

$$E_\gamma, E_{\gamma+1}, E_{\gamma+2}, \dots, \varepsilon_\gamma, \varepsilon_{\gamma+1}, \varepsilon_{\gamma+2}, \dots,$$

ne pourront avoir qu'un certain nombre de valeurs différentes, et qu'ainsi dans l'une et l'autre de ces séries, si on les pousse à l'infini, il faudra nécessairement que les mêmes termes reviennent une infinité de fois; et, par la même raison, il faudra aussi qu'une même combinaison de termes correspondants dans les deux séries revienne une infinité de fois; d'où il s'ensuit qu'on aura nécessairement, par exemple,

$$E_{\gamma+\delta+\nu} = E_{\gamma+\delta} \quad \text{et} \quad \varepsilon_{\gamma+\delta+\nu} = \varepsilon_{\gamma+\delta},$$

ou bien, en faisant $\gamma + \delta = \mu$,

$$E_{\mu+\nu} = E_\mu \quad \text{et} \quad \varepsilon_{\mu+\nu} = \varepsilon_\mu;$$

donc, à cause de

$$B = \varepsilon_\mu^2 + E_\mu E_{\mu+1} = \varepsilon_{\mu+\nu}^2 + E_{\mu+\nu} E_{\mu+\nu+1},$$

on aura aussi

$$E_{\mu+\nu+1} = E_{\mu+1};$$

mais on a

$$x_\mu = \frac{\varepsilon_\mu + \sqrt{B}}{E_{\mu+1}} \quad \text{et} \quad x_{\mu+\nu} = \frac{\varepsilon_{\mu+\nu} + \sqrt{B}}{E_{\mu+\nu+1}};$$

donc $x_{\mu+\nu} = x_\mu$; donc la fraction continue sera nécessairement périodique (24).

36. En effet, on voit, par les formules du n° 33, que si l'on a

$$E_{\mu+\nu} = E_\mu \quad \text{et} \quad \varepsilon_{\mu+\nu} = \varepsilon_\mu,$$

on aura

$$E_{\mu+\nu+1} = E_{\mu+1}, \quad \lambda_{\mu+\nu+1} = \lambda_{\mu+1}, \quad \varepsilon_{\mu+\nu+1} = \varepsilon_{\mu+1},$$

et ainsi de suite; de sorte qu'en général les termes des trois séries

$$E, E_1, E_2, \dots, \quad \varepsilon, \varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \quad \lambda_1, \lambda_2, \dots,$$

qui auront pour exposant $\mu + n\nu + \varpi$, seront les mêmes que les termes précédents dont les exposants seront $\mu + \varpi$, en prenant pour n un nombre quelconque entier positif.

Ainsi, chacune de ces trois séries deviendra périodique, à commencer par les termes $E_\mu, \varepsilon_\mu, \lambda_{\mu+1}$, et leurs périodes seront de ν termes, après lesquels les mêmes termes reviendront dans le même ordre, à l'infini.

L'infini n'est pas programmable....

Marianne Guillemot

En 1982, les programmes des lycées, après ceux des collèges, s'établirent en réaction contre les "mathématiques modernes" :

"Les actuels programmes de Mathématiques ont entrepris de lutter contre un formalisme qui, maltraitant l'acquis intuitif des élèves, isolerait la démarche pédagogique des réalités de l'expérience et de l'action ..."

"On évacuerait à tort cette diversité par un exposé théorique hâtif et parcimonieux."

"L'important est, répétons le, d'aider l'élève à organiser la synthèse de ses connaissances pour les réinvestir de lui même dans des domaines a priori éloignés."

Lutte contre le formalisme, méfiance envers la théorie, mise en valeur du concret, de l'actif, de l'utile, intérêt prioritaire pour les applications; tout cela est exprimé clairement, dès 1981, dans les paragraphes "objectifs" et "introduction au programme" des programmes officiels⁽¹⁾.

Le contenu des programmes évolue dans ce sens, en plusieurs étapes; dès 1982, on note la disparition, sans commentaires, de l'arithmétique en terminale C; est-ce parce que cette discipline est trop "formelle", ou bien ne serait elle pas assez utile aux applications? D'autres changements - l'effacement des probabilités tandis qu'est introduite la statistique descriptive; le retour de la géométrie, mais limitée à l'étude des déplacements et des similitudes et au calcul vectoriel - semblent refléter les mêmes préoccupations.

En analyse, c'est plus tard qu'arrivent d'importantes modifications, avec les programmes de 1986 et de 1991. L'analyse a bien sûr une place très importante dans les programmes, car la connaissance de certaines fonctions est nécessaire pour les applications, en particulier en physique. Mais l'étude des fonctions

exige le calcul des dérivées, donc la notion de limite, et on ne peut pas éviter l'intervention de l'infini...

L'infini : cette notion est mal accueillie, et semble inquiéter. A partir de 1986, la définition rigoureuse de la limite (par ϵ , η) est chassée des programmes. Et comme il faut bien parler des limites, à cause des dérivées, on donne des règles de calcul, des critères de comparaison avec des fonctions "simples" dont on admet les propriétés après les avoir "observées" (mais comment ? Cela pose d'autres problèmes, comme nous le verrons) .

Quelle que soit la façon dont on l'aborde, même muni d'un attirail mathématique adéquat (ce qui n'est pas le cas ici), le rôle fondamental de la notion de limite aussi bien que sa difficulté conceptuelle intrinsèque méritent qu'on lui accorde le temps de la réflexion. Ce n'est pas le point de vue du programme actuel. A quatre reprises - en première parce qu'on la reverra en terminale, en terminale parce qu'on l'a déjà vue en première, dans l'étude des suites parce qu'on l'a peut-être déjà vue pour les fonctions, et inversement - on nous dit qu' "il n'y a pas lieu de s'y attarder".

En répétant avec tant d'insistance qu'il "ne faut pas s'attarder" à l'examen de ces problèmes, on ne fait que les rendre plus obscurs...

Simultanément, on nous recommande d' "éviter de multiplier les exemples posés a priori; il convient d'exploiter les situations mentionnées dans les travaux pratiques" .

Que sont les travaux pratiques en analyse ? Essentiellement, des exercices à l'aide de la calculatrice.

Programmes scolaires, programmes de calculatrice.

Dans le contexte des programmes actuels, la calculatrice est bien accueillie; elle représente une activité; c'est un objet concret, qui est utile, qui est destiné par construction aux applications. Son usage est donc très vivement recommandé .

"L'utilisation systématique des calculatrices", dit l'introduction aux programmes de seconde de 1982, "constitue une nouveauté du programme de Mathématiques. Dès le début de l'année, il sera bon de vérifier que chacun sait utiliser son propre instrument, et ce sera une occasion de préciser l'usage des parenthèses et de réviser les propriétés de $\mathbb{R}$ " .

Malheureusement, la calculatrice n'opère pas sur $\mathbb{R}$. Son domaine n'est pas l'ensemble des nombres réels, ni celui des rationnels, ni celui des décimaux, et ne contient pas l'ensemble des entiers. C'est un ensemble, très grand mais fini, d'entiers et de décimaux, et l'utilisateur, même débutant, doit en être conscient .

Les "propriétés de $\mathbb{R}$ " ne sont donc pas celles de l'ensemble des nombres sur lesquels travaille la machine, qui a sa propre arithmétique et sa propre algèbre, différentes de celles des réels, plus compliquées qu'elles, et qui ne coïncident avec elles que si l'on n'est pas trop près des bornes de son domaine. Pour en donner un exemple simple, on peut vérifier que la machine ne donne pas la même valeur à

$1 - (1 - X)$ et à $(1 - 1) + X$ si $X = 10^{-15}$
car elle peut accepter 10^{-15} , mais pas $1 - 10^{-15}$, qu'elle remplace par 1.

Les professeurs, le plus souvent, et certains manuels attirent l'attention des élèves sur ces comportements inattendus des calculatrices; les programmes les signalent à peine .

Les nombres qu'on observe le mieux à l'aide de la calculatrice sont les entiers, à condition qu'ils ne soient pas trop grands et, bien entendu, qu'on étudie l'arithmétique. Des algorithmes classiques, comme le calcul du plus grand commun diviseur d'après Euclide, la recherche des nombres premiers avec le crible d'Eratosthène, la décomposition d'un nombre en facteurs premiers, peuvent être très aisément convertis en programmes de calculatrice; et le résultat, obtenu avec une rapidité prodigieuse, est exact si les nombres donnés ne sont pas trop grands, et peut en tous cas être facilement contrôlé.

Pour les nombres non entiers, l'observation est plus difficile. D'un nombre rationnel, comme des autres nombres, on ne voit que les premiers chiffres du développement décimal. Une programmation de la division euclidienne, faisant apparaître l'un après l'autre les chiffres du quotient, peut mettre en évidence leur périodicité; la boucle du programme permet d'obtenir une suite "qui ne s'arrête pas", un développement décimal illimité; une des rares façons qu'a la calculatrice de nous donner une idée de l'infini.

Les nombres irrationnels, comme les rationnels, n'apparaissent sur la calculatrice que sous forme de décimaux à douze décimales au plus. D'ailleurs, comment s'intéresser aux nombres irrationnels si on ne connaît pas les rationnels ? Si on n'a jamais étudié la divisibilité des entiers, on ne peut pas démontrer que, par exemple, $\sqrt{2}$ n'est pas

une fraction, ni en faire un calcul approché à l'aide de l'équation de Pell, équation à solutions entières dont la calculatrice peut donner des solutions exactes dans certaines limites.

La calculatrice ne connaît pas les nombres réels. Que veut dire $0,999 \dots 9 \dots$ (avec une suite infinie de décimales égales à 9) ? La calculatrice ignore cette expression. L'élève de terminale, le plus souvent, ne comprend pas ce qu'elle signifie. Mais comment s'en étonner ? Donner un sens à cette expression, c'est définir la limite.

La limite, finie ou infinie, ne peut pas, avec les programmes actuels, être connue par une définition. On suggère qu'elle soit "observée", mais comment ? Sur la machine, une suite ne peut manifester sa convergence et suggérer sa limite, dans les meilleurs des cas, qu'en apparaissant comme stationnaire.

Mais on peut voir certaines suites convergentes, pourtant très "classiques", devenir stationnaires en montrant des valeurs qui ne sont pas leurs limites, ni "proches" de leurs limites⁽²⁾. Des phénomènes plus étranges encore peuvent apparaître : une suite convergente se manifeste, à partir d'un certain rang, comme une suite apparemment aléatoire de 1 et de 0...⁽³⁾

La calculatrice, son utilité, ses "limites".

Le calcul approché, principale utilisation de la calculatrice, ne peut être fait qu'avec une précision limitée à l'avance, et qui ne dépend que de la machine elle-même. C'est donc un calcul approché pour physiciens, avec une approximation plus ou moins bonne, selon les instruments dont on dispose. Ce n'est pas l'approximation des mathématiciens, qui doit pouvoir être faite avec une précision aussi grande qu'on veut, comme dans le cas de la limite d'une suite ou de la somme d'une série ; et qui est une notion tout à fait indépendante de la possibilité effective d'un calcul numérique.

La lutte contre le formalisme, l'encouragement à l'activité sont, rappelons-le, les principaux objectifs des programmes actuels. Or la calculatrice exige de ses utilisateurs, à tous les niveaux, un formalisme extrêmement rigoureux.

Certes il n'y a pas de mathématiques sans une part de formalisme, même quand on fait à la main une multiplication ou une division.

Il faut, bien sûr, éviter d'enseigner des mathématiques où la partie formelle serait la plus accessible, encadrant un contenu trop pauvre, ou riche mais mal maîtrisé. Or cette situation peut se produire avec l'usage des calculatrices, que l'on peut manipuler en ne sachant absolument pas ce qu'on fait, les doigts s'habituant au formalisme en même temps que le cerveau à la passivité.

La calculatrice est un objet utile ; ce n'est pas un outil pédagogique. Elle a été construite pour aider le comptable dans ses opérations, pour donner à l'ingénieur l'intégrale dont il a besoin ; par ses très nombreuses possibilités, par sa prodigieuse rapidité, elle apporte aux utilisateurs les plus divers une aide considérable. Mais elle n'a pas été construite pour apprendre à l'élève à faire des additions ou des multiplications, ni pour apprendre au lycéen à calculer une intégrale ou à résoudre une équation, ni, bien sûr, pour les dispenser de ces apprentissages.

Cependant la calculatrice peut apporter une grande aide à l'élève ou à l'étudiant, pourvu qu'il ait une certaine compréhension de ce que la machine sait faire bien plus rapidement que lui ; et les professeurs, à défaut des programmes, le savent, et en tiennent compte le plus souvent.

De même que, connaissant le principe de la multiplication et de la division et disposant de la table de multiplication à un chiffre (sur le papier ou dans sa tête), on peut effectuer à la main n'importe quelle multiplication et une division avec une précision aussi grande qu'on veut, de même il existe, à chaque niveau⁽⁴⁾, des connaissances mathématiques de base qui permettent de tirer meilleur parti de la calculatrice, de faire reculer ses limites, d'aller "plus loin".

NOTES

1- Arrêté du 26 Janvier 1981, annexe 1, B.O. spécial 1 du 5 Mars 1981, p.59 ; ou la brochure "mathématiques : classes de seconde, première et terminale" (CNDP, 1982, p. 21,22, 25)

2- Voir ci-dessous, Annexe.

3- Voir ci-dessous l'article de François Parisot : "Un comportement étrange des calculatrices".

4- Demandez à des collégiens d'effectuer, en s'aidant de la calculatrice, la multiplication suivante :

$$116415321826934814453125 \times 8589934592$$

(proposé par "Math et Malices", n°1)

ANNEXE

Le nombre e : calcul d'une limite (?)

$$e = \lim_{x \rightarrow \infty} (1 + 1/x)^x \quad (\text{calculatrice HP 42 S})$$

01	LBL "NE"	11	STO O2
02	1	12	VIEW O2
03	STO 01	13	PSE
04	LBL "E"	14	RCL 01
05	RCL 01	15	2
06	1/X	16	x
07	1	17	STO 01
08	+	18	GTO E
09	RCL 01	19	END
10	Y↑X		

On calcule la suite $(1 + 1/x_n)^{x_n}$ avec $x_n = 2^n$. Elle semble converger rapidement vers 2, 71828... puis s'en éloigner, et, après quelques errances, devenir stationnaire en prenant la valeur 1.

Explication: les décimales de rang supérieur à 12 ne sont pas prises en compte par la calculatrice; donc pour $x_n > 10^{12}$, $1 + 1/x_n$ est remplacé par 1, et $(1 + 1/x_n)^{x_n}$ aussi.

Un comportement étrange des calculatrices

François Parisot
IREM de Brest

Introduction : énoncé du problème

Enoncé

Pour étudier la limite à l'infini de la fonction f définie par $f(x) = \left(x \sin \frac{1}{x}\right)^{x^2}$, on souhaite observer des valeurs numériques des nombres $f(x_n)$, pour $x_n = 2^n$.

Ce qui a motivé mes recherches

La réalisation d'un programme pour la calculatrice HP 42S par Marianne Guillemot lui a fait apparaître à partir d'un certain rang une étrange suite apparemment aléatoire de 0 et de 1.