

nouvelles, si incontestablement meilleures et plus rigoureuses que les anciennes. Mon sentiment est qu'il faut d'abord préparer à ces nouvelles théories, et suivre l'ancienne route, en montrant soit des erreurs, soit des insuffisances des démonstrations restées longtemps inaperçues, et annonçant que d'autres méthodes les feront disparaître. Et la raison est que quelque chose du développement historique de la science doit se trouver dans l'enseignement. Je m'explique. C'est un fait d'expérience absolument certain, que l'erreur a été bien souvent plus utile que des vérités parfaites, pour la marche de l'esprit et le progrès de la science. N'a-t-on pas été bien heureux jusqu'ici d'avoir cru à tort, que toute fonction continue admet une dérivée, que toute équation différentielle admet une solution, et plus anciennement que toute fonction est développable par la formule de Mac Laurin ? J'en tire peut-être en me trompant, la conclusion que l'appareil si complexe de la rigueur moderne, et le caractère abstrait qu'elle revêt, peut n'être absolument pas profitable pour des commençants, ou du moins qu'il est utile de reléguer à la fin, en le réservant pour le couronnement de l'édifice, cette rigueur, qui n'est point toujours suffisamment instructive."

Bibliographie

- J. Harthong et G. Reeb : *Intuitionnisme* 84 dans "La mathématique non standard" ; Éditions du CNRS 1989.
- D. Hilbert : "Über das Unendliche" Mathematische Annalen 95 - 1926.
- J.M. Salanskis : "L'analyse non standard et la tradition de l'infini" Revue d'Histoire des Sciences XLI/2 1988.
- J. Grabiner : "Is mathematical truth time-dependant?" American Mathematical Monthly 81-1974.
- Bkouche - Charlot - Rouche : "Faire des mathématiques : le plaisir du sens" Armand Colin 1991.

Prenons la tangente avant de dériver

Patrick Perrin
IREM de Reims

Le groupe Histoire des Mathématiques de l'IREM de Reims a entrepris depuis plusieurs années un travail sur l'introduction du calcul infinitésimal dans les classes de lycée. Une recherche de documents historiques portant sur l'origine du calcul différentiel, une réflexion sur le concept de tangente chez les élèves et une exploitation en classe de certains des textes retenus en furent les différentes étapes.

Petit historique du problème des tangentes

Commençons par un bref aperçu des différentes conceptions de la notion de tangente à une courbe rencontrées dans l'histoire des mathématiques.

On trouve dans le livre III des *Eléments* d'Euclide (vers 300 av. J.C.) la définition suivante : "Une droite qui touchant un cercle et qui étant prolongée ne la coupe pas est dite tangente à ce cercle". Cette conception généralisée à d'autres courbes que le cercle se retrouve chez Apollonius (262-192 av. J.C.) dans sa construction des tangentes aux coniques. On la trouve également chez Archimède (287-212 av. J.C.) à propos de la tangente à la spirale. Des considérations d'ordre dynamique sont aussi présentes dans l'oeuvre du géomètre de Syracuse, mais elles ne prennent jamais la place d'une preuve géométrique. Rappelons qu'Archimède définit la spirale comme le lieu d'un point qui parcourt avec une vitesse constante une demi-droite, qui elle-même tourne autour de son origine avec une vitesse angulaire constante. Le principal reproche que l'on peut faire à cette conception est qu'elle ne donne pas de méthode pratique de construction de la tangente à une courbe.

Il faudra attendre le XVII^e siècle pour qu'apparaisse un changement radical de point de vue. Ce sont les travaux de Képler (1571-1630) et de Galilée (1564-1642) qui en sont la cause : le premier en énonçant ses lois sur les trajectoires elliptiques des planètes et le second en posant les bases de la mécanique, vont

orienter les travaux des mathématiciens du début de ce siècle vers l'étude des courbes considérées comme trajectoires d'un point en mouvement. Ainsi Torricelli (1608-1647) et Roberval (1602-1675) vont développer une méthode originale de construction de la tangente reposant sur le principe de la composition des mouvements, principe qui avait été clarifié par Galilée (voir à ce sujet le texte de Roberval en annexe).

Appliquant cette méthode cinématique, Torricelli détermine la tangente à une parabole de degré entier quelconque (terminologie de l'époque pour les courbes d'équation $y = x^n$, n entier naturel) et Roberval la tangente à la cycloïde. Dans cette conception de la tangente il y a l'idée de direction instantanée et donc implicitement celle de limite. Elle est d'une remarquable efficacité mais n'est pas applicable à toutes les courbes.

Toujours en ce début du XVII^e siècle et parallèlement aux travaux précédents, de nombreuses autres méthodes vont éclore. Il s'agit dans la plupart des cas d'un calcul opérant sur l'équation de la courbe. Rappelons que l'on doit à Descartes (1596-1650) la possibilité de décrire certaines courbes, qu'il nomme géométriques, par une équation algébrique $P(x,y) = 0$. Ces méthodes utilisent des quantités infiniment petites ; la tangente y apparaît parfois comme position limite d'une sécante (ainsi dans le calcul par Fermat en 1629 de la tangente à la parabole), parfois comme la droite se confondant avec une partie indéfiniment petite de la courbe (cf le texte de Barrow en annexe). Ce sont ces méthodes de calcul de la tangente, plus générales que les précédentes et proches de nos conceptions actuelles, qui donneront naissance au calcul différentiel lorsque Newton (1642-1727) et Leibniz (1646-1716) en auront fait une synthèse.

Un sondage révélateur

Afin de mieux cerner les difficultés de nos élèves et les carences de notre enseignement nous avons effectué en septembre 1991 un sondage auprès des classes de Terminales scientifiques du lycée Clémenceau de Reims. 127 élèves de section C et 99 élèves de section D ont ainsi été interrogés. Notre objectif était d'essayer de dégager les représentations que les élèves s'étaient forgées des notions de limite, dérivée et tangente. Je me limiterai dans cet article aux résultats concernant la tangente. Les voici :

Question :

"Quand dit-on qu'une droite est tangente à une courbe ?"

Réponses les plus fréquentes :

	en TC	en TD
"Lorsqu'elle n'a qu'un point commun avec cette courbe"	57%	31%
"Lorsqu'elle touche la courbe sans la couper"	17%	9%
"Lorsqu'elle a pour équation $y=f'(a)(x-a)+f(a)$ "	9%	4%
"Lorsqu'elle a même direction que la courbe"	6%	3%
"Lorsque son coefficient directeur est égal à la dérivée"	4%	1%
"Lorsque la fonction est dérivable"	5%	0%
"Lorsqu'elle passe par un sommet de la courbe"	2%	2%

Question :

"Y a-t-il un rapport entre la tangente à une courbe et la tangente à un cercle ? Si oui lequel ?"

Réponses :

OUI	66%	en TC	38%	en TD
NON	17%	en TC	32%	en TD
S O	16%	en TC	39%	en TD

Ces résultats appellent quelques commentaires. L'image de la tangente que se font les élèves reste celle de la tangente au cercle ; on peut la rapprocher de la définition d'Euclide. Elle est peu modifiée par l'introduction du calcul différentiel en classe de première. Ce n'est qu'une demi-surprise si l'on se réfère aux recherches effectuées sur l'apprentissage des mathématiques qui ont montré qu'un concept nouveau, lorsqu'il est introduit, ne prend pas la place de l'ancien, mais se superpose plutôt à lui ; les deux pouvant coexister dans la pensée de l'élève pendant un temps relativement long. Cependant le très faible score des réponses classées à la troisième et à la cinquième place donne à réfléchir. En ce qui concerne la deuxième question le lien avec la tangente à un cercle, lorsqu'il est perçu, est justifié géométriquement (un seul point d'intersection), exceptionnellement en considérant le cercle comme la courbe représentative d'une fonction particulière. Ajoutons pour finir que l'analyse d'autres réponses (non reportées ici) portant sur des représentations graphiques a montré que la capacité de tracer une tangente "à vue d'oeil" n'est pas développée chez les élèves. L'utilisation des tangentes pour donner l'allure d'une courbe, qui en est de fait l'enveloppe, a disparu avec l'arrivée des calculatrices.

Présentation des textes

Au vu du sondage précédent j'envisageai d'essayer une autre démarche pour introduire le calcul différentiel dans ma classe. Plutôt que de définir le nombre dérivé comme limite du taux d'accroissement, puis d'interpréter graphiquement cette définition en terme de tangente, je décidai de commencer par un travail sur la notion de tangente pour introduire ensuite le nombre dérivé comme coefficient directeur de celle-ci. Parmi la douzaine de textes anciens à ma disposition, deux me parurent cadrer avec les objectifs d'enseignement que je m'étais fixés, tout en restant accessibles à des élèves. Le premier de Roberval traite de la tangente à la cycloïde, le second de Barrow donne une méthode générale de calcul de la tangente (ils se trouvent en annexe du présent article). Je vais les resituer rapidement dans l'oeuvre de ces mathématiciens.

Né en 1602 à Roberval près de Senlis, Gilles Personne fut professeur au Collège Royal à Paris de 1634 jusqu'à sa mort en 1675. Il ne publia que deux ouvrages de son vivant, un traité de statique en 1636 et un d'astronomie en 1644. Par contre il transmit à l'Académie des Sciences, dont il fut membre dès sa création en 1666, de nombreuses notes portant sur la cycloïde, la composition des mouvements, les quadratures par la méthode des indivisibles, la recherche des centres de gravité. Le texte présenté ici est extrait du traité des indivisibles qui fut édité pour la première fois dans les mémoires de l'Académie des Sciences de 1693.

Isaac Barrow naquit à Londres en 1630. Il occupa la chaire de géométrie au Trinity Collège de Cambridge à partir de 1660. Il y dicta ses *Lectiones Geometricae* (dix livres) ainsi que ses *Lectiones Opticae* imprimées en 1670. Il céda sa place à un de ses étudiants promis à un bel avenir, Isaac Newton, et mourut en 1678. Les *Lectiones Geometricae* sont un véritable traité de "calcul différentiel" avant la lettre ; on y trouve par exemple la dérivée d'une somme, d'un produit, d'un quotient, la dérivation comme inverse de l'intégration. Ces leçons sont écrites dans le plus pur langage géométrique, excepté en fait la lecture X que nous en avons extraite.*

(*) Ce passage est une traduction libre du latin par J.C. PENIN de l'IREM de Reims.

Une expérimentation en première scientifique

Revenons maintenant au travail effectué avec les élèves. L'étude historique avait fait apparaître trois visions différentes de la tangente, j'élaborai une séquence autour de chacune d'elles.

La première n'avait pas de caractère historique, elle consistait à faire construire plusieurs tangentes à la parabole d'équation $y=x^2$ par recherche de sécantes ayant un point d'intersection unique. Son objectif était de manipuler la vision "euclidienne" de la tangente, la seule connue des élèves à ce moment, et d'en indiquer les limites. Suite à une question de ma part, les élèves se sont accordés pour dire que, des deux propriétés de la tangente à un cercle, droite ayant un seul point d'intersection ou droite perpendiculaire au rayon, seule la première s'étendait facilement à la parabole. Cette séquence permit aux élèves, après qu'ils eussent résolu quelques exemples, de conjecturer et de démontrer la valeur du coefficient directeur de la tangente de la courbe étudiée au point d'abscisse a . Dans la synthèse qui suivit, j'insistai sur le fait que cette méthode leur avait été accessible parce qu'elle ne mettait en jeu que des équations du second degré et que par conséquent on ne pourrait pas l'appliquer à toutes les courbes. J'en profitai également pour illustrer la notion d'enveloppe à l'aide d'un transparent montrant les tangentes tracées sans la parabole.

La deuxième séquence était bâtie autour du texte de Roberval. Elle devait donner aux élèves une vision cinématique de la tangente (droite donnant la "direction future" de la trajectoire) à travers un exemple de courbe définie autrement que par son équation cartésienne. Le texte fut présenté et commenté en classe. A mon étonnement certains élèves avaient une première connaissance de la cycloïde (c'est une courbe formée d'arceaux, dirent-ils), mais le principe de sa génération dut être expliqué en détail. Le fait que le vecteur vitesse soit porté par la tangente était connu des élèves (ou admis facilement). Par contre la composition des mouvements ne l'était pas et nécessita donc des commentaires fournis. Ceci mis à part la lecture du texte ne posa pas de gros problèmes. Les élèves devaient approfondir ce travail chez eux en refaisant la construction de la roulette et de ses tangentes et en reconnaissant la courbe qui l'accompagne.

La troisième séquence construite autour du texte de Barrow était la plus ambitieuse. Elle devait amener la vision "différentielle" de la tangente (correspondant à l'approximation affine de la fonction),

introduire la définition de la différentiabilité en un point, et donner la dérivée de trois fonctions usuelles : cube, racine carrée, inverse. Avant de distribuer le texte je présentai un transparent mettant en évidence comment une courbe finit par se confondre avec sa tangente lorsque l'on effectue des zooms successifs autour du point de contact (j'avais choisi comme exemple la parabole étudiée lors de la première séquence). La lecture du texte ne causa pas de gros soucis aux élèves, j'avais pris soin de remplacer les exemples originaux par celui plus simple de la courbe définie par $MP=AP^2$ et dont le résultat pouvait être recoupé avec les travaux précédents. Le travail demandé aux élèves était de justifier les trois règles de la méthode et de l'appliquer aux courbes définies par : $MP=AP^3$; $MP^2=AP$; $MP \times AP=1$.

Eu égard aux productions des élèves, le bilan de ces trois séquences m'est apparu positif. Les textes avaient suscité l'intérêt. Les méthodes de Roberval et de Barrow avaient été comprises par une majorité d'élèves. Lorsque, par la suite, je donnai la définition de la dérivabilité en un point par l'existence d'un développement limité d'ordre un, il me sembla que les élèves éprouvaient moins de difficultés. Ils savaient mieux "lire" cette définition, y reconnaître le nombre dérivé, les termes négligeables, voire même l'équation de la tangente dans le cas d'une étude en zéro. Autre avantage, le lien entre sens de variation d'une fonction et signe de sa dérivée avait pu être mis en évidence dès la première séquence.

Pour conclure

L'élaboration de certains concepts mathématiques a demandé plusieurs siècles et a été marqué par bien des détours, des polémiques, des erreurs avant qu'une définition "rigoureuse" ne remplace l'intuition première. Je ne pense pas seulement au calcul infinitésimal, mais aussi à la notion de fonction ou à celle de nombre complexe par exemple. Montrer aux élèves une partie du chemin parcouru leur permet d'avoir une vision plus riche du concept. Mais ce n'est pas la seule motivation qui me pousse à parler d'histoire des mathématiques en classe. L'autre est de donner une image plus vivante de ma discipline, différente de celle d'un catalogue de lois révélées, en espérant ainsi développer la curiosité des élèves.

DONNER les touchantes des lignes courbes par les mouvements mêmes mêlez.
Mais nous supposons qu'on nous en donne assez de propriétés spécifiques, qui nous fassent connoître les mouvements qui les décrivent.

Axiome, ou principe d'invention.

LA direction du mouvement d'un point qui décrit une ligne courbe, est la touchante de la ligne courbe en chaque position de ce point-là.

Le principe est assez intelligible, & on l'accordera facilement dès qu'on l'aura considéré avec un peu d'attention,

Règle générale.

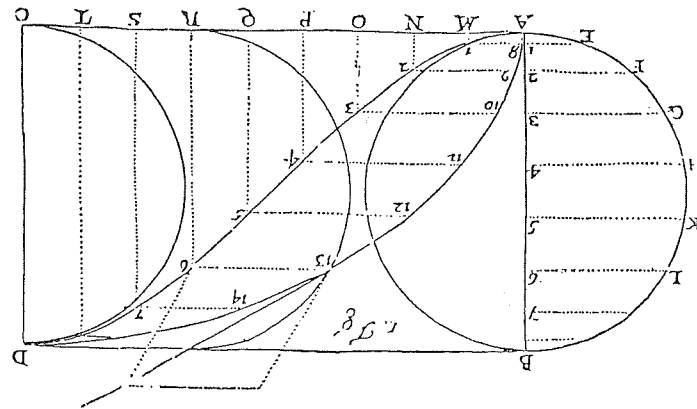
PAR les propriétés spécifiques de la ligne courbe (qui vous seront données) examinez les divers mouvements qu'à le point qui la décrit à l'endroit où vous voulez mener la touchante: de tous ces mouvements compoiez en un seul, tirez la ligne de direction du mouvement compoizé, vous aurez la touchante de la ligne courbe.

La démonstration est mot à mot dans notre principe. Et parce qu'elle est très-générale, & qu'elle peut servir à tous les exemples que nous en donnerons, il ne fera point à propos de la répéter.

EXPLICATION DE LA ROULETTE.

NOUS posons que le diamètre AB du cercle AEFGB se meut parallèlement à soy-même, comme s'il étoit emporté par quelque autre corps, jusques à ce qu'il soit parvenu en CD pour achever le demi-cercle ou demi-tour. Pendant qu'il chemine, le point A de l'extrémité dudit diamètre marche par la circonférence du cercle AEFGB, & fait autant de chemin que le diamètre, en sorte que quand le diamètre est en CD, le point A est venu en B, & la ligne AC se trouve égale à la circonférence AGHB. Or cette courbe du diamètre se divise en parties infinies & égales tant entr'elles qu'à chaque partie de la circonférence AGB, laquelle se divise aussi en parties infinies toutes égales entr'elles & aux parties de AC parcourues par le diamètre, comme il a été dit. En après je considère le chemin qu'à fait ledit point A porté par deux mouvements, l'un diamètre en avant, l'autre du sien propre dans la circonférence. Pour trouver ledit chemin, je voy que quand il est venu en E il est élevé au-dessus de son premier lieu duquel il est parti; cette hauteur se marque tirant du point F au diamètre AB un sinus E1, & le sinus Verbe A1 est la hauteur dudit A quand il est venu en E. De même quand il est venu en F, du point F sur AB je tire le sinus F2, & A2 sera la hauteur de A quand il a fait deux portions de la circonférence, & tirant le sinus G3, le sinus Verbe A3 sera la hauteur de A quand il est parvenu en G; & faisant ainsi de tous les lieux de la circonférence que

TRAITE' DES INDIVISIBLES. 251
parcours A, je trouve toutes ses hauteurs & elevemens
par dessus l'extrémité du diamètre A, qui sont A1, A2,



A3, A4, A5, A6, A7; donc, afin d'avoir les lieux par
où passe ledit point A, j'ai la ligne qu'il forme pen-
11. ij

252 TRAITE' DES INDIVISIBLES.
dant les deux mouvemens, je porte toutes les hauteurs
sur chacun des diamètres M, N, O, P, Q, R, S, T, &
je trouve que M1, N2, O3, P4, Q5, R6, S7 sont les
mêmes que celles qui sont prises sur AB. Puis je prends
les mêmes sinus E1, F2, G3, &c. & je les porte sur
chaque hauteur trouvée sur chaque diamètre, & je les
tire vers le cercle, & des extrémités de ces sinus se for-
ment deux lignes, dont l'une est A891011121314D,
& l'autre A1234567D. ...

Pour trouver la tangente de la figure en un point
donné, je tire dudit point une touchante au cercle qui
passeroit par ledit point, car chaque point de cercle le
tient selon la touchante de ce cercle. Je considère en-
suite le mouvement que nous avons donné à notre point
emporté par le diamètre marchant parallèlement à soy-
même. Tirant du même point la ligne de ce mouvement,
si je paracheve le parallélogramme (qui doit toujours
avoir les quatre côtes égaux lorsque le chemin du point
A par la circonférence est égal au chemin du diamètre
AB par la ligne AC) & si du même point je tire la dia-
gonale, j'ai la touchante de la figure qui a eû ces deux
mouvemens pour sa composition, j'ai le cercle
& le direct. Voilà comme on procède en telles opéra-
tions quand on pose les mouvemens égaux. Que si on
l'en a posé en quelque autre raison, comme si lorsque
l'un parcourt dans un temps l'espace d'un pied, l'autre
parcourt dans le même temps l'espace d'un pied & de-
mi, ou en autre raison, il faudroit tirer les conséquen-
ces suivant ladite raison.

ISAAC BARROW (1630-1677)

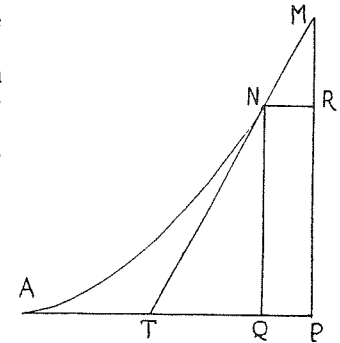
Lecture X

Ainsi nous nous sommes acquittés de la première partie de notre
exposé. En complément, sous forme d'un appendice nous ajouterons
une méthode que nous utilisons du calcul des tangentes. Toutefois je
ne sais pas, après tant de méthodes déjà connues et rejetées, si on
peut faire quelque chose de l'emploi de celle-ci. Encore fais-je ceci sur
les conseils d'un ami; d'autant plus volontiers que ce que j'ai traité
devant les autres paraît fructueux et général. Je procède de cette
façon.

Soient AP, PM deux lignes droites données
en position (telles que PM coupe la courbe
proposée en M) & MT supposée toucher
la courbe en M. et couper la droite AP en
T, comme je cherche maintenant la quantité
PT de la même droite, je pose l'arc de
courbe MN indéfiniment petit; alors je trace
les droites, NQ parallèles à MP, & NR à
AP; je nomme MP = m; PT = t;
MR = a; NR = e; quant aux restes des
droites, déterminées par la nature
particulière de la courbe et utiles à la
proposition, je les désigne par leur nom;
je compare par le calcul au moyen de
l'Equation considérée MR, NR elles mêmes (& par le moyen de celles-
ci MP, PT); en observant simultanément ces règles.

1. Parmi ce qui est calculé je jette tous les termes dans lesquels *a* ou
bien *e* sont des puissances d'eux-mêmes, ou bien dans lesquels ils sont
multipliés entre-eux (en effet ces termes ne valent rien).
2. Après avoir établi l'égalité, je jette tous les termes dont les lettres
désignent des quantités constantes ou bien fixées; ou bien dans lesquels
on n'a pas *a* ou *e* (en effet ces termes amenés dans une des parties
de l'égalité seront toujours rendus égaux à rien).
3. Je substitue à la place de *a*, *m* lui-même; (ou bien MP) à la
place de *e*, *t* lui-même (ou bien PT). De là on trouvera précisément
les valeurs de PT elles-mêmes.

Parce que si une partie indéfiniment petite d'une courbe quelconque
entre dans le calcul; on pourra substituer à cet endroit une petite
partie de tangente; ou bien (à cause de l'infini ténuité de l'arc de
courbe) n'importe quelle droite équivalente à celle-ci.



Exemple I

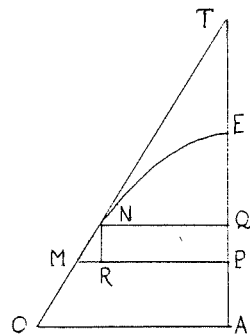
Soit la droite EA (donnée en position et grandeur) & la courbe EMO dont la propriété est de telle sorte que la droite MP étant tracée de manière quelconque elle soit perpendiculaire à EA, la *somme des cubes* de AP, & MP étant égale à la droite AE au *cube*.

Supposons nommé AE = r ; AP = f ; de là AQ = f + e ; & AQ cub. = f³ + 3ffe + 3fee + e³ ; (ou bien après avoir rejeté ce qui est superflu, selon ce qui est prescrit) = f³ + 3ffe. Ainsi NQ cub = cub.m - a = m³ - 3mma + 3maa - a³

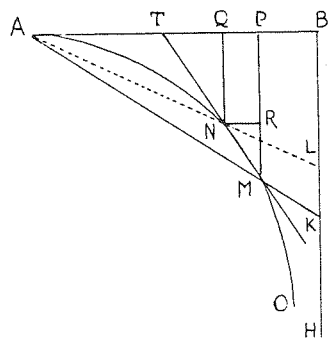
(C'est à dire) m³ - 3mma. C'est pourquoi on a f³ + 3ffe + m³ - 3mma = (AQ cub. + NQ cub. = AE cub.) = r³. et ayant rejeté les données, 3ffe - 3mma = 0. ou bien ffe = mma ; et substituant au lieu de a, & e, m et t eux-mêmes, il viendra fft = m³ ; ou si on veut

$t = \frac{m^3}{ft}$; donc PT est la quatrième proportionnelle en raison continue de AP et PM.

Semblablement, si on avait APqq + MPqq = AEqq il serait trouvé que PT = $\frac{m^4}{t^3}$; ou que PM est la quatrième proportionnelle en raison de AP et PM ; d'un autre côté je ne sais pas si ces lignes *Cycloformes* sont dignes d'études.



Exemple II



Supposons que l'angle ABH soit droit, & soit la courbe AMO, telle que ayant conduit par A de quelque manière que ce soit la droite AK, qui coupe la droite BH en K & la courbe AMO en M, on suppose que la sous-tendante AM est égale à l'abscisse BK, il est demandé de tracer la touchante en M à cette courbe.

Il faut faire tout ce que a été prescrit ci-dessus, & (ayant tracé ANL) on nomme AB = r ; AP = q ; de là AQ = q - e ; de même QN = m - a. donc qq + ee - 2qe + mm + aa - 2ma = (AQq + QNq = ANq =)

BLq ; c'est (en rejetant, comme il a été enseigné ; ce qui est à rejeter) qq - 2qe + mm - 2ma = BLq. De plus AQ:QN :: AB:BL ;

c'est à dire q - e : m - a :: r : BL = $\frac{rm + ra}{q + e}$

aussi $\frac{rrmm + rraa - 2rrma}{qq + ee - 2qe} = BLq$; ou bien (ayant rejeté ce qui est superflu) $\frac{rrmm - 2rrma}{qq - 2qe} = BLq = qq - 2qe + mm - 2ma$. ou bien

rrmm - 2rrma = q⁴ - 2q³e + qqmm - 2qqma - 2q³ + 4qqee - 2qmme + 4qmae ; c'est à dire ayant rejeté ce que nous avons prescrit de rejeter) -2rrma = -4q³e - 2qqma - 2qmme ou bien rрма - qqma = 2q³e + qmme ; ou en substituant m à la place de a, & t à la place de e, il vient rрма - qqmm = 2q³t - qmmt ; ou

$$\frac{rrmm - qqmm}{2q^3 - qmm} = t = PT.$$

Sources :

BARROW I. : *Lectiones Geometricae*, 1670.

ROBERVAL G. Personne de : *Traité des Indivisibles*, 1693.

CHILD J.M. : *The Geometrical Lectures of Isaac Barrow*, 1916.

KLINE M. : *Mathematical Thought from Ancient to Modern Times*, 1972.

DAHAN-DALMEDICO A. & PEIFFER J. : *Routes et Dédales*, 1982.