Eclairages historiques pour l'enseignement de l'analyse

Jean-Pierre Friedelmeyer
IREM de Strasbourg

De nombreuses réformes ont ponctué l'enseignement des mathématiques des trente dernières années, et plus particulièrement en analyse. Ces réformes tentaient, apparemment en vain, de concilier deux impératifs : un impératif de rigueur, propre à tout enseignement des mathématiques, et un impératif pédagogique de compréhension et de transmission du sens. Mais lorsque ce sens concerne des notions qui mettent en jeu l'infini (nombres irrationnels, infiniment petits, infiniment grands, limites etc...) l'intuition, qui est le support du sens, se heurte à des contradictions et est incapable d'appréhender d'emblée la richesse conceptuelle des notions de l'analyse élaborées par des générations de mathématiciens. La solution qui semble avoir été adoptée durant ces dernières années est un certain abandon du sens au profit de méthodes essentiellement calculatoires qui préserve une illusion de rigueur. Mais celle-ci n'est en réalité conservée que dans des îlots dispersés qui empêche toute perception globale et structurée du sens, au profit de règles purement formelles. Une autre solution est possible préservant à la fois le sens, tout en structurant la pensée mathématique de l'élève en un tout cohérent et rigoureux : elle consiste à situer les mathématiques et leur enseignement dans l'histoire. Alors le sens et la rigueur ne sont plus absolus, contradictoires ou inaccessibles, mais se construisent en interaction, en même temps que se structure la pensée de l'élève, selon un processus dynamique et vivant.

1. Grandes variations dans les programmes d'analyse du lycée.

Si l'on parcourt les programmes d'analyse enseignés au lycée depuis 1945 on peut distinguer assez nettement trois périodes.

1) **Jusqu'en 1961** le mot analyse ne figure pas dans un tel programme bien qu'il y ait des rubriques que nous plaçons aujourd'hui sous ce titre comme l'étude des fonctions, la dérivée etc... Mais ces rubriques sont placées dans le chapitre Algèbre-trigonométrie. Cette situation prolonge en fait celle qui régnait tout au

long du 19ème siècle et du 20ème siècle d'avant la guerre dans les programmes et les manuels scolaires, mêmes supérieurs où, l'étude des fonctions, des séries numériques etc... faisait partie des questions d'Algèbre.

2) **La période 1961-1985** par opposition à la précédente connaît une grande instabilité. Elle est marquée par la volonté d'introduire un enseignement moderne de l'analyse, bien séparé de l'algèbre mais visiblement avec beaucoup d'hésitations et de tâtonnements : Par exemple pour les différents programmes de 1ère Scientifique :

En 1966 on introduit la notion de continuité et de limite en un point, ainsi que celle de différentielle.

En 1970 la différentielle devient *"fonction linéaire tangente"*.

En 1982 ces notions sont remplacées par celles de développements limités d'ordre 0 et 1.

En même temps on introduit l'étude des suites numériques et on insiste sur une pratique de l'analyse par encadrements, approximations, inégalités.

3) **depuis 1985** les instructions officielles se distinguent par deux caractères

a) une volonté affichée de stabilité, puisque les programmes *"conservent pour l'essentiel les objectifs des programmes mis en application en 1983. Le bilan de trois années de fonctionnement ayant montré la nécessité de les infléchir."*

et un commentaire analogue en 1991

"les programmes qui suivent reprennent pour l'essentiel les objectifs et la substance des programmes précédents."

b) l'insistance apportée à privilégier un enseignement plus pratique, visant à *"donner **un contenu intuitif et concret aux objets mathématiques**"* et dans lequel *"on développera une vision géométrique des problèmes notamment en analyse, car la géométrie met au service de l'intuition et de l'imagination son langage et ses procédés de représentation"*.

Voici quelques extraits des programmes de 1985 et 1991 mis en parallèle. Le libellé : *"limite d'une fonction en un point"* devient sous le titre : **langage des limites**

"après observation des fonctions $h \to h^n$, $n=1, 2, 3$ et $h \to \sqrt{h}$ au voisinage de 0, on dit que ces fonctions admettent en 0 la limite 0."

1985	1991
en 1ère la notion de continuité est hors programme	idem mais quelques lignes auparavant *"Comme en 2de, on mettra en valeur l'utilité du concept de fonction pour l'étude des phénomènes **continus**"*.
Calcul intégral en TC *"Étant donné une fonction f continue sur un intervalle I et un couple (a,b) de points de I, le nombre F(b)-F(a) où F est une primitive de f, est indépendant du choix de F. On l'appelle intégrale de a à b de f et on le note* $\int_a^b f(t)dt$*"*	idem avec cet objectif : *"Familiariser les élèves avec quelques **problèmes relevant du calcul intégral** et qui, en retour, **donnent du sens à la notion d'intégrale** : calcul de grandeurs géométriques (aires, volumes...) de grandeurs physiques (calcul de la distance parcourue connaissant la vitesse, valeurs moyennes, valeur efficace...)"*

Pour le Professeur de Première ou Terminale qui essaye de préparer son cours, tout ceci peut pour le moins, le laisser perplexe. Comment par exemple donner du sens à la notion d'intégrale telle qu'elle est définie à gauche et faire le lien avec les notions d'aire, de volume etc...

Ensuite il peut s'étonner qu'une science - l'analyse - dont les résultats et les méthodes enseignées au lycée sont acquis depuis au moins 150 ans et souvent bien plus, subisse aujourd'hui encore d'importantes modifications dans les programmes d'enseignement tous les cinq ou dix ans. On peut comprendre que l'irruption des calculatrices et des ordinateurs peut modifier certaines approches et faciliter les calculs et les représentations. Je ne pense pas que cela change les définitions des objets mathématiques.

2. Ces variations révèlent une contradiction

En fait je crois que toutes ces variations, hésitations, inflexions, manifestent une contradiction fondamentale entre deux impératifs aussi contraignant l'un que l'autre et dont le révélateur est justement l'infini.

d'une part un impératif pédagogique.

Enseigner des notions qui parlent à l'élève, qu'il puisse comprendre, imaginer, qui stimulent son intuition et son imagination. On utilise alors des mots très chargés de sens intuitif comme *"continu, limite, infini, infiniment petit ou grand etc..."* mais très éloignés de leur définition et de leur traitement mathématique actuels.

Non seulement ces mots sont incapables de rendre compte de la richesse et de la finesse des concepts de l'analyse, mais plus grave - l'intuition est incapable de les appréhender, ou lorsqu'elle le fait, elle tombe facilement sur des paradoxes, ou conduit à des erreurs. Songez par exemple aux réponses spontanées de vos éleves sur ces limites classiques :

$$\lim_{n \to \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

ou

$$\lim_{n \to \infty} \left[\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \ldots + \frac{1}{n+n}\right]$$

C'est pourquoi B. Russell dira :

"l'intuition n'a rien à voir avec l'infiniment petit"

et Bachelard *"la rigueur ne peut donc provenir que d'une correction radicale de l'intuition"*.

Ensuite un impératif de rigueur.

Or, qui dit mathématique, dit rigueur - d'où le second impératif en contradiction avec le premier : la nécessité d'une présentation précise et rigoureuse de définitions et de théorèmes mettant en jeu l'infini. Cette présentation est la plupart du temps trop difficile, trop abstraite pour la majorité des élèves du lycée et ne peut donc être donnée telle quelle. Pour prendre un exemple précis : l'élève a une certaine intuition du concept de vitesse instantanée ; mais s'il demande la définition mathématique le professeur peut-il lui répondre autre chose que ceci :

soit f(t) la distance parcourue en km au bout d'un temps t. Alors dire que à l'instant t_0 la vitesse est de 100km/h. signifie :

$$\forall \varepsilon>0, \exists \eta>0, |t-t_0|<\eta \Rightarrow \left|\frac{f(t)-f(t_0)}{t-t_0} - 100\right| < \varepsilon$$

La méconnaissance du 1er impératif fit échouer les introductions prématurées et formelles, sans préparation, des notions de limite, de continuité, de différentielle etc... dans les année 60-70.

Au contraire sa prise en compte n'est certainement pas étrangère aux inflexions apportées depuis 1985. Mais cette prise de conscience ne supprime pas la difficulté liée au second impératif : la nécessité pour toute activité mathématique d'être précise et rigoureuse. Comment sortir d'une telle impasse?

3. La solution adoptée aujourd'hui : l'abandon du sens.

Il me semble que la solution adoptée aujourd'hui, c'est l'abandon de toute définition et de toute démonstration impliquant d'une façon ou d'une autre l'infini en mathématique. Cela commence au collège. Dans les manuels des années 50-60 on trouvait des démonstrations ou des esquisses de démonstrations du théorème de Thalès ou de la formule de l'aire du rectangle. Une fois ceci mis en place, on démontrait des choses comme le fait que y=ax+b est représenté par une droite et en 2de que, si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont deux vecteurs, $\lambda(\vec{u}+\vec{v})=\lambda\vec{u}+\lambda\vec{v}$. Je crois que vous auriez du mal aujourd'hui à trouver de telles démonstrations dans les livres de collège ou de lycée. On ne dit même plus : il faudrait démontrer que ou, on admettra que - Non, on affirme:

"Les nombres a, b, c étant donnés,

L'ensemble des points M(x,y) tels que y=ax+b est une droite sécante à Oy.

L'ensemble des points M(x,y) tels que x=c est une droite parallèle à Oy.

Pour tout $\vec{u}$, $\vec{v}$ on a $\lambda(\vec{u}+\vec{v})=\lambda\vec{u}+\lambda\vec{v}$."

Au point qu'il vous arrive aujourd'hui de devoir discuter pendant un bon moment avec des jeunes collègues pour les convaincre que ces propriétés élémentaires nécessitent effectivement une démonstration et que celle-ci est difficile parce-qu'elle met en jeu l'infini. Comment par exemple démontrer la formule de l'aire d'un rectangle, lorsque les côtés sont incommensurables? Pour eux, elles sont devenues des vérités innées et a fortiori elles le sont pour les élèves. Or les programmes ne manquent pas de répéter qu'il faut *"Entraîner les élèves à la pratique d'une démarche scientifique, en développant conjointement les capacités d'expérimentation et de raisonnement, d'imagination et d'analyse critique."*

En fait, l'analyse enseignée se limite à la mise en place d'un certain nombre d'outils uniquement calculatoires et graphiques dont la vérité et la pertinence sont toujours affirmées mais jamais démontrées, jamais justifiées.

L'avantage de cette façon de procéder est qu'elle conserve l'illusion d'une certaine rigueur : on pose des objets avec leurs propriétés : fonctions, vecteurs, points, droites, ... On demande d'admettre un certain nombre de règles de calcul et de résultats à leur sujet. Le travail de l'élève consiste alors uniquement à bien appliquer ces règles sans se poser la moindre question sur le sens de ces objets et de ces règles. L'ennui c'est que l'élève ne sait plus reconnaître dans les situations concrètes les modèles mathématiques. Comment peut-il faire le lien entre par exemple

- un phénomène exponentiel et la fonction du même nom?
- une aire, un moment d'inertie, une valeur moyenne et l'intégrale telle qu'elle lui a été présentée?

Ainsi la contradiction entre l'intuition de l'élève et une gestion rigoureuse de l'infini est levée par l'abandon du sens. Refuser d'affronter l'infini étroitement impliqué dans des questions comme le théorème de Thalès, les irrationnels, la notion de limite etc..., c'est refuser de se poser les questions : qu'est ce qu'un nombre? Le continu? Une droite? Une aire? Un volume? C'est faire des mathématiques une activité uniquement formelle où le calcul remplace le raisonnement qui est articulation du sens.

Il y a une expression tout à fait significative chez l'élève, qui reflète bien cet abandon du sens : c'est l'expression *"avoir le droit de". "On n'a pas le droit de diviser par 0 - a-t-on le droit de simplifier? On a le droit de dériver une série terme à terme sous telle ou telle condition."*

Comme les objets mathématiques ne sont pas régis par le sens mais uniquement par des règles, l'élève remplace très naturellement une attitude de pensée, de discernement du vrai et du faux, par une attitude de respect par rapport à des règles qui sont alors l'expression d'un certain droit au sens juridique.

Pour le professeur, adopter cette attitude juridique peut présenter des avantages : s'exerçant en termes de droit, elle relèverait du *"surveiller et punir"*. Au contraire, poser la question du sens met d'une certaine façon le professeur à égalité avec l'élève, vis à vis de quelque chose qui est extérieur à tous deux, indépendant de tous les deux : le sens.

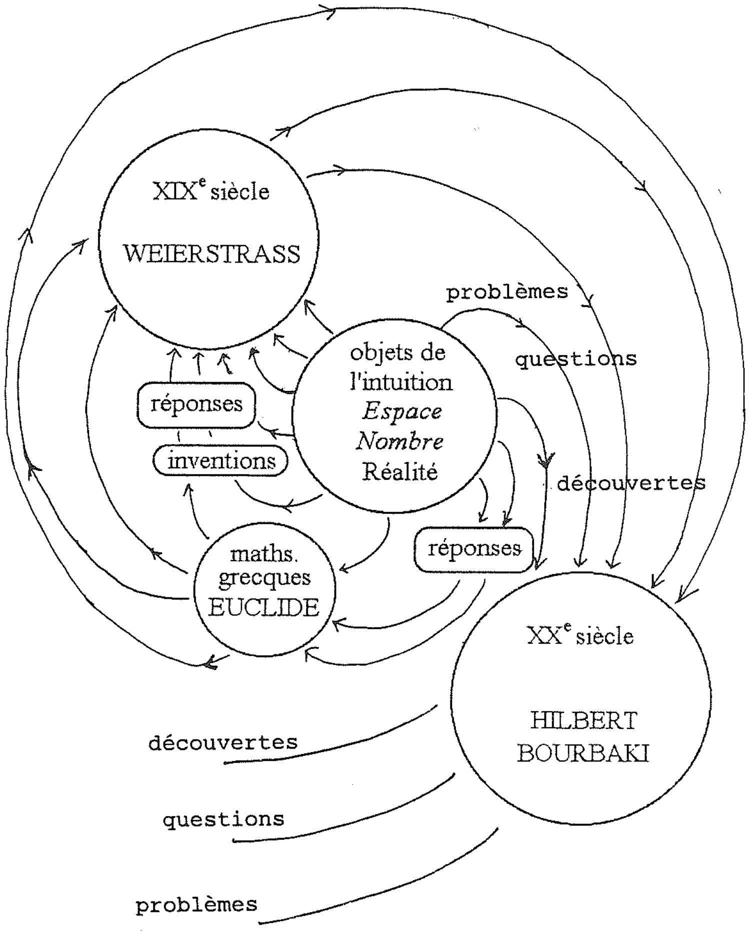
Au total, l'enseignement des mathématiques me paraît rester prisonnier d'un schéma trop rigide, d'une vision trop statique de ce que sont les mathématiques ; quelque chose comme la caricature suivante :

	mathématiques des chercheurs
sens et rigueur	mathématiques enseignées à l'Université
sens ?	ce qu'on peut enseigner au lycée
rigueur ?	ce qu'on peut enseigner au collège
	ce qu'on peut enseigner au primaire

Dans un tel schéma, seule l'Université semble être en mesure d'enseigner des mathématiques qui à la fois ont un sens et sont rigoureuses. Auparavant, ou bien l'on est obligé de sacrifier la rigueur (particulièrement pour les questions qui mettent en jeu l'infini) ou bien l'on sacrifie le sens (pour permettre un calcul rigoureux mais qui du coup reste formel).

4. Une autre solution : assumer la contradiction en situant les mathématiques et leur enseignement dans l'histoire.

Personnellement, je préfère voir les mathématiques dans l'histoire, selon un autre schéma, moins rigide, plus perturbé certes, mais vivant et en mouvement, comme celui-ci.



Dans ce schéma il y a d'abord un **donné**, une **réalité extérieure** qui fournit des objets à notre intuition : essentiellement **l'espace et le nombre**.

Ces objets suscitent des **problèmes**, par exemple ceux de la comparaison et de la mesure des grandeurs. Ils soulèvent des **questions**, et quelquefois amènent à des **découvertes** imprévues (par exemple la découverte qu'il existe des grandeurs incommensurables).

Ces problèmes, ces questions trouvent des réponses qui sont organisées à un moment donné en une **théorie mathématique**. Celle-ci codifie le discours mathématique et impose un modèle de rigueur, par exemple le modèle euclidien. L'enseignement joue souvent un rôle important dans cette organisation rigoureuse du savoir, car l'enseignement a besoin de pôles de stabilité. Il n'en demeure pas moins que ce modèle de rigueur ne répond pas à toutes les questions, ne résoud pas tous les problèmes. Par ailleurs, il peut être assailli par de nouvelles questions, de nouveaux problèmes, de nouvelles découvertes ou inventions qui peuvent à un moment donné déstabiliser complètement le modèle, au point de nécessiter la construction d'un nouveau modèle. Voici deux exemples.

Premier exemple : l'invention du calcul infinitésimal

L'invention du calcul infinitésimal au 17ème siècle développe des idées et des méthodes extrêmement efficaces, mais totalement étrangères, voire contradictoires au modèle euclidien. On peut s'en rendre compte à la lecture de la question suivante, posée en 1784 par l'Académie de Berlin, pour un prix mis à concours :

> *"La classe de Mathématique propose la question pour le Prix qui sera décerné en 1786.*
>
> *L'utilité qu'on retire des Mathématiques, l'estime qu'on a pour elles, et l'honorable dénomination de* Sciences exactes *par excellence qu'on leur donne à juste titre, sont dues à la clarté de leurs principes, à la rigueur de leurs démonstrations, et à la précision de leurs théorèmes.*
>
> *Pour assurer à cette belle partie de nos connaissances la continuation de ces précieux avantages, on demande **une théorie claire et précise de ce qu'on appelle Infini en Mathématique**.*

On sait que la haute Géométrie fait un usage continuel des infiniment grands et des infiniment petits. Cependant les Géomètres, et même les Analystes anciens, ont évité soigneusement tout ce qui approche de l'infini ; et de grands Analystes modernes avouent que les ***termes grandeur infinie*** *sont contradictoires.*

L'académie souhaite donc qu'on explique comment on a déduit tant de théorèmes vrais d'une supposition contradictoire, et qu'on indique un principe sûr, clair, en un mot vraiment mathématique, propre à être substitué à l'Infini, sans rendre trop difficiles, ou trop longues, les recherches qu'on expédie par ce moyen. On exige que cette matière soit traitée avec toute la généralité, et avec toute la rigueur, la clarté et la simplicité possibles".

Le 19ème siècle avec Cauchy, Abel, Bolzano, Weierstraß réussit à mettre en place une telle théorie claire et précise.

Deuxième exemple : le modèle de Weierstraß

Mais le modèle de Weierstraß fut incapable d'empêcher quelques décennies plus tard l'apparition des paradoxes surgis de la théorie des ensembles de Cantor. Presque 150 ans après la question de l'Académie de Berlin en 1925 Hilbert est amené à reposer le même problème, en des termes dont la similitude avec ceux du texte précédent ne peut que nous frapper :

"Il faut admettre que la situation dans laquelle nous nous trouvons présentement en regard des paradoxes ne peut-être supportée plus longtemps. Pensez donc, en mathématiques, ce modèle de certitude et de vérité, les formations des concepts et les raisonnements tels que tout un chacun les enseigne, les apprend ou les applique, conduisent à des absurdités. Et où pourra-t-on trouver ailleurs certitude et vérité, si même la pensée mathématique est défaillante?

Mais il existe un chemin totalement satisfaisant pour échapper aux paradoxes, sans trahir notre science. Les points de vue pour trouver ce chemin et les souhaits qui nous en indiquent la direction sont ceux-ci :

1. Nous voulons scruter soigneusement la formation des concepts et les raisonnements fertiles, si faibles que soient les perspectives qu'ils nous offrent, et les cultiver, les consolider, les rendre efficaces. Du paradis que Cantor a créé pour nous, nul ne doit pouvoir nous chasser.

2. Il est nécessaire de mettre en place d'un bout à l'autre du raisonnement la même certitude que celle qui règne dans la théorie ordinaire et élémentaire des nombres de laquelle personne ne doute et où contradictions et paradoxes ne surgissent qu'à cause de notre inattention.

Ils ne nous est manifestement possible d'atteindre ce but que si nous réussissons à éclaircir totalement ***"la nature de l'infini""*** (Wesen des Unendlichen)

Comme vous pouvez le constater, à chaque fois c'est l'infini, ce sont les questions posées par l'infini, qui sont à la base même de l'évolution des modèles de rigueur, des espaces de sens, qui sont le moteur même de l'histoire des mathématiques.

Insérer les mathématiques et leur enseignement dans l'histoire c'est alors accepter l'idée qu'il n'y a pas un modèle absolu de rigueur, c'est comprendre que celle-ci est solidaire d'un approfondissement du sens.

5. Le point d'achoppement : la liaison entre le continu spatial et le continu numérique.

Cet infini est présent aussi bien dans l'intuition de l'espace que dans celle du nombre, mais une des évolutions principales qui se soit produite au cours de l'histoire porte sur la relation entre les deux, sur l'idée que l'on se fait de la relation entre géométrie et nombre. Les grecs distinguaient soigneusement les nombres des grandeurs géométriques ; pour eux ce n'étaient pas des entités de même nature. En créant la géométrie analytique, en proposant de repérer l'espace par des coordonnées numériques, Descartes a identifié le continu spatial et le continu numérique. C'est cette identification qui sous-tend l'identification entre une droite et l'ensemble des points d'équation y=ax+b. C'est elle qui certainement peut justifier les recommandations des programmes de *"développer une vision géométrique des problèmes, notamment en analyse"*. Mais je ne suis pas sûr qu'elle soit toujours bien consciente et comprise, si j'en juge par certaines réflexions d'élèves ou même de professeurs stagiaires.

Ainsi, lors d'un récent stage, on me demande : *"étant donnés deux segments BD et BC, peut-on construire un segment BE égal au produit BD.BC ?"*

Je lui donne la solution qu'expose Descartes au début de sa *"Géométrie"* et justifiée par l'égalité $\frac{BE}{BD} = \frac{BC}{BA}$ d'où BE=BD×BC si BA est pris pour unité (figure 1)

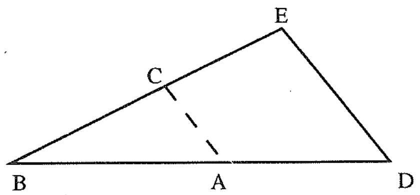


Figure 1

Mon collègue n'est pas satisfait : il voudrait une construction sans recours à une unité, comme cela se fait avec la construction d'une longueur AD égale à $\sqrt{AB.AC}$ (figure 2)

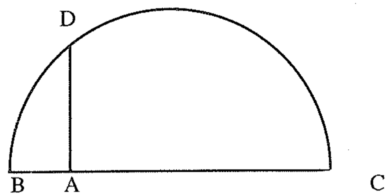


Figure 2

Je lui explique que cela n'est pas possible : dans le deuxième cas, il s'agit de la construction d'une moyenne proportionnelle AD, vérifiant $\frac{AB}{AD} = \frac{AD}{AC}$ qui ne dépend nullement de l'unité de longueur choisie, et qui a une existence géométrique indépendante de toute mesure. Par contre dans le premier exemple, il s'agit d'exprimer l'aire d'un rectangle, qui dépend forcément de l'unité de longueur choisie.

Les géomètres grecs évitaient ce genre de difficulté en ne considérant des égalités qu'entre grandeurs homogènes, de même dimension.

Ce type de questions révèle bien une mauvaise assimilation de cette identification entre le géométrique et le numérique. Cette identification s'est accompagnée d'une perte de sens remplacé par un jeu formel de calcul sur des lettres. Il n'en a pas toujours été ainsi, et

je voudrais montrer dans quelles conditions le numérique s'est imposé peu à peu et a supplanté le géométrique dans l'analyse, jusqu'à oublier totalement ses origines géométriques.

6. La rigueur comme correction radicale de l'intuition.

Au 17ème et 18ème siècle l'analyse c'est l'étude des grandeurs géométriques au moyen de l'algèbre. Voici la définition que donne l'Encyclopédie Méthodique de D'Alembert du mot *Analyse*.

> *"**Analyse** est proprement la méthode de résoudre les problèmes mathématiques en les réduisant à des équations. L'analyse pour résoudre tous les problèmes, emploie le secours de l'Algèbre ou calcul des grandeurs en général : aussi ces deux mots : Analyse-Algèbre sont souvent regardés comme synonymes."* (cela rejoint le fait évoqué au début de cet article sur la place de l'analyse incluse dans l'Algèbre jusqu'en 1961).

Mais alors que les géomètres grecs s'appuyaient sur l'intuition de l'espace physique, les savant du 17ème et 18ème siècle s'appuyaient sur ce qu'ils appelaient les lois de la nature, lois qu'ils cherchaient à dégager et à décrire. Ce qui par exemple fait la gloire d'un Newton ce ne sont pas les résultats mathématiques en tant que tels mais le fait qu'il ait su donner *"les principes mathématiques de la philosophie naturelle"*. Et, aussi profonde que peuvent être leurs divergences quant à la *"Philosophie de la Nature"*, Newton et Leibniz s'accordent pour penser celle-ci dans le contexte théologique de la **Création**. Cette création est régie par des lois ou principes immuables, que le savant s'applique à découvrir. C'est donc la physique, (philosophie naturelle) qui pose les questions clefs à l'analyse, particulièrement à travers l'astronomie et la mécanique. C'est elle qui va déplacer l'objet des recherches longtemps centrées sur la géométrie, vers l'analyse infinitésimale, c'est à dire vers l'étude des fonctions. Celle-ci va rapidement prendre la place centrale de l'activité des géomètres en faisant le lien entre les trois aspects solidaires du phénomène physique.

1er aspect

- celle d'une relation réciproque entre deux variables (ou groupes de variables) qui **légifère** un phénomène donné, par exemple le mouvement des planètes. La fonction exprime la **loi** de ce mouvement. Ces fonctions sont forcément continues - car *"la nature ne fait pas de sauts"*.

2ème aspect

- celle d'un lieu géométrique, c'est à dire la courbe qui visualise la loi : c'est la loi qui fait naître (natura) la coube.

3ème aspect

- le polynôme éventuellement infini qui permet le calcul des valeurs numériques de la fonction.

Il y avait en effet un problème à résoudre : c'est que la plupart des lois s'exprimaient par des fonctions échappant *a priori* à l'algèbre, et que Leibniz qualifiera de **transcendantes** : fonction circulaires, logarithmes, exponentielles... Comment calculer ces fonctions avec les seules opérations dont dispose le calculateur : addition, soustraction, multiplication, division, extractions de racines, les seules pour lesquelles il possède un algorithme?

Voici comment Newton résout ce problème, en développant ce qu'il appelle une **Arithmétique universelle** : l'idée principale est la suivante

- de même que tous les nombres, qu'ils soient rationnels ou irrationnels peuvent s'écrire uniquement à l'aide des nombres entiers par leur développement décimal (celui-ci pouvant être fini ou infini). De même toute fonction peut s'écrire uniquement à l'aide d'un polynôme généralisé en une série (suite) de puissances de x (pas nécessairement positives).

> *"Comme les fractions décimales ont l'avantage de transformer en quelque façon toutes les fractions ordinaires et tous les radicaux en nombres entiers, de sorte que lorsque ces fractions et ces nombres sourds sont réduits en Décimales, ils peuvent être traités comme des Nombres entiers, de même les suites infinies ont l'avantage de réduire à la classe des quantités simples, toutes les espèces de Termes compliqués, tels que les fractions () les racines et d'autres semblables."* (Newton, *la méthode des fluxions et des suites infinies*).

L'exemple le plus typique en est la formule du binôme de Newton justement, qui va bientôt devenir le pivot même du nouveau calcul, dans la détermination des séries nécessaires pour le calcul des fonctions.

Exemple : le développement de sinx en série entière par Euler.

En voici les étapes principales

$$\sin(nz)=\frac{(\cos z+\sqrt{-1}\sin z)^n-(\cos z-\sqrt{-1}\sin z)^n}{2\sqrt{-1}}$$

$$\sin(nz)=\frac{n}{1}(\cos z)^{n-1}\sin z-\frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3}(\cos z)^{n-3}(\sin z)^3+\ldots$$

Soit z un infiniment petit. Alors sinz=z et cosz=1

Soit n un infiniment grand, pour que nz=v soit fini : alors

$$\sin v = v-\frac{n}{1}\cdot\frac{n-1}{2}\cdot\frac{n-2}{3}\cdot\frac{v^3}{n^3}+\ldots \text{ mais } \frac{n-1}{2n}=\frac{1}{2};\frac{n-2}{3n}=\frac{1}{3}$$

car n infiniment grand

Donc

$$\sin v = v-\frac{v^3}{3!}+\frac{v^5}{5!}\ldots$$

Par ailleurs si P(x) est un polynôme de terme constant égal à 1, alors l'opposé du coefficient du terme linéaire est égal à la somme des inverses des racines.

Par exemple $(x-a)(x-b)=0$ ou $x^2-(a+b)x+ab=0$

peut s'écrire $\frac{1}{ab}x^2-\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)x+1=0$

Or les racines de $\frac{\sin x}{x}=1-\frac{x^2}{6}+\frac{x^4}{120}\ldots$ sont $x=k\pi$ ($k\in \mathbf{Z}^*$)

posons $x^2=u$ les racines de $1-\frac{u}{6}+\frac{x^2}{120}\ldots$ sont $k^2\pi^2$ d'où

$$\sum_{k\geq 1}\frac{1}{k^2\pi^2}=\frac{1}{6} \text{ ou } \sum_{k\geq 1}\frac{1}{k^2}=\frac{\pi^2}{6}$$

Des calculs de ce type, on en trouve des centaines de pages chez Euler, pour qui ils ne faisaient pas l'ombre d'une doute (*"c'est clair comme le jour à midi"* - aimait-il à le dire) et effectivement **ils sont**

exacts. Pourquoi alors nous mettent-ils mal à l'aise? Pourquoi les considérons nous comme **non rigoureux**? Ils sont soutenus par deux attitudes : 1. une intuition très sûre de l'infini, 2. une croyance très forte en la puissance du symbole.

Ce qui caractérise Euler comme ses contemporains, c'est qu'il semble surtout préoccupé de développer toutes les ressources de ce nouveau calcul, de multiplier les découvertes et les résultats, plutôt que de passer son temps à en justifier les méthodes. Bien plus, il est douteux qu'ils auraient pu arriver à ces résultats, s'ils avaient été contraints de les passer au crible de nos critères de rigueur. Par ailleurs ces calculs manifestent une foi extraordinaire en la puissance du symbolisme et à son caractère indubitable, et les résultats nombreux qu'il fournissait ne pouvait que renforcer leur conviction. C'est pourtant de ce côté là que viendront les premiers problèmes sérieux. Pour Euler par exemple l'égalité

$$\frac{1}{1+x}=1-x+x^2-x^3+x^4...\text{etc}...$$

a un sens quelle que soit la valeur donnée à x car l'écriture $1-x+x^2-x^3+x^4...$etc n'est qu'une autre écriture de la fonction $\frac{1}{1+x}$ et

> *"elle peut être utilisée dans des opérations mathématiques comme équivalente à cette expression, même pour des valeurs de la variable pour lesquelles la série diverge"* [Euler ;*Opera Omnia : De Seriebus Divergentibus*].

Nicolas Bernoulli lui objectera bien que la même série pourrait découler du développement de deux fonctions différentes. Euler ne le croit pas : *"Bernoulli ne donne pas d'exemples et je ne crois pas possible que la même série puisse venir de deux expressions algébriques vraiment différentes."* (Fuss Corresp. 2, 701).

C'est Cauchy qui donnera les exemples lorsqu'il remarquera que les fonctions $e^{\frac{-1}{x^2}}$ ou $e^{\frac{-1}{\sin^2 x}}$ ont un développement en série de Mac Laurin réduit à zéro et que donc par exemple e^{-x^2} et $e^{-x^2}+e^{\frac{-1}{x^2}}$ ont le même développement en série convergente.

Mais d'autres raisons ont poussé les mathématiciens à se préoccuper de la mise en place de nouveaux critères de rigueur.

Tant que l'intuition était capable d'appréhender de façon suffisamment sûre les objets du calcul - comme cela apparaît nettement chez Euler - les risques d'erreur étaient minimes, et de fait, il y a étonnement peu d'erreurs de calcul au 18ème siècle. Mais les développements même de l'analyse conduisent les mathématiciens à construire des objets de plus en plus inaccessibles à l'intuition : fonctions de variables complexes, de plusieurs variables. Les nouvelles recherches en physique : équation des cordes vibrantes, théorie de la chaleur, aussi bien que les développements liés à la dynamique interne des mathématiques vont inverser le point de vue. Au lieu que la série découle d'une fonction, ce seront de plus en plus fréquemment des séries qui définiront les fonctions.

Par exemple, durant tout le 18ème siècle des dizaines de démonstrations de la formule du binôme se sont succédées sans jamais convaincre. Pour en venir à bout il faudra que l'on inverse le problème, en considérant la fonction φ définie par la série

$$\varphi(m)=1+\frac{m}{1!}x+\frac{m(m-1)}{2!}x^2+...$$

Montrant que φ vérifie φ(m+m')=φ(m)φ(m') Cauchy est amené à mettre en évidence l'importance du concept de fonction continue. Cauchy, Abel et bien d'autres insisterons sur la nécessité de ne placer la vérité que dans la stricte égalité numérique et à écarter les dérives auxquelles l'utilisation inconsidérée du symbolisme peut entraîner .

> *"Quant aux méthodes, j'ai cherché à leur donner toute la rigueur qu'on exige en géométrie, de manière à ne jamais recourir aux raisons tirées de la généralité de l'algèbre. Les raisons de cette espèce, quoique assez communément admises, surtout dans le passage des séries convergentes aux séries divergentes, et des quantités réelles aux expressions imaginaires, ne peuvent être considérées ce me semble que comme des inductions propres à faire pressentir quelque fois la vérité, mais s'accordent peu avec l'exactitude si vantée des sciences mathématiques."* [CAUCHY Analyse algébrique].

Il se limitera donc strictement aux égalités entre quantités réelles. Mais cette égalité numérique stricte portant sur des séries donc des sommes infinies, seul un calcul par inégalités pouvait la justifier. L'égalité entre des nombres inaccessibles est remplacées par l'équivalence suivante de l'analyse :

"X=Y si et seulement si $\forall\varepsilon>0\ |X-Y|<\varepsilon$*."*

Weierstraß reformulera toutes les définitions de l'analyse au moyen de séquences du type$\forall\varepsilon>0\ \exists\alpha$...etc... Ce faisant il ouvre la porte à toute une série de monstres mathématiques, totalement coupés de l'intuition comme

fonctions continues sur un intervalle, nulle part dérivables.
fonctions continues mais non monotones sur aucune intervalle.

Mais quel est encore le sens d'une phrase comme :

"*la fonction* $f(x)=\sum_{n=0}^{\infty} b^n \cos(a^n \pi x)$ *avec* $b = \frac{1}{4}$, $a = 19$
est partout continue, nulle part dérivable?"

Y-a-t-il autre chose qu'une conformité formelle à des relations numériques du type

$$\forall x_0 \in \mathbf{R}\ \forall\varepsilon>0,\ \exists\eta>0,\ |x-x_0|<\eta \Rightarrow |f(x)-f(x_0)|<\varepsilon$$

et $$\forall x_0 \in \mathbf{R}\ \forall l \in \mathbf{R}\ \exists\varepsilon_1>0,\ \forall\eta>0,\ |x-x_0|<\eta \Rightarrow \left|\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} - l\right|>\varepsilon_1$$

Pourquoi trouvons nous cet exemple paradoxal? Parce qu'il est coupé de l'intuition géométrique. Il n'a plus qu'un sens formel numérique, sans aucune représentation à l'intuition.

Ce qui fait dire à Hilbert que bien que Weierstraß ait ainsi réalisé un fondement remarquablement rigoureux du calcul infinitésimal, il n'en a pas pour autant clos la discussion sur les fondements de l'analyse.

"La raison en est que la signification de l'infini pour les mathématiciens n'est pas encore éclaircie totalement. Certes l'infiniment petit et l'infiniment grand sont éliminés dans l'analyse de Weierstraß, dans la mesure où ces expressions sont ramenées à des relations entre grandeurs numériques infinies qui définissent les réels, et plus loin encore dans le concept même du système des réels, lequel est ainsi conçu comme un ensemble existant de façon achevée et complète.

Les formules du raisonnement logique, dans lesquelles s'expriment cette conception : notamment lorsqu'on s'occupe par exemple de ***tous*** *les réels ayant une certaine propriété, ou qu'il* ***existe*** *un réel ayant une certaine propriété, ces formules sont utilisées sans restriction, et continuellement appliquées."*

7. En conclusion

Le nœud des difficultés pour l'enseignement de l'analyse est d'abord dans une contradiction : celle d'une analyse qui gère uniquement le continu numérique, alors que l'intuition de l'élève s'appuie d'abord et longtemps sur la perception d'un continu géométrique. Il me semble que c'est une erreur pédagogique de notre enseignement de ne plus explorer autre chose que le continu numérique, en court-circuitant l'exploration du continu géométrique et spatial, présent dans les formules de mesure des grandeurs, ou dans le théorème de Thalès.

Si l'on veut effectivement donner un contenu intuitif et concret aux objets mathématiques, si l'on veut développer une vision géométrique des problèmes notamment en analyse, est-il judicieux de faire l'économie de l'exploration du continu spatial ? N'est ce pas lui qui donne sens et réalité aux irrationnels ? N'est ce pas la mesure des grandeurs qui peu à peu a construit les réels?

Ce rapide survol de quelques épisodes de l'histoire de l'analyse du 17ème siècle jusqu'au début du 20ème siècle nous montre assez combien les raisons internes aux mathématiques qui ont façonné la rigueur exigée en analyse, dépassent de très loin les questions que l'on peut exposer à nos lycéens, et je crois qu'il est important pour un professeur d'en être conscient. Cela ne résoud évidemment pas le problème posé par les questions : que faut-il enseigner, comment faut-il enseigner, sachant l'importance des calculatrices et des ordinateurs?

Du moins l'introduction d'une perspective historique dans l'enseignement des mathématiques nous permettrait :

- de voir fonctionner des espaces de sens plus proches de l'intuition de l'élève, tout en étant perçus comme rigoureux

- ménager des étapes dans la construction des concepts et des outils fondamentaux de l'analyse.

- de comprendre la relativité des notions de sens et de rigueur, ainsi que leur caractère solidaire. C'est ce qu'écrit Hermite à son ami Mittag-Leffer

"Je crois (...) qu'il ne serait point sans péril d'exposer d'emblée à des commençants ces mathématiques

nouvelles, si incontestablement meilleures et plus rigoureuses que les anciennes. Mon sentiment est qu'il faut d'abord préparer à ces nouvelles théories, et suivre l'ancienne route, en montrant soit des erreurs, soit des insuffisances des démonstrations restées longtemps inaperçues, et annonçant que d'autres méthodes les feront disparaître. Et la raison est que quelque chose du développement historique de la science doit se trouver dans l'enseignement. Je m'explique. C'est un fait d'expérience absolument certain, que l'erreur a été bien souvent plus utile que des vérités parfaites, pour la marche de l'esprit et le progrès de la science. N'a -t-on pas été bien heureux jusqu'ici d'avoir cru à tort, que toute fonction continue admet une dérivée, que toute équation différentielle admet une solution, et plus anciennement que toute fonction est développable par la formule de Mac Laurin ? J'en tire peut-être en me trompant, la conclusion que l'appareil si complexe de la rigueur moderne, et le caractère abstrait qu'elle revêt, peut n'être absolument pas profitable pour des commençants, ou du moins qu'il est utile de reléguer à la fin, en le réservant pour le couronnement de l'édifice, cette rigueur, qui n'est point toujours suffisamment instructive."

Bibliographie

J. Harthong et G. Reeb : *Intuitionnisme 84* dans *"La mathématique non standard"* ; Éditions du CNRS 1989.

D. Hilbert : *"Über das Unendliche"* Mathematische Annalen 95 - 1926.

J.M. Salanskis : *"L'analyse non standard et la tradition de l'infini"* Revue d'Histoire des Sciences XLI/2 1988.

J. Grabiner : *"Is mathematical truth time-dependant?"* American Mathematical Monthly 81-1974.

Bkouche - Charlot - Rouche : *"Faire des mathématiques : le plaisir du sens"* Armand Colin 1991.

Prenons la tangente avant de dériver

Patrick Perrin
IREM de Reims

Le groupe Histoire des Mathématiques de l'IREM de Reims a entrepris depuis plusieurs années un travail sur l'introduction du calcul infinitésimal dans les classes de lycée. Une recherche de documents historiques portant sur l'origine du calcul différentiel, une réflexion sur le concept de tangente chez les élèves et une exploitation en classe de certains des textes retenus en furent les différentes étapes.

Petit historique du problème des tangentes

Commençons par un bref aperçu des différentes conceptions de la notion de tangente à une courbe rencontrées dans l'histoire des mathématiques.

On trouve dans le livre III des Eléments d'Euclide (vers 300 av. J.C.) la définition suivante : "Une droite qui touchant un cercle et qui étant prolongée ne la coupe pas est dite tangente à ce cercle". Cette conception généralisée à d'autres courbes que le cercle se retrouve chez Apollonius (262-192 av. J.C.) dans sa construction des tangentes aux coniques. On la trouve également chez Archimède (287-212 av J.C.) à propos de la tangente à la spirale. Des considérations d'ordre dynamique sont aussi présentes dans l'oeuvre du géomètre de Syracuse, mais elles ne prennent jamais la place d'une preuve géométrique. Rappelons qu'Archimède définit la spirale comme le lieu d'un point qui parcourt avec une vitesse constante une demi-droite, qui elle -même tourne autour de son origine avec une vitesse angulaire constante. Le principal reproche que l'on peut faire à cette conception est qu'elle ne donne pas de méthode pratique de construction de la tangente à une courbe.

Il faudra attendre le XVII siècle pour qu'apparaisse un changement radical de point de vue. Ce sont les travaux de Képler (1571-1630) et de Galilée (1564-1642) qui en sont la cause : le premier en énonçant ses lois sur les trajectoires elliptiques des planètes et le second en posant les bases de la mécanique, vont