avantage et un inconvénient.

L'avantage est de pouvoir compenser l'erreur commise sur le calcul de l'inverse d'un nombre connu exactement. En effet, les chiffres de réserve sont systématiquement remis à 0 et le résultat arrondi à 10 chiffres significatifs quand la réserve est soit supérieure à 992.5, soit inférieure à 007.5.

Imprécision dans le calcul du sinus

L'inconvénient est que, puisque seuls 10 chiffres sont affichés, le calcul des fonctions transcendantes n'a pas besoin d'être poussé jusqu'à la précision interne de la calculatrice. C'est en effet le cas pour la fonction sinus : par exemple 2^{-23}-sin(2^{-23}) vaut 10^{-19} ce qui fait une erreur relative de 8 10^{-13}, mais plus grave est le résultat pour 2^{-40}-sin(2^{-40}), qui est -3.02 10^{-23}, provoquant une erreur relative de -3 10^{-11} (le signe est pour le moins surprenant !).

Explication des résultats 0, 1 et 'infini'

Comme pour les calculatrices HP, l'exposant x^2 est suffisamment grand pour que la calculatrice confonde la valeur de f(x) avec la limite de la suite géométrique de raison $\left(x \sin \frac{1}{x}\right)$ ce qui provoque un affichage "normal" de 0 ou de 1, mais aussi, quand l'erreur dans le calcul du sinus est dans le mauvais sens, un affichage d'erreur pour dépassement de capacité, l'infini étant trop grand pour ces machines.

Utilisation d'un tableur

Elimination du sinus

L'algorithme de calcul du sinus semble efficace pour les "petits"' nombres et les résultats pour $\frac{1}{x}$ et $\sin\frac{1}{x}$ sont rapidement identiques.

La représentation binaire explique les résultats 1

Contrairement aux calculatrices étudiées précédemment, le tableur montre une suite stationnaire de limite 1. Ceci s'explique car le tableur utilise une représentation binaire des nombres (mantisse et exposant de 2) ce qui fait que x et $\frac{1}{x}$ sont connus exactement par l'ordinateur quand $x = 2^n$. La valeur de $f(x)$ obtenue est donc 1 dès que la machine identifie le sinus et son argument.

Remarque : on retrouvera une alternance de 0 et 1 si on observe la suite $f(10^n)$, les puissances de 10 étant approchées dans ce cas.

Peut-on obtenir une précision infinie ?

Impossible en un temps fini avec un matériel limité

Toutes les expériences précédentes ont affiné notre connaissance du fonctionnement des calculs en machine, mais n'ont guère fait progresser notre approche de la limite cherchée.

Pour supprimer l'influence des arrondis et voir notre suite converger comme elle le devrait, il faudrait que la machine manipule une infinité de décimales de chaque nombre. Il lui faudrait donc une éternité pour calculer le premier sinus, et une mémoire infinie pour le stocker, c'est donc impensable.

Possibilité de concevoir un algorithme énumérant les décimales de la limite

Ce qui est par contre faisable avec nos moyens limités, c'est de concevoir un programme qui, demandant un entier N, donnera les N premières décimales de la limite. Ceci est possible par exemple avec le langage UBasic (dans le domaine public) qui permet de choisir le nombre de mots-machine utilisés pour stocker les décimales des nombres.

Programme UBASIC :

```
10  point 40
15  print "calcul de y=(x*sin(1/x))^(x^2) pour x=2^n"
16  print "affichage de 50 décimales"
17  print "calculs avec 192 chiffres"
20  X=2:N=1
30  X=X*2:N=N+1
40  Y=1/X
50  Z=sin(Y)
55  print "n = ";N;
60  print "y = ";using(1,50),(X*Z)^(X*X)
120 if N<82 then goto 30
130 print:print:print "e^(-1/6) = ";using(1,50),exp(-1/6)
```

Exécution :

```
calcul de y=(x*sin(1/x))^(x^2) pour x=2^n
affichage de 50 décimales
calculs avec 192 chiffres

n =  2  y =  0.84618668722072633734553777079134106104504414529651
n =  3  y =  0.84640817578798917416558971316837758770064587996294
n =  4  y =  0.84646335070359336697383764855281646013802358079243
n =  5  y =  0.84647713216102720455913084184372209016822434012080
n =  6  y =  0.84648057675927677657399977371126962150121853499023
n =  7  y =  0.84648143786097075099627354257734285694920242347526
n =  8  y =  0.84648165313340267754631500887095832017849065502979
n =  9  y =  0.84648170695132368950988262896208559563458326468921
n = 10  y =  0.84648172040579225694719944098557697306993268437004
n = 11  y =  0.84648172376940866846022779574012839240429408269228
n = 12  y =  0.84648172461031272569185354382095101259493808083316
n = 13  y =  0.84648172482053873714684571677823318254236346644575
n = 14  y =  0.84648172487309523983228662155619991938742891143424
n = 15  y =  0.84648172488623436549250265164439728535848372125056
n = 16  y =  0.84648172488951914690686014691054604906107497010375
n = 17  y =  0.84648172489034034226040598871110106039200843008379
n = 18  y =  0.84648172489054564109878972841024110835190289852741
n = 19  y =  0.84648172489059696580838549328808870412094643987254
n = 20  y =  0.84648172489060979698578442387961701459367454477373
n = 21  y =  0.84648172489061300478013415586325324293320257455464
n = 22  y =  0.84648172489061380672872158881764693443817951663355
n = 23  y =  0.84648172489061400721586844705365064696567985446493
n = 24  y =  0.84648172489061405733765516161248940570075844795627
n = 25  y =  0.84648172489061406986810184025218895979722831568494
n = 26  y =  0.84648172489061407300071350991211321484713954632749
```

```
n = 27  y = 0.84648172489061407378386642732709423901747946422003
```

Ceci conduit au problème de mathématique intéressant suivant : déterminer le nombre de décimales à utiliser dans les calculs pour obtenir N décimales de la limite ainsi que la valeur de x pour laquelle f(x) sera le plus proche de cette limite.

Autres pistes

Avec Scheme

Je ne vois qu'une seule solution pour pouvoir tirer d'un outil de calcul numérique une information fiable : c'est d'effectuer toutes les opérations, non plus sur des valeurs approchées dont on ne connaît pas la précision, mais sur des intervalles dont on contrôle systématiquement les bornes inférieures et supérieures. Le langage Scheme est un dialecte de Lisp qui permet de représenter les intervalles comme listes de deux nombres et de définir des opérations sur de tels objets. Les calculs effectués montrent qu'en prenant pour précision des calculs-machine 10^{-12}, dès $x = 2^{18}$, l'amplitude de l'intervalle obtenu est supérieure à 0,1 et qu'il est inutile de continuer à calculer.

Scheme permet également de représenter les rationnels comme liste de 2 entiers, les polynômes comme liste de coefficients rationnels et donc de calculer à n'importe quel ordre raisonnable un développement limité de $\ln(f(x))$ à partir de ceux des fonctions sin et ln :

$$\ln(f(x)) = -\frac{1}{6} - \frac{1}{180x^2} - \ldots$$

Exemple de calcul de développements limités avec Scheme.

imprimer-p est une procédure pour imprimer des polynômes et **(fdex n)** est le développement à l'ordre n de . ln(f(x))

```
[6] (imprimer-p (fdex 1))
[ - 1/6.X^2 ]
[7] (imprimer-p (fdex 2))
[ - 1/6.X^2 - 1/180.X^4 ]
[8] (imprimer-p (fdex 3))
[ - 1/6.X^2 - 1/180.X^4 - 1/2835.X^6 ]
[9] (imprimer-p (fdex 4))
[ - 1/6.X^2 - 1/180.X^4 - 1/2835.X^6 - 1/37800.X^8 ]
[10] (imprimer-p (fdex 5))
[ - 1/6.X^2 - 1/180.X^4 - 1/2835.X^6 - 1/37800.X^8 -
```

```
1/467775.X^10 ]
[11] (imprimer-p (fdex 6))
[ - 1/6.X^2 - 1/180.X^4 - 1/2835.X^6 - 1/37800.X^8 -
1/467775.X^10 - 691/3831077250.X^12 ]
[12] (imprimer-p (fdex 7))
[ - 1/6.X^2 - 1/180.X^4 - 1/2835.X^6 - 1/37800.X^8 -
1/467775.X^10 - 691/3831077250.X^12 -
2/127702575.X^14 ]
```

L'intérêt de Scheme par rapport aux 2 outils cités ci-dessous est que, étant obligé de construire la représentation des objets mathématiques ainsi que les opérations pour les manipuler, l'utilisateur améliore sa compréhension des concepts, chaque procédure écrite en Scheme pouvant être considérée comme une concrétisation d'une abstraction mathématique.

Avec UBasic

Ici, les opérations sur les rationnels et les polynômes sont inclus dans le langage par son auteur et un petit programme suffit pour obtenir un développement de $\ln(f(x))$

Programme :

```
1   ' utilisation de UBasic
5   'essai de calculs de développements limités ....
10  A=_X
20  K=1:P=A:S=1
30  for I=1 to 3
40  K=K+1:A=A*_X^2//(K*(K+1))
50  P=P-S*A
60  K=K+1:S=-S
70  next I
80  P=P\_X
90  P=P-1
97  lprint P
100  A=_X:K=1
105  Q=_X
110  for I=1 to 3
120  K=K+1:A=-A*_X
130  Q=Q+A//K
140  next I
145  lprint Q
150  Q=val(Q,P)@_X^8
155  Q=Q\_X^2
160  lprint Q
161  end
```


Exécution :

```
run
-(1//5040)*X^6 + (1//120)*X^4 - (1//6)*X^2
-(1//4)*X^4 + (1//3)*X^3 - (1//2)*X^2 + X
-(1//2835)*X^4 - (1//180)*X^2 - 1//6
```

Avec Derive

Ce logiciel sachant calculer formellement les limites, est le premier de mes outils qui me donne directement la réponse $e^{-\frac{1}{6}}$.

Utilisation de Derive :

Calcul de la limite de $F(x)$

1: $F(x) := \left(x \sin\frac{1}{x}\right)^{x^2}$

2: $\lim\limits_{x \to +\infty} F(x)$

3: $e^{-\frac{1}{6}}$

Il permet également d'effectuer les calculs polynomiaux et rationnels décrit précédemment.

Conclusion

Aucun des outils que j'ai cités dans cet article ne peut directement apporter en même temps qu'un résultat la preuve de ce résultat. Je pense qu'il est important de rester conscient de ce fait. L'utilisation de calculatrices, langages de programmation ou logiciels de calcul formel ne peut donc intervenir que dans la partie "expérimentation" de la recherche et ne peut déboucher que sur des conjectures. On ne pourra énoncer de résultats définitifs qu'après une démonstration mathématique.