Une Approche de l'irrationnalité : Algorithme d'Euclide et fractions continues

Denis Daumas
IREM de Toulouse

"*Commensurable*", "*incommensurable*" : au coeur de ces notions il y a la mesure. L'acte de mesurer, de compter les "*mesures*", remonte vraisemblablement aux premiers échanges commerciaux. On connaît l'importance des comptes dans les premiers écrits des civilisations mésopotamiennes dès le milieu du IVème millénaire avant notre ère :

"Dans les deux sociétés [sud de la mésopotamie et région de Suse, en Iran] le support matériel est l'argile, pratiquement indestructible, et les premiers documents sont des comptes. C'est donc le besoin de mesurer, diviser et répartir la puissance matérielle de leurs sociétés qui a donné naissance aux premiers systèmes d'écritures."[1] On connaît également le soin des scribes à tenir compte de tout..

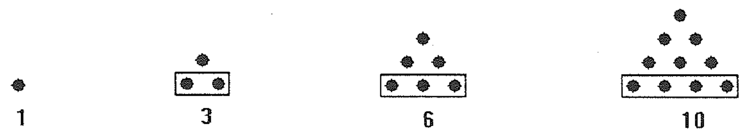
Coudée de MOYA (ou MAYA), attestée sous TOUTANKHAMON, environ 1350 avant J.-C. Musée du Louvre, PARIS.

[1] James RITTER *"Chacun sa vérité : les mathématiques en Egypte et en Mésopotamie"* in *ELEMENTS D'HISTOIRE DES SCIENCES* - BORDAS 1989 - p. 41.

I - NOMBRES, GRANDEURS et MESURE DANS LES MATHEMATIQUES GRECQUES.

Chez les grecs, nombres et mesure sont étroitement liés. Mais le nombre a un double aspect :

- Ontologique : le nombre et par essence composé d'unités, l'unité étant un principe irréductible. Ainsi, pour les Pythagoriciens, les nombres sont associés à des formes (triangles, carrés, ...) et représentés par une multiplicité discontinue d'unités-points :



Nombres triangulaires

Plus fondamentalement, la philosophie des Pythagoriciens prend cette unité comme principe, les nombres organisant le Monde.

- opératoire, avec comme fonction de compter. Mais pour compter il faut décider d'une unité de compte et pour mesurer il faut une unité de mesure. C'est à cette conception du nombre que se rattachent cette citation d'*Aristote* et les premières définitions du livre VII des ELEMENTS D'EUCLIDE, consacré à l'arithmétique :

> *"L'unité est ce suivant quoi chacune des choses existantes est dite une.*
>
> *Le nombre est une multitude composée d'unités.*
>
> *Un nombre est une partie d'un nombre, le plus petit du plus grand, lorsqu'il mesure le plus grand".*[2]

---

[2] EUCLIDE, *Eléments*, livre VII def. 1 à 3, traduit par Jean ITARD - HERMANN, Paris, 1961, page 83.

> *"L'Un n'a d'autre caractère que d'être mesure de quelque multiplicité, et le Nombre, d'être une multiplicité mesurée et une multiplicité de mesures. Aussi est-ce avec raison que l'Un n'est pas considéré comme un nombre, car l'unité de mesure n'est pas une pluralité de mesures."*[3]

On peut penser que pour les Pythagoriciens et les premiers mathématiciens grecs, les rapports de grandeurs géométriques devaient pouvoir s'exprimer sous la forme de rapports de nombres, à l'image des segments de corde de la lyre dont les rapports correspondent aux harmonies musicales. Mais pour pouvoir associer rapport de grandeurs et rapports de nombres, il faut trouver une mesure commune à ces grandeurs. Comment ? Une piste nous est fournies dans les ELEMENTS D'EUCLIDE par cet algorithme célèbre, parfois nommé aujourd'hui anthyphérèse ou soustractions alternées :

> *"Deux nombres inégaux étant proposés, le plus petit étant continuellement retranché tour à tour du plus grand. si le nombre qui reste ne mesure jamais celui qui le précède avant qu'il ne reste l'unité les nombres originaires sont premiers entre eux."*[4]

Il est possible qu'un reste autre que 1 mesure le précédent. La proposition 2 montre que ce reste est alors le plus grand commun diviseur des deux nombres (qui ne sont pas premiers entre eux).

Pour illustrer comment fonctionne cet algorithme, nous allons l'appliquer aux nombres 71 755 875 et 61 735 500 (ils se trouvent dans un traité d'astronomie d'*Aristarque De Samos* - env. -300- qui remplace, sans donner d'explication, leur rapport par le rapport de 43 à 37)

1ère soustraction	71 755 875	-	61 735 500	=	10 020 375
2ème soustraction	61 735 500	-	6. 10 020 375	=	1 613 250
3ème soustraction	10 020 375	-	6. 1 613 250	=	340 875

---

[3] ARISTOTE, Métaphysique N I 1088a. traduction J. TRICOT - VRIN Paris, 1986, page 802.

[4] EUCLIDE, *Eléments*, traduit par Jean ITARD - *LES LIVRES ARITHMÉTIQUES D'EUCLIDE* - Hermann, Paris, 1961, livre VII, proposition 1, page 84.

Si nous considérons le reste 340 875 comme négligeable, nous avons

$10\ 020\ 375 \approx 6.\ 1\ 613\ 250$ puis

$61735\ 500 \approx 6.\ 6.\ 1\ 613\ 250 + 1\ 613\ 250 = 37.\ 1\ 613\ 250$ et,

$71\ 755\ 875 \approx 37\ .\ 1\ 613\ 250 + 6\ .\ 1\ 613\ 250 = 43\ .\ 1\ 613\ 250$

d'où $\dfrac{71\ 755\ 875}{61\ 735\ 500} \approx \dfrac{43}{37}$

Plus anachroniquement encore, nous pouvons présenter l'algorithme ainsi :

$$\frac{71\ 755\ 875}{61\ 735\ 500} = 1 + \frac{10\ 020\ 375}{61\ 735\ 500} = 1 + \cfrac{1}{6 + \cfrac{1\ 613\ 250}{10\ 020\ 375}} = 1 + \cfrac{1}{6 + \cfrac{1}{6 + \cfrac{340\ 875}{1\ 613\ 250}}}$$

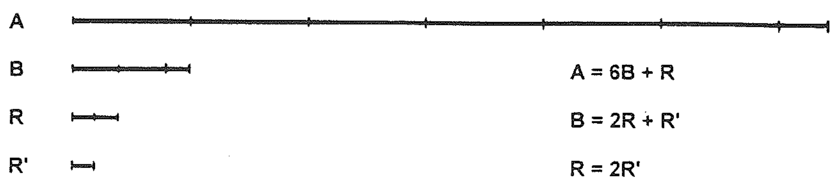
$1 + \cfrac{1}{6 + \cfrac{1}{6}}$, que l'on peut noter $1 + \frac{1|}{|6} + \frac{1|}{|6}$.

Cette fraction que l'on nomme depuis le XVIIème siècle "fraction continue" est égale à $\dfrac{43}{37}$.

On pourra vérifier, en poursuivant l'algorithme que :

$$\frac{71\ 755\ 875}{61\ 735\ 500} = 1 + \frac{1|}{|6} + \frac{1|}{|6} + \frac{1|}{|4} + \frac{1|}{|1} + \frac{1|}{|2} + \frac{1|}{|1} + \frac{1|}{|2} + \frac{1|}{|1} + \frac{1|}{|6}$$

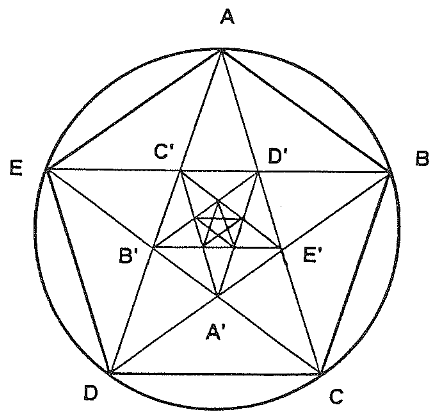
Revenons maintenant aux grandeurs géométriques. On peut retrancher des segments à des segments, des surfaces à des surfaces .... et par conséquent utiliser le même algorithme qui pourra fournir comme dans l'exemple qui suit une commune mesure à deux segments :



R' mesure à la fois A et B (B = 5 R' et A = 32 R').

A et B sont commensurables et on peut affirmer à la manière de la proposition 5 du livre X des ELEMENTS : "Les grandeurs commensurables ont entre elles la raison qu'un nombre a avec un nombre" (Peyrard p. 263) - que A a avec B, la raison que 32 a avec 5 -

Autre problème : Y-a-t'il une commune mesure entre la diagonale et le côté d'un pentagone régulier ?



Procédons à nouveau par anthyphérèse :

AC - AB = AC - AE' = E'C ,

AB - E'C = CD' - E'C = D'E'.

Mais E'C = CA' = A'D' : les restes successifs sont donc respectivement la diagonale et le côté du pentagone A'B'C'D'E'. On est ramené au point de départ, c'est à dire à la recherche d'une commune mesure entre la diagonale et le côté d'un pentagone. A la différence des nombres , les grandeurs géométriques sont continues, c'est à dire divisibles à l'infini et dans notre cas l'anthyphérèse est sans fin.

La fraction continue associée au rapport de la diagonale et du côté d'un pentagone régulier est donc infinie : $1 + \frac{1|}{|1} + \frac{1|}{|1} + \frac{1|}{|1} + \ldots$

Les deux premières propositions du livre X des ELEMENTS, livre consacré à l'étude des grandeurs irrationnelles sont les suivantes :

PROPOSITION I.

Deux grandeurs inégales étant proposées, si l'on retranche de la plus grande une partie plus grande que sa moitié, si l'on retranche du reste une partie plus grande que sa moitié, et si l'on fait toujours la même chose, il restera une certaine grandeur qui sera plus petite que la plus petite des grandeurs proposées.

PROPOSITION II.

Deux grandeurs inégales étant proposées, et si la plus petite étant toujours retranchée de la plus grande, le reste ne mesure jamais le reste précédent ; ces grandeurs seront incommensurables.[5]

La première utilise le principe qu'il est toujours possible de partager une grandeur en deux pour obtenir par retranchements successifs un reste plus petit qu'une grandeur donnée (aussi peite soit-elle, pourrait-on ajouter). Il est donc possible qu'une anthyphérèse soit sans fin, et la proposition 2 montre précisément que dans ce cas les deux grandeurs considérées sont incommensurables. La diagonale et le côté d'un pentagone régulier sont donc incommensurables.

Pourtant nous n'avons pas connaissance de document de l'antiquité Grecque ou l'incommensurabilité de deux grandeurs soit prouvée par anthyphérèse. Si l'on en croit Aristote, l'archétype de démonstration de l'incommensurabilité de la diagonale et du côté d'un carré relève de l'arithmétique et non de la géométrie :

"On prouve, par exemple l'incommensurabilité de la diagonale, par cette raison que les nombres impairs deviendraient égaux aux nombres pairs, si on posait la diagonale commensurable ; on tire alors la conclusion que les nombres impairs deviennent égaux aux nombres pairs, et on prouve hypothétiquement l'incommensurabilité de la diagonale par ce qu'une conclusion fausse découle de la proposition contradictoire." [6]

La plupart des auteurs s'accordent pour faire remonter au Pythagoriciens du Vème siècle avant notre ère la première preuve d'incommensurabilité. Le peu que nous avons dit de la philosophie pythagoricienne suffit pour imaginer la crise qu'une telle découverte a pu provoquer dans leur système de pensée. Pour les mathématiques, l'existence de grandeurs incommensurables lance un défi : si on ne peut pas ramener tous les rapports de grandeurs géométriques à des rapports de nombres (entiers), il faut rebâtir l'édifice et en premier lieu

[5] EUCLIDE, *Eléments*, traduit par PEYRARD, BLANCHARD, Paris, 1966, pages 258-259.

[6] ARISTOTE, *Premiers analytiques*, I.23 41a. Traduction J. TRICOT, p. 121-122, VRIN, 1983.

trouver une définition pour la proportionnalité des grandeurs géométriques.

II - COMMENT CARACTERISE LA PROPORTIONNALITE DES GRANDEURS ? D'EUDOXE DE CNIDE A OMAR AL KHAYYAM.

Nous allons observer deux types de réponse qui correspondent à des approches radicalement différentes.

La première, que l'on attribue généralement à EUDOXE DE CNIDE (env. 406-355), consiste à détacher complètement la théorie des rapports de grandeurs géométriques de l'arithmétique. C'est elle qui est reprise au livre V des ELEMENTS D'EUCLIDE. La séparation est telle qu'au livre VII qui traite des nombres, toutes les propriétés des proportions sont redémontrées, sans aucune référence aux propriétés analogues obtenues au livre V pour les grandeurs. Observons les définitions de la proportionalité des grandeurs (livre V définition 6) et de celle des nombres (livre VII définition 21) :

textes	interprétation
"Des grandeurs sont dites être en même raison, la première à la seconde et la troisième à la quatrième, lorsque des équimultiples quelconques de la première et de la troisième, et d'autres équimultiples quelconques de la seconde et de la quatrième sont tels que les premiers équimultiples surpassent, chacun à chacun, les seconds équimultiples, ou leur sont égaux à la fois, ou plus petits à la fois. Les grandeurs qui ont la même raison sont dites proportionnelles." [7]	$\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ lorsque, quels que soient les naturels non nuls m et n : $ma > nb$ et $mc > nd$ (1) ou $ma = nb$ et $mc = nd$ (2) ou $ma < nb$ et $mc < nd$ (3) Notons que le relation (2) n'est possible que lorsque a et b d'une part, c et d d'autre part, sont commensurable.

[7] EUCLIDE, livre V, déf 6-7, traduction PEYRARD, opus cité page 113.

"Des nombres sont proportionnels, lorsque le premier est le même multiple du second que le troisième l'est du quatrième, ou lorsque le premier est la même partie ou les mêmes parties du second que le troisième l'est du quatrième."[8]

$\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ lorsque :

il existe un naturel n tel que

$a = nb$ et $c = nd$

ou

il existe un naturel n tel que

$na = b$ et $nc = d$

ou

il existe deux naturels n et p tels que

$pa = nb$ et $pc = nd$

Il semble qu'il y ait eu, antérieurement aux ELEMENTS d'EUCLIDE, une autre école, utilisant l'anthyphérèse pour fonder l'égalité des raisons (des grandeurs comme des nombres). ARISTOTE s'en fait l'écho, notamment dans ce passage :

> *Il semble aussi en mathématiques que la difficulté de certaines preuves sur les figures soit liée au manque de définition ; par exemple s'il s'agit d'établir que la ligne qui coupe le parallélogramme parallèlement à son côté divise la ligne et l'aire dans la même raison ; mais, dès qu'on s'est accordé sur la définition, la proposition est évidente ; car les aires subissent le même retranchement alterné que les lignes ; et c'est bien cela la définition de* ***la même raison****.*[9]

Commençons par un exemple numérique : comparons les rapports de 48 à 18 et 56 à 21,

$48 = 18 \times 2 + 12$	$56 = 21 \times 2 + 14$
$18 = 12 \times 1 + 6$	$21 = 14 \times 1 + 7$
$12 = 6 \times 2$	$14 = 7 \times 2$

On peut retrancher autant de fois 18 de 48 que 21 de 56, autant de fois 12 de 18 que 14 de 21 ...., les "retranchements alternés sont les

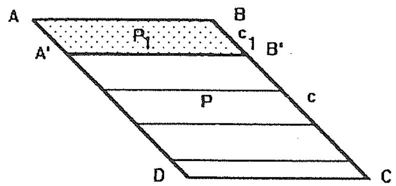
[8] EUCLIDE, *Eléments*, livre VII, déf 21 - Traduction ITARD - Hermann, Paris 1961, page 84.

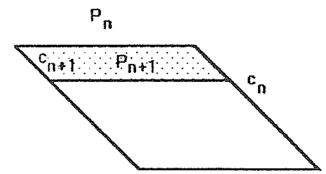
[9] ARISTOTE - TOPIQUES 158b 29-35, traduction JL GARDIES in *L'héritage épistémologique d'EUDOXE DE CNIDE*, VRIN, Paris, 1988 p. 21.

mêmes et on peut conclure : 48/18 = 56/21 (ou encore, 48/18 et 56/21 ont le même développement en fraction continue : $2 + \frac{1|}{|1} + \frac{1|}{|2}$).

Mais lorsqu'il s'agit de comparer des rapports de grandeurs, nous avons vu que l'anthyphérèse peut être sans fin (grandeurs incommensurables). Ne pouvant réaliser en acte l'infinité de soustractions, comment peut-on affirmer que les grandeurs subissent le même retranchement alterné ?

Reprenons l'exemple évoqué par ARISTOTE :





La ligne A'B', parallèle à AB découpe le segment BC en c et c_1, le parallèlogramme ABCD en deux parallélogramme P et P_1. Il s'agit de montrer que $P/P_1 = c/c_1$. Si l'on peut retrancher exactement trois fois le côté c_1 de c, on pourra retrancher exactement trois fois P_1 de P. Il reste un parallélogramme P_2 de côté c_2, il faut retrancher maintenant c_2 de c_1 et P_2 de P_1. En général, après n soustractions, il reste un parallèlogramme P_{n+1} de côté c_{n+1}. Retrancher ce parallèlogramme de P_n, de côté c_n laisse un parallélogramme de côté $c_n - c_{n+1}$ Par conséquent, "les aires subissent le même retranchement que les lignes" se vérifie pour un moment quelconque (fini !) de l'anthyphérèse, et on peut conclure l'égalité des rapports.

Omar AL KHAYYAM (1048-1123), dans ses "Commentaires des difficultés se trouvant dans les introductions du livre d'Euclide" (1077), reprend la définition par anthyphérèse de l'égalité des rapports. (voir le texe en annexe n° 1). Il procède en deux temps :

- lorsque le rapport est "numérique", c'est à dire dans le cas où les grandeurs de chaque rapport sont commensurables, il traite l'égalité des rapports comme EUCLIDE traite l'égalité des rapports de nombres et reprend presque mot pour mot la définition 21 du livre VII des Eléments.

- pour les rapports du "type géométrique", c'est à dire lorsque les critères précédents sont inopérants (grandeurs incommensurables), Omar AL KHAYYAM met en oeuvre l'algorithme d'EUCLIDE : l'égalité des rapports est acquise lorsque tous les quotients partiels de même rang sont égaux (nous pouvons dire aujourd'hui lorsque les développements en fraction continue sont identiques).

Le fossé introduit par EUDOXE entre la théorie des grandeurs géométriques et celle des nombres n'est guère satisfaisant pour les algébristes qui commencent à l'époque d'Omar AL KHAYYAM à travailler aussi bien avec des entiers qu'avec leurs rapports (rationnels) ou des rapports de grandeurs incommensurables (quantités irrationnelles). Cette préoccupation conduit Omar AL KHAYYAM à englober toutes ces quantités dans un domaine numérique plus vaste. Il introduit en effet, pour exprimer le rapport de deux grandeurs A et B, une nouvelle grandeur G conçue "*non comme une ligne, une surface, un corps ou un temps, mais comme une grandeur que l'esprit abstrait de tout et qui appartient aux nombres, mais non aux nombres absolus et véritables, car le rapport de A à B peut souvent ne pas être mesurable numériquement, c'est à dire qu'on ne pourra pas trouver deux nombres dont le rapport soit égal à ce rapport*"[10].

Les mathématiciens vont s'accoutumer peu à peu à traiter les grandeurs, rationnelles ou pas, comme des nombres, y adjoignant pour les commodités de l'algèbre les négatifs ou les imaginaires. Mais ce n'est qu'à la fin du XIXème siècle, avec notamment les travaux de DEDEKIND qui sera fondé à partir de l'arithmétique l'ensemble des nombres réels.

Au XVIIème siècle l'algorithme d'EUCLIDE reprend vigueur avec les débuts de la théorie des fractions continues. On peut citer HUYGENS (1629-1695) qui les utilise pour construire des automates, Lord BROUNKER (1620-1684), homme politique britannique féru des mathématiques qui donne $\frac{\pi}{4} = \frac{1|}{|1} + \frac{1^2|}{|2} + \frac{3^2|}{|2} + \frac{5^2|}{|2} + \ldots$

Mais ce sont surtout EULER (1707-1783) et LAGRANGE (1736-1813) qui vont développer considérablement la théorie des fractions continue.

[10] in YOUSCHKEVITCH, "*Les Mathématiques Arabes*", VRIN Paris, 1976, p 88.

III - EULER : "DE FRACTIONIBUS CONTINUIS DISSERTATIO".

Cet ouvrage, publié en 1737, est le premier traité sur les fractions continues. EULER s'y consacre autant à des généralités sur le sujet qu'à développer en fraction continue un certain nombre d'irrationnels, et en particulier **e** et ses puissances.

EULER appelle "*fraction continue*" toute expression de la forme :

$$a + \cfrac{\alpha}{b + \cfrac{\beta}{c + \frac{\gamma}{d} + \ldots}}$$

ou a, b, c, d,..., α, β, γ,... sont des entiers. Il écrit ensuite les fractions successives (que nous appelons "*réduites*") :

a , $a + \frac{\alpha}{b}$, $a + \cfrac{a}{b + \frac{\beta}{c}}$, ... ce qui, affirme-t-il "*permet d'approcher d'aussi près que l'on veut de la vraie valeur de la fraction continue*" (p 190)

Laissons de côté ce type de fractions continues (qu'on appelle aujourd'hui "*fractions continues généralisées*") et abordons, avec EULER, celles pour lesquelles $\alpha = \beta = \gamma = \delta = \ldots = 1$. Il montre que l'on peut développer tout rapport en fraction continue en utilisant l'algorithme d'EUCLIDE, puis retrouve les résultats du livre X : la fraction est finie lorsque le rapport est rationnel, infinie lorsqu'il est irrationnel (ou transcendant, ajoute EULER).

Un résultat important est une relation de récurrence concernant les numérateurs et les dénominateurs des réduites successives :

notons la fraction continue $a_1 + \frac{1|}{|a_2} + \frac{1|}{|a_3} + \ldots$ et posons

$\frac{P_n}{Q_n} = a_1 + \frac{1|}{|a_2} + \ldots + \frac{1|}{|a_n}$, alors, pour tout $n \geq 1$ on a

$P_{n+1} = a_{n+1}P_n + P_{n-1}$ et $Q_{n+1} = a_{n+1}Q_n + Q_{n-1}$ et, pour premiers termes : $P_o = 1$, $P_1 = a_1$, $Q_o = o$ et $Q_1 = 1$ (EULER écrit en fait que les premières fractions sont $\frac{1}{0}$ et $\frac{a_1}{1}$).

Comme conséquence, EULER note que $\frac{P_{n+1}}{Q_{n+1}} - \frac{P_n}{Q_n} = \frac{(-1)^{n+1}}{Q_nQ_{n+1}}$, ce qui prouve que les réduites permettent d'approcher d'aussi près que l'on veut de la "*vraie valeur*" de la fraction continue. On peut ajouter aujourd'hui que $\left(\frac{P_n}{Q_n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers un irrationnel x ("*la vraie valeur*"), que les réduites sont des fractions irréductibles et que chacune est la meilleure approximation de x au sens de : toute fraction $\frac{p}{q}$ telle que $0 < q < Q_n$ est plus éloignée de x que $\frac{P_n}{Q}$.

Nous avons pu observer que le rapport de la diagonale au côté d'un pentagone régulier (nombre d'or) a un développement en fraction continue périodique : $= 1 + \frac{1|}{|1} + \frac{1|}{|1} + \frac{1|}{|1} + \ldots.$ on peut vérifier qu'il en est de même pour $\sqrt{2}$ qui donne $1 + \frac{1|}{|2} + \frac{1|}{|2} + \ldots$

EULER démontre que toute fraction continue périodique est racine d'une équation quadratique, c'est à dire d'une équation du second degré à coefficients entiers (voir le texte de la démonstration en annexe n° 2). Il procède par itération, avec des fractions continues dont la période est formée d'un seul nombre, puis de deux, puis de trois :

avec $x = a + \frac{1|}{|b} + \frac{1|}{|b} + \ldots$, on a $x - a = \frac{1}{b + (x-a)}$

puis $x^2 - 2ax + bx + a^2 - ab = 1$, équation du second degré dont x est la racine $a - \frac{b}{2} + \sqrt{1+\frac{b^2}{4}}$ (a étant la partie entière de x, il faut que le reste soit compris entre 0 et 1) ;

avec $x = a + \frac{1|}{|b} + \frac{1|}{|c} + \frac{1|}{|b} + \frac{1|}{|c} + \ldots$ on a $x - a = \frac{1|}{|b} + \frac{1|}{|c + (x-a)}$

puis $bx^2 + bcx - 2abx = abc - a^2b + c$;

avec $x = a + \frac{1|}{|b} + \frac{1|}{|c} + \frac{1|}{|d} + \frac{1|}{|b} + \frac{1|}{|c} + \frac{1|}{|d} + \ldots$

on a $x - a = \frac{1|}{|b} + \frac{1|}{|c} + \frac{1|}{|d + (x-a)}$

puis

$(bc+1)x^2 + (bcd+b+d-c-2abc-2a)x$

$- abcd + a^2bc - ab - ad + a^2 - cd + ac - 1 = 0$

EULER considère alors que l'analogie des calculs est suffisamment forte dans ces trois cas pour permettre de conclure en général.

IV - LAGRANGE : "*toute racine d'une équation du second degré se réduit toujours nécessairement en une fraction continue périodique*".

Joseph-Louis LAGRANGE (1736-1813) pense que "la théorie des fractions continues est une des plus utiles de l'arithmétique (...) mais elle est d'un plus grand usage encore dans la solution des problèmes indéterminés lorsqu'on ne demande que des nombres entiers" Il s'agit de la résolution d'équations à coefficents entiers. Se situant explicitement dans la lignée d'EULER il publie ses travaux en 1774 à la suite de la traduction en français de l'Algèbre d'EULER par Jean BERNOUILLI sous le tître "*Additions à l'analyse indéterminée d'Euler*". Avant cette publication il avait déjà présenté à l'Académie de Berlin, en 1769, une démonstration de la réciproque du théorème d'EULER, énoncée dans le tître de ce paragraphe.

Le texte complet se trouve en annexe 3, nous nous contenterons d'en donner ici les principales articulations.

LAGRANGE considère l'équation du second degré

$E_1x^2 - 2\varepsilon x - E = 0$ où E_1, ε et E sont des entiers tels que $\varepsilon^2 + EE_1 > 0$. Choisissant une des deux racines : $x = \frac{\varepsilon + \sqrt{\varepsilon^2 + EE_1}}{E_1}$, il la développe en fraction continue $\lambda_1 + \frac{1|}{|\lambda_2} + \frac{1|}{|\lambda_3} + \ldots + \frac{1|}{|\lambda_n} + \ldots$ (la seconde racine s'exprime de la même façon à condition de changer les signes des coefficients de l'équation).

Il s'intéresse ensuite aux fractions continues incomplètes :

$x_n = \lambda_{n+1} + \frac{1|}{|\lambda_{n+2}} + \dots$, que l'on peut caractériser par $x = \lambda_1 + \frac{1}{x_1}$ et pour tout $n \geq 1$, $x_n = \lambda_{n+1} + \frac{1}{x_{n+1}}$. Ces x_n sont solutions d'équations du second degré que LAGRANGE appelle "*transformées*", $E_{n+1}x_n^2 - 2\varepsilon_n x_n - E_n = 0$ dont le disciminant est constant (pour rour $n \geq 1$, $\varepsilon_n^2 + E_nE_{n+1} = B$), et dont les coefficients E_n, ε_n, ainsi que les quotients partiels λ_n se calculent successivement à partir de ε , E et E_1 à l'aide des relations :

$\lambda_n = E\left[\frac{\varepsilon_{n-1}+\sqrt{B}}{E_n}\right]$ où E désigne la partie entière, $\varepsilon_n = \lambda_n E_n - \varepsilon_{n-1}$

et $E_{n+1} = E_{n-1} + 2\varepsilon_{n-1}\,\lambda_n - E_n\lambda_n^2$, avec $n \geq 1$, $E_o = E$ et $\varepsilon_o = \varepsilon$.

Etant donnée la façon dont sont engendrées ces équations, elles ont au moins une racine, x_n, supérieure à 1. LAGRANGE a déjà utilisé des équations transformées selon le même principe (pour obtenir des approximations rationnelles d'une racine positive d'une équation de degré m) et a démontré dans son *"Mémoire sur la résolution des équations numériques"* présenté à l'Académie de Berlin l'année précédente, qu'à partir d'un certain rang les transformées n'ont qu'une racine supérieure à 1 (voir annexe n° 4).

Mais si x_n est la seule racine supérieure à 1 de l'équation

$E_{n+1}x^2 - 2\varepsilon_n x - E_n = 0$, sa partie entière λ_{n+1} est comprise entre les deux racines et $E_{n+1}\,\lambda_{n+1}^2 - 2\,\varepsilon_n\lambda_{n+1} - E_n$, qui vaut $-E_{n+2}$ et E_{n+1} sont des signes contraires .

Il existe donc un rang k à partir duquel E_kE_{k+1} est un entier positif inférieur à B (toutes les transformées ont le même discriminant B) : il y a donc un nombre fini de couples (E_k, E_{k+1}), des triplets $(E_k, E_{k+1}, \varepsilon_k)$, et donc d'équations transformées.

On retrouve donc à partir d'un certain rang les mêmes équations, les mêmes racines et les mêmes quotients partiels λ, la fraction continue qui exprime l'une ou l'autre des racines de l'équation de départ est donc périodique à partir d'un certain rang.

Après LAGRANGE, on peut affirmer : un développement en fraction continue est périodique si et seulement si il provient d'un irrationnel quadratique.

ET CE N'EST PAS FINI !

La fécondité des fractions continues, qui avait frappé LAGRANGE, ne s'est pas démentie par la suite. On a pu, par exemple, appliquer la même méthode aux fonctions, et le développement de $\tan x = \frac{x|}{|1} - \frac{x^2|}{|3} - \frac{x^2|}{|5} - \frac{x^2|}{|7} - \dots$ est au départ de la démonstration de l'irrationnalité de π par LAMBERT (1761), reprise par LEGENDRE (1795) qui soupçonne la transcendance de π. Auparavant, EULER avait obtenu le developpement en fraction continue de e, prouvant par là l'irrationnalité de e :

$$e = 2 + \frac{1|}{|1} + \frac{1|}{|2} + \frac{1|}{|1} + \frac{1|}{|1} + \frac{1|}{|4} + \frac{1|}{|1} + \frac{1|}{|1} + \frac{1|}{|6} + \frac{1|}{|1} + \dots\dots$$

Une généralisation des fractions continues est également au départ des démonstrations de transcendance de e (HERMITE 1873) et de π (LINDEMANN 1882). Et nous n'avons cité que des résultats se rattachant à notre sujet, l'irrationnalité.

Signalons pour terminer qu'on ne connaît toujours pas le développement en fraction continue de π. Avis aux amateurs !

BIBLIOGRAPHIE

BREZINSKI Claude : History of Continued Fractions and PADE Approximanti - Springer Verlag 1991.

CAVEING Maurice : la constitution du type mathématique de l'idéalité dans la pensée grecque - Lille 1982.

DAHAN-DALMEDICO Amy et PEIFFER Jeanne : Pour une histoire des Mathématiques - Point Seuil 1986.

DHOMBRES Jean : Nombre, mesure et continu - Epistémologie et histoire - CEDIC 1978.

DIEUDONNE Jean : Abrègé d'histoire des mathématiques - Hermann 1978.

GARDIES Jean-Louis : l'héritage épistémologique d'Eudoxe de Cnide- Vrin 1988.

IREM Groupe Epistémologie et Histoire : Mathématiques au fil des âges. Gauthier-Villars 1987.

JABOEUF François : les fraction continues - IREM Montpellier 1985.

SERFATI Michel : Quadrature du cercle - Fractions continues et autres contes. Fragments d'histoire des mathématiques. APMEP 1992.

SZABO Arpad : Les débuts des mathématiques grecques - VRIN 1977.

YOUSCHKEVITCH : Les mathématiques arabes - VRIN 1976.

Sources des textes cités :

ARISTOTE :

Topiques. Les premiers analytiques. Traduction J. Tricot - VRIN 1983.

Métaphysique. Traduction J. Tricot - Vrin 1986.

EUCLIDE. Livre V et X. Traduction Peyrard - Blanchard 1966.

Livre VII Traduction Jean Itard. Les livres arithmétiques d'Euclide - Hermann 1961.

Omar Al KHAYYAM. Traduction Ahmed Djebbar in *algorithme au fil des âges* (à paraître).

EULERI Léonhardi : Commentationes Analyticae - Teubner 1925.

LAGRANGE Joseph-Louis : Oeuvres - Gauthier-Villars 1868.

Annexe 1

OMAR AL KHAYYAM

Extrait de la Seconde Epître sur l'Evocation de la Proportion, de l'Idée de Proportionalité et de leur (sens) véritable.

Edition A. I. Sabra, Alexandrie, 1961, pp. 44-47. Traduction Ahmed DJebbar.

Les titres ne sont pas dans le texte. Les mots entre parenthèses ont été ajoutés pour faciliter la compréhension.

I - (DEFINITION DE L'EGALITE DE DEUX RAPPORTS)

Etant (donné) quatre grandeurs (telles que) la première soit égale à la seconde et la troisième égale à la quatrième, ou bien (telle que) la première soit une partie de la seconde et la troisième cette même partie de la quatrième, ou bien (telle que) la première soit des parties de la seconde et la troisième ces mêmes parties de la quatrième, alors le rapport de la première à la seconde est, nécessairement, comme le rapport de la troisième à la quatrième, et ce rapport est numérique.

Si les (grandeurs) ne sont pas selon ces trois formes et que, lorsqu'on retranche de la seconde tous les multiples de la première (contenus dans la seconde) jusqu'à ce qu'il reste un résidu inférieur à la première, et si , de la même manière, lorsqu'on retranche de la quatrième tous les multiples de la troisième jusqu'à ce qu'il reste un résidu inférieur au troisième et qu'alors le nombre de multiples de la première (contenu) dans la seconde est égal au nombre de multiples de la troisième (contenu) dans la quatrième. Et si, après (cela), on retranche (de la première) tous les multiples du résidu de la seconde par rapport à la première, de telle sorte qu'il reste un résidu inférieur au résidu de la seconde et que, de la même (manière) on retranche (de la troisième) tous les multiples du résidu de la quatrième par rapport à la troisième, jusqu'à ce qu'il reste un résidu inférieur au résidu de la quatrième, et qu'alors le nombre des multiples du résidu de la seconde est égal au nombre de multiples du résidu de la quatrième, et si, (après cela) lorsqu'on retranche, de la même (manière) , du résidu de la seconde, tous les multiples du résidu de la troisième, leur nombre est le même ; et si, lorsque de la même (manière), on retranche tous les multiples des résidus successivement les uns des autres, comme nous l'avons montré, le nombre des résidus de la première et de la seconde est égal au nombre des résidus correspondant de la troisième et de la quatrième, (et ce) indéfiniment, alors le rapport de la première à la seconde sera, nécessairement, comme le rapport de la troisième à la quatrième. Et c'est cela le rapport véritable pour le type géométrique (des grandeurs).

Annexe 2

LEONHARDI EULERI

COMMENTATIONES ANALYTICAE ad Théoriam serierum infinitarum pertinentes.

Edition Carl BOEHM et Georg FABER, TEUBNER, LIEPZIG et BERLIN 1925

19[a].) Soit donc la fraction continue suivante

$$a+\cfrac{1}{b+\cfrac{1}{b+\cfrac{1}{b+\cfrac{1}{b+\text{etc....}}}}}$$

que l'on pose = x, il s'ensuit que

$$x-a=\cfrac{1}{b+\cfrac{1}{b+\cfrac{1}{b+\cfrac{1}{b+\text{etc}}}}}=\frac{1}{b+x-a};$$

d'où on a

$$x^2-2ax+bx+a^2-ab=1$$

et

$$x=a-\frac{b}{2}+\sqrt{1+\frac{bb}{4}}.$$

C'est pourquoi, si l'on prend b=2 et a=1 on a

$$x=1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\text{etc}}}}}=\sqrt{2}$$

donc, si l'on prend b=2a, on obtient

$$\sqrt{a^2+1}=a+\cfrac{1}{2a+\cfrac{1}{2a+\cfrac{1}{2a+\cfrac{1}{2a+\text{etc}}}}}$$

Il est donc possible de donner aisément une approximation de la racine carrée de tout nombre qui dépasse un carré d'une unité ; en posant a = 2, les fractions suivantes permettent d'approcher de plus en plus près de $\sqrt{5}$:

2	4	4	4	4	4	4	etc.
$\frac{1}{0}$	$\frac{2}{1}$	$\frac{9}{4}$	$\frac{38}{17}$	$\frac{161}{72}$	$\frac{682}{305}$	$\frac{2889}{1292}$	
	$\frac{1}{1}$	$\frac{7}{3}$	$\frac{29}{13}$	$\frac{123}{55}$	$\frac{521}{233}$	$\frac{2207}{987}$	
		$\frac{5}{2}$	$\frac{20}{9}$	$\frac{85}{38}$	$\frac{360}{161}$	$\frac{1525}{682}$	
		$\frac{3}{1}$	$\frac{11}{5}$	$\frac{47}{21}$	$\frac{199}{89}$	$\frac{843}{377}$	

20. Soit maintenant la fraction continue suivante

$$a+\cfrac{1}{b+\cfrac{1}{c+\cfrac{1}{b+\cfrac{1}{c+\cfrac{1}{b+\cfrac{1}{c+\text{etc}}}}}}}$$

que l'on pose = x ; on retrouve encore x lui-même de la façon suivante

$$x-a=\cfrac{1}{b+\cfrac{1}{c+\cfrac{1}{b+\cfrac{1}{c+\cfrac{1}{b+\text{etc}}}}}}=\cfrac{1}{b+\cfrac{1}{c+x-a}}$$

on a donc

$$x-a=\frac{x+c-a}{bx+bc-ab+1}$$

soit

$$bxx=aab+bcx-2abx=abc-a^2b+c\,;$$

donc si l'on prend c=2a, on a

$$bxx=aab+2a \text{ et } x=\sqrt{a^2+\frac{2a}{b}}$$

De la même manière, si l'on pose

$$x=a+\cfrac{1}{b+\cfrac{1}{c+\cfrac{1}{d+\cfrac{1}{b+\cfrac{1}{c+\cfrac{1}{d+\text{etc}}}}}}}$$

on aura

$$x-a=\cfrac{1}{b+\cfrac{1}{c+\cfrac{1}{d+x-a}}}$$

il s'ensuit

$$(bc+1)x^2+(bcd+b+d-c-2abc-2a)x-abcd+a^2bc-ab-ad+aa-cd+ac-1=0.$$

Et de cette façon toutes les fractions continues dont les dénominateurs sont égaux, soit tous, soit deux par deux, soit trois par trois, soit quatre par quatre, etc., peuvent s'effectuer. Mais le résultat, c'est à dire la valeur x, est toujours racine d'une équation quadratique.

Extrait de "*De Fractionibus continuis Dissertatio*", pages 201-203, traduction Denis DAUMAS.

Annexe 3.

LAGRANGE

Additions au Mémoire sur la Résolution des Equations Numériques, pages 603 à 609.

Extrait de SERRET,J.-A., *OEUVRES DE LAGRANGE*, tome 2, GAUTHIER-VILLARS, PARIS, 1868.

REMARQUE II.

Où l'on donne une manière très-simple de réduire en fractions continues les racines des équations du second degré.

32. Considérons l'équation générale du second degré

$$E_1 x^2 - 2\varepsilon x - E = 0,$$

dans laquelle E, E_1 et ε sont supposés des nombres entiers, tels que $\varepsilon^2 + EE_1 > 0$, pour que les racines soient réelles; cette équation, étant résolue, donne

$$x = \frac{\varepsilon + \sqrt{\varepsilon^2 + EE_1}}{E_1},$$

où le radical peut être pris positivement ou négativement. Supposons que la racine cherchée soit positive, et soit λ_1 le nombre entier qui sera immédiatement plus petit que la valeur de x; on fera donc

$$x = \lambda_1 + \frac{1}{x_1},$$

et, substituant cette valeur dans l'équation proposée, on aura une équation transformée dont l'inconnue sera x_1; or si, après avoir fait la substitution, on multiplie toute l'équation par x_1^2, qu'ensuite on change les signes et qu'on suppose, pour abréger,

$$\varepsilon_1 = \lambda_1 E_1 - \varepsilon,$$
$$E_2 = E + 2\varepsilon\lambda_1 - E_1\lambda_1^2,$$

on aura la transformée

$$E_2 x_1^2 - 2\varepsilon_1 x_1 - E_1 = 0,$$

laquelle donnera

$$x_1 = \frac{\varepsilon_1 + \sqrt{\varepsilon_1^2 + E_1E_2}}{E_2}:$$

on cherchera donc le nombre entier λ_2, qui sera immédiatement plus petit que cette valeur de x_1, et l'on fera

$$x_1 = \lambda_2 + \frac{1}{x_2},$$

et ainsi de suite.

Maintenant, je remarque que la quantité $\varepsilon_1^2 + E_1E_2$, qui est sous le signe dans l'expression de x_1, devient, en substituant les valeurs de ε_1 et de E_2, et ôtant ce qui se détruit, celle-ci : $\varepsilon^2 + EE_1$, qui est la même que celle qui est sous le signe dans l'expression de x; d'où il est facile de conclure que la quantité radicale sera toujours la même dans les expressions de x, x_1, x_2,....

33. Donc si l'on fait, pour abréger,

$$B = \varepsilon^2 + EE_1,$$

et qu'on prenne (le signe $<$ dénote qu'il faut prendre le nombre entier qui est immédiatement moindre)

$$\lambda_1 < \frac{\varepsilon + \sqrt{B}}{E_1}, \quad \varepsilon_1 = \lambda_1 E_1 - \varepsilon,$$
$$E_2 = E + 2\varepsilon\lambda_1 - E_1\lambda_1^2, \quad \lambda_2 < \frac{\varepsilon_1 + \sqrt{B}}{E_2}, \quad \varepsilon_2 = \lambda_2 E_2 - \varepsilon_1,$$
$$E_3 = E_1 + 2\varepsilon_1\lambda_2 - E_2\lambda_2^2, \quad \lambda_3 < \frac{\varepsilon_2 + \sqrt{B}}{E_3}, \quad \varepsilon_3 = \lambda_3 E_3 - \varepsilon_2,$$
$$E_4 = E_2 + 2\varepsilon_2\lambda_3 - E_3\lambda_3^2, \quad \lambda_4 < \frac{\varepsilon_3 + \sqrt{B}}{E_4}, \quad \varepsilon_4 = \lambda_4 E_4 - \varepsilon_3,$$
$$\cdots\cdots\cdots, \quad \cdots\cdots, \quad \cdots\cdots,$$

on aura

$$x = \frac{\varepsilon + \sqrt{B}}{E_1} = \lambda_1 + \frac{1}{x_1},$$
$$x_1 = \frac{\varepsilon_1 + \sqrt{B}}{E_2} = \lambda_2 + \frac{1}{x_2},$$
$$x_2 = \frac{\varepsilon_2 + \sqrt{B}}{E_3} = \lambda_3 + \frac{1}{x_3},$$
$$\cdots\cdots\cdots,$$

d'où

$$x = \lambda_1 + \cfrac{1}{\lambda_2 + \cfrac{1}{\lambda_3 + \ddots}}$$

Quant au radical $\sqrt{B}$, il faudra toujours lui donner le même signe qu'on lui a supposé dans la valeur de la racine cherchée x.

On peut observer encore que, comme on a trouvé

$$\varepsilon_1^2 + E_1 E_2 = \varepsilon^2 + EE_1 = B,$$

on aura

$$E_2 = \frac{B - \varepsilon_1^2}{E_1},$$

et, de même,

$$E_3 = \frac{B - \varepsilon_2^2}{E_2}, \quad E_4 = \frac{B - \varepsilon_3^2}{E_3}, \ldots.$$

Ainsi l'on pourra, si on le juge plus commode, employer ces formules à la place de celles qu'on a données plus haut pour avoir les valeurs de E_2, E_3,...

34. Maintenant je dis que la fraction continue qui exprime la valeur de x sera toujours nécessairement périodique.

Pour pouvoir démontrer ce théorème, nous commencerons par démontrer en général que, quelle que soit l'équation proposée, on doit toujours nécessairement arriver à des équations transformées dont le premier et le dernier terme soient de signes différents. En effet, nous avons vu, dans le n° 19 du *Mémoire sur la résolution des équations numériques*, qu'on doit toujours nécessairement arriver à une équation transformée qui n'ait qu'une seule racine plus grande que l'unité, après quoi chacune des transformées suivantes n'aura aussi qu'une seule racine plus grande que l'unité; soit donc

$$au^m + bu^{m-1} + cu^{m-2} + \ldots + k = 0,$$

une de ces transformées qui n'ont qu'une seule racine plus grande que l'unité, et soit s la valeur entière approchée de u : on fera, pour avoir la transformée suivante, $u = s + \frac{1}{u'}$, ce qui, étant substitué, donnera cette transformée, dans laquelle il est aisé de voir que le premier terme sera

$$(as^m + bs^{m-1} + cs^{m-2} + \ldots + k)u'^m,$$

et que le dernier sera a. Or, puisque la vraie valeur de u dans la transformée précédente tombe entre ces deux-ci : $u = s$ et $u = \infty$, entre lesquelles il ne se trouve aucune autre valeur de u (hypothèse), il s'ensuit qu'en faisant ces deux substitutions dans l'équation en u on aura nécessairement des résultats de signe contraire; car il est facile de concevoir qu'il n'y aura en ce cas qu'un seul des facteurs de cette équation qui pourra changer de signe en passant d'une valeur de u à l'autre (n° 5, Mémoire cité). Mais la supposition de $u = \infty$ donne le résultat au^m (tous les autres termes devenant nuls vis-à-vis de celui-ci), lequel est de même signe que le coefficient a; donc il faudra que la supposition de $u = s$ donne un résultat de signe contraire à a; mais ce résultat est égal à

$$as^m + bs^{m-1} + cs^{m-2} + \ldots + k;$$

donc, puisque cette quantité est en même temps le coefficient du premier terme de l'équation transformée en u', dont le dernier terme est a, il s'ensuit que cette transformée aura nécessairement ses deux termes extrêmes de signes différents.

Et l'on peut prouver de la même manière que cela aura lieu à plus forte raison dans toutes les transformées suivantes.

35. Cela posé, puisque l'équation proposée

$$E_1 x^2 - 2\varepsilon x - E = 0$$

donne les transformées (32)

$$E_2 x_1^2 - 2\varepsilon_1 x_1 - E_1 = 0,$$
$$E_3 x_2^2 - 2\varepsilon_2 x_2 - E_2 = 0,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots,$$

il s'ensuit de ce que nous venons de démontrer dans le numéro précédent qu'on parviendra nécessairement à des transformées comme

$$E_{\gamma+1} x_\gamma^2 - 2\varepsilon_\gamma x_\gamma - E_\gamma = 0,$$
$$E_{\gamma+2} x_{\gamma+1}^2 - 2\varepsilon_{\gamma+1} x_{\gamma+1} - E_{\gamma+1} = 0,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots,$$

dont les premiers et derniers termes seront de signes différents; de sorte que les nombres

$$E_\gamma, \quad E_{\gamma+1}, \quad E_{\gamma+2}, \ldots$$

seront tous de même signe. Or, on a (33)

$$B = \varepsilon_\gamma^2 + E_\gamma E_{\gamma+1} = \varepsilon_{\gamma+1}^2 + E_{\gamma+1} E_{\gamma+2} = \ldots;$$

donc, puisque E_γ, $E_{\gamma+1}$, $E_{\gamma+2}$,... sont de même signe, les produits $E_\gamma E_{\gamma+1}$, $E_{\gamma+1} E_{\gamma+2}$,... seront nécessairement positifs; d'où il s'ensuit :

1° Que l'on aura

$$\varepsilon_\gamma^2 < B, \quad \varepsilon_{\gamma+1}^2 < B, \ldots,$$

c'est-à-dire (en faisant abstraction du signe)

$$\varepsilon_\gamma < \sqrt{B}, \quad \varepsilon_{\gamma+1} < \sqrt{B},$$

et ainsi de suite à l'infini;

2° Que l'on aura aussi, à cause que les nombres E, E_1, E_2,... sont tous entiers,

$$E_\gamma < B, \quad E_{\gamma+1} < B, \quad E_{\gamma+2} < B,$$

et ainsi de suite. Donc, comme B est donné, il est clair qu'il n'y aura qu'un certain nombre de nombres entiers qui pourront être moindres que B ou que $\sqrt{B}$; de sorte que les nombres

$$E_{\gamma},\ E_{\gamma+1},\ E_{\gamma+2},\ldots,\quad \varepsilon_{\gamma},\ \varepsilon_{\gamma+1},\ \varepsilon_{\gamma+2},\ldots,$$

ne pourront avoir qu'un certain nombre de valeurs différentes, et qu'ainsi dans l'une et l'autre de ces séries, si on les pousse à l'infini, il faudra nécessairement que les mêmes termes reviennent une infinité de fois; et, par la même raison, il faudra aussi qu'une même combinaison de termes correspondants dans les deux séries revienne une infinité de fois; d'où il s'ensuit qu'on aura nécessairement, par exemple,

$$E_{\gamma+\delta+\nu}=E_{\gamma+\delta}\quad \text{et}\quad \varepsilon_{\gamma+\delta+\nu}=\varepsilon_{\gamma+\delta},$$

ou bien, en faisant $\gamma+\delta=\mu$,

$$E_{\mu+\nu}=E_{\mu}\quad \text{et}\quad \varepsilon_{\mu+\nu}=\varepsilon_{\mu};$$

donc, à cause de

$$B=\varepsilon_{\mu}^2+E_{\mu}E_{\mu+1}=\varepsilon_{\mu+\nu}^2+E_{\mu+\nu}E_{\mu+\nu+1},$$

on aura aussi

$$E_{\mu+\nu+1}=E_{\mu+1};$$

mais on a

$$x_{\mu}=\frac{\varepsilon_{\mu}+\sqrt{B}}{E_{\mu+1}}\quad \text{et}\quad x_{\mu+\nu}=\frac{\varepsilon_{\mu+\nu}+\sqrt{B}}{E_{\mu+\nu+1}};$$

donc $x_{\mu+\nu}=x_{\mu}$; donc la fraction continue sera nécessairement périodique (24).

36. En effet, on voit, par les formules du n° 33, que si l'on a

$$E_{\mu+\nu}=E_{\mu}\quad \text{et}\quad \varepsilon_{\mu+\nu}=\varepsilon_{\mu},$$

on aura

$$E_{\mu+\nu+1}=E_{\mu+1},\quad \lambda_{\mu+\nu+1}=\lambda_{\mu+1},\quad \varepsilon_{\mu+\nu+1}=\varepsilon_{\mu+1},$$

et ainsi de suite; de sorte qu'en général les termes des trois séries

$$E,\ E_1,\ E_2,\ldots,\quad \varepsilon,\ \varepsilon_1,\ \varepsilon_2,\ldots,\quad \lambda_1,\ \lambda_2,\ldots,$$

qui auront pour exposant $\mu+n\nu+\varpi$, seront les mêmes que les termes précédents dont les exposants seront $\mu+\varpi$, en prenant pour n un nombre quelconque entier positif.

Ainsi, chacune de ces trois séries deviendra périodique, à commencer par les termes E_{μ}, ε_{μ}, $\lambda_{\mu+1}$, et leurs périodes seront de ν termes, après lesquels les mêmes termes reviendront dans le même ordre, à l'infini.

L'infini n'est pas programmable....

Marianne Guillemot

En 1982, les programmes des lycées, après ceux des collèges, s'établirent en réaction contre les "mathématiques modernes" :

"Les actuels programmes de Mathématiques ont entrepris de lutter contre un formalisme qui, maltraitant l'acquis intuitif des élèves, isolerait la démarche pédagogique des réalités de l'expérience et de l'action ..."

"On évacuerait à tort cette diversité par un exposé théorique hâtif et parcimonieux."

"L'important est, répétons le, d'aider l'élève à organiser la synthèse de ses connaissances pour les réinvestir de lui même dans des domaines a priori éloignés."

Lutte contre le formalisme, méfiance envers la théorie, mise en valeur du concret, de l'actif, de l'utile, intérêt prioritaire pour les applications; tout cela est exprimé clairement, dès 1981, dans les paragraphes "objectifs" et "introduction au programme" des programmes officiels(1).

Le contenu des programmes évolue dans ce sens, en plusieurs étapes; dès 1982, on note la disparition, sans commentaires, de l'arithmétique en terminale C; est-ce parce que cette discipline est trop "formelle", ou bien ne serait elle pas assez utile aux applications? D'autres changements - l'effacement des probabilités tandis qu'est introduite la statistique descriptive; le retour de la géométrie, mais limitée à l'étude des déplacements et des similitudes et au calcul vectoriel - semblent refléter les mêmes préoccupations.

En analyse, c'est plus tard qu'arrivent d'importantes modifications, avec les programmes de 1986 et de 1991. L'analyse a bien sûr une place très importante dans les programmes, car la connaissance de certaines fonctions est nécessaire pour les applications, en particulier en physique. Mais l'étude des fonctions