(Re)Lectures infinitésimales

André Deledicq
IREM de l'Université Paris VII

L'épistémologie du calcul infinitésimal présente une difficulté très particulière due à l'amplitude du décalage temporel, de l'ordre des siècles, entre d'une part les conceptions en usage dans la communauté des géomètres et des analystes des XVIIème et XVIIIème siècles, et d'autre part l'expression plus ou moins formalisée des invariants mathématiques de ces conceptions, avec l'analyse non standard dans le troisième tiers du XXème siècle.

Le formalisme classique des limites.

Fait exceptionnel dans l'histoire des mathématiques : le formalisme d'abord proposé pour rendre compte avec rigueur de l'intuition et des techniques efficaces du calcul infinitésimal ne traduit qu'une faible part de l'imagerie mentale associée à ce domaine et oblige à l'*exil épistémologique* la part qui semble avoir été pourtant la plus féconde tout en restant la plus immédiate.

Ici, il s'agit du formalisme des limites, dit en epsilon-éta, pressenti par Cauchy et dont l'expression complète est attribuée à Weierstrass, relayé par les analystes allemands, dans les années 1860-1870.

Ce formalisme revient aux sources euclidiennes qui avaient sagement exclu des premiers discours toute référence à l'*infini*.

La proposition I du livre X d'Euclide [11],

> *Deux grandeurs inégales étant proposées, si l'on retranche de la plus grande une partie plus grande que sa moitié, si l'on retranche du reste une partie plus grande que sa moitié, et si l'on fait toujours la même chose, il restera une certaine grandeur qui sera plus petite que la plus petite des grandeurs proposées.*

supporte en effet très bien la traduction en termes classiques :

a et $b < a$ étant donnés, $\exists n \; \frac{a}{2^n} < b$.

On a vu ainsi clairement l'Analyse élémentaire devenir une manipulation raffinée de la relation d'ordre dans $\mathbf{R}$, à l'image du subtil retournement de l'axiome dit d'Archimède, d'essence apparemment arithmétique, en un argument fondamental d'analyse évitant le recours aux infinitésimaux (il faut relire ici la magnifique démonstration de la proposition citée p. 333)

L'infiniment petit fonctionnel.

Parallèlement à l'établissement et au développement de cette analyse qui va devenir classique, la vieille conception d'infiniment petit va donc se trouver objectivement exilée. Cependant et décidément trop commode, elle sera momentanément récupérée dans un autre cadre que le cadre numérique où le *nombre* infiniment petit n'avait jamais réussi à trouver sa place : le cadre fonctionnel.

Ainsi trouve-t-on, dans les *Eléments de calcul infinitésimal - 1860* de Duhamel, l'énoncé de deux "principes de substitution" des infiniments petits [28]

> *Théorème 1 : La limite de la somme de quantités positives infiniment petites n'est pas changée, lorsqu'on remplace ces quantités par d'autres dont les rapports avec elles ont respectivement pour limite l'unité.*
>
> *Théorème 2 : La limite du rapport de deux quantités infiniment petites n'est pas changée quand on remplace ces quantités par d'autres qui ne leur sont pas égales, mais dont les rapports avec elles ont respectivement pour limité l'unité.*

qui témoignent du même souci didactique que Dixmier en 1967 dans son *Cours de mathématiques du premier cycle - Tome 1, p. 227* :

Si $\lim_{x \to a} f(x) = 0$, on dit que $f(x)$ est un infiniment petit quand x tend vers a.

Il s'agit pour ces pédagogues de conserver vivante, dans l'esprit de l'analyste moderne, l'idée d'un infiniment petit qui ne se réduise

pas à une potentialité d'existence mais qui *soit* un véritable objet mathématique.

Et il se sera finalement passé un siècle avant que Abraham Robinson (*Non Standard Analysis* - 1960) puis Edward Nelson (*Internal Set Theory* - 1977) puissent permettre le retour de la notion prodige dans le giron exigeant de la Mère mathématique.

Les concepts non standard.

L'analyse non standard s'appuie à l'évidence sur des conceptions originelles retrouvées : celles qui se reconnaissent dans les expressions **infiniment grands**, **infiniment petits** et leurs nombreux avatars sémantiques. Mais il serait naïf de réduire l'apport conceptuel de l'ANS à cet aspect trop connu ; on ne comprendrait pas alors pourquoi le formalisme non standard est arrivé si tard et, surtout, comment il a réussi à éviter lui aussi le piège de l'infini.

Deux autres notions au moins, jusqu'alors plutôt extérieures aux mathématiques parce que souvent rencontrées dans des situations pragmatiques mieux considérées des physiciens et autres utilisateurs et applicateurs des mathématiques, apparaissent comme des concepts cruciaux de cette Nouvelle (et Simple) Analyse :

- la notion d'**ordre de grandeur** ; il s'agit précisément de la possibilité d'imaginer un $\mathbf{R}_+$ hétérogène se présentant comme un modèle mathématique où coexistent des quantités très petites, des quantités à notre échelle ("appréciables") et des quantités très grandes, et où l'on sait manipuler formellement l'inaccessible flou séparant ces trois ordres de grandeur. (Sur les obstacles à l'installation de ce concept, ses représentations et les invariants qui le structurent, voir [9]).

- la notion de **permanence** ; certainement l'idée la plus essentielle qui ait traversé, dirigé et éclairé le travail solitaire et miraculeusement positif de Robinson. (Voir à ce sujet l'article de Lakatos [5]).

Elle s'explicite par des "principes de permanence" qui prennent acte de l'impossibilité de définir les ordres de grandeur et leurs frontières respectives par des propriétés classiques ; d'où l'affirmation du débordement (et donc de la permanence) nécessaire de ces propriétés au-delà d'un seul ordre de grandeur où elles ne peuvent pas être confinées.

RE-LECTURES.

A ce point de notre réflexion, il nous semble à l'évidence qu'un travail de relecture de textes doit être entrepris. On a toujours en effet recherché, et naturellement retrouvé, dans les textes précédant la formalisation d'un concept, les germes et les anticipations comme aussi les errances et les fausses pistes, qui ont jalonné la construction de ce concept.

Aujourd'hui que les conceptions ont pu se forger et commencer à s'échanger dans la communauté des "non standardistes", n'est-il pas utile et possible de traquer dans la littérature les traces de celles que nous avons explicitées ci-dessus ?

Croit-on, même, qu'il soit raisonnable de *lire* un texte concernant le calcul infinitésimal sans une grille (au moins en partie) non standard ?

Que penserait-on aujourd'hui de quelqu'un qui prétendrait lire l'*Euclides vindicatus* (1733) de Saccheri sans vouloir y repérer les conceptions apparues avec les géométries non euclidiennes ?

Pour l'exposé présent, nous nous limiterons au modeste pointage de la trace de ces conceptions dans quelques textes choisis.

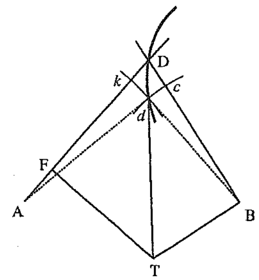
L'existence et la manipulation des infiniment petits.

On sait bien que cette existence fut souvent déniée par ceux mêmes qui les utilisaient. Leibniz lui-même les rangeait au placard des "êtres de raison", imaginables mais non rencontrables [20] :

> *Je ne croyois point qu'il y eût des grandeurs véritablement infinies ni véritablement infinitésimales, que ce n'étaient que des fictions, mais des fictions utiles pour abréger et pour parler universellement, comme les racines imaginaires dans l'Algèbre, telles que* $\sqrt{-1}$.

Par contre, il faut remarquer que Newton les manipulait sans vergogne, d'abord sous le vocable de "moments" infiniment petits temporels, qui pour être imperceptibles n'en sont pas moins évidemment *réels*. L'universalité de la variable temps, comme elle lui avait permis de saisir comme primitive la notion de dérivée (alias la vitesse) lui permet aussi de manipuler sans peur l'infiniment petit existant, même lorsqu'il le fait dans un *cadre* on ne peut plus *géométrique* [18] :

> *XXXIX. Si l'on rapporte la Courbe à deux Soutendentes AD & BD, qui tirées de deux Points donnés A & B se rencontrent sur la Courbe ; imaginez que le Point D parcourt l'Espace infiniment petit Dd, & sur AD & BD prenez Ak=Ad, & Bc= Bd ; kD & cD seront les Moments contemporains des Lignes AD & BD, prenez donc DF à BD comme le Moment Dk au Moment Dc, (c'est-à-dire, dans le Rapport de la Fluxion de la Ligne AD à la Fluxion de la Ligne BD) élevez sur BD & AD les perpendiculaires BT & FT qui se rencontreront au Point T ; les Trapèzes DFTB et Dkdc seront semblables, & par conséquent la Diagonale DT touchera la Courbe.*



Cet exemple décrit parfaitement la manière de mener la tangente à une courbe définie par la relation liant la distance de ses points à deux points fixes donnés ; il est accompagné de huit autres exemples analogues en variant la technique de définition de la courbe dont on cherche la tangente. Outre l'emploi explicite des "**espaces infiniment petits**", on notera la béquille épistémologique dont il se dote pour éviter l'effroi de la toute dernière raison : la mise en évidence de deux figures (*DFTB* et *Dkdc*) appartenant à deux ordres de grandeur différents mais dont le dessin est identique. François de Gandt a reconnu le systématisme de cet artifice newtonien en le qualifiant du joli nom de "méthode des témoins finis". (Voir aussi, pour l'invariance à travers les ordres de grandeur, l'article [3] relatif à la découverte des logarithmes par Neper).

Les premiers essais de régularisation de l'emploi d'infiniment petits dans un *cadre numérique* sont dûs aux efforts de Jean Bernouilli, comme on peut le voir à la lecture de l'*Analyse des infiniment petits* (du Marquis de L'hospital [21]) :

> *I. DEMANDE ou SUPPOSITION*
>
> *On demande qu'on puisse prendre indifféremment l'une pour l'autre deux quantités qui ne diffèrent entr'elles que d'une quantité infiniment petite : ou (ce qui est la même chose) qu'une quantité qui n'est augmentée ou diminuée que d'une autre quantité infiniment moindre qu'elle, puisse être considérée comme demeurant la même.*

Cette demande est ensuite (naturellement) utilisée dans les démonstrations ; par exemple pour

> *prendre la différence d'un produit fait de plusieurs quantités multipliées les unes par les autres.*
> *La différence de xy est ydx+xdy. Car y devient y+dy lorsque x devient x+dx, & partant xy devient alors xy+ydx+xdy+dxdy qui est le produit de x+dx par y+dy, & sa différence sera ydx+xdy+dxdy, c'est-à-dire ydx+xdy : puisque dxdy est une quantité infiniment petite par rapport aux autres termes ydx, & xdy ; car si l'on divise par exemple ydx & dxdy par dx, on trouve d'une part y & de l'autre dy qui en est la différence, & par conséquent infiniment moindre qu'elle. D'où il suit que la différence du produit de deux quantités est égale au produit de la différence de la première de ces quantités par la seconde, plus au produit de la différence de la seconde par la première.*

On pourrait être tenté de voir dans ce passage une paraphrase prémonitoire du calcul de la dérivée du produit xy dans les ouvrages non standard d'aujourd'hui. Il contient pourtant un intéressant errement très explicable à l'époque de Jean Bernouilli mais auquel les didacticiens de l'analyse devraient prêter attention.

La demande Jean Bernouilli est en fait double ; sa première demande pourrait se noter aujourd'hui :

$$x \cong y \Leftrightarrow x - y \cong 0$$

(x est infiniment voisin de y, ssi x-y est infiniment petit).

Mais cette demande ne suffirait pas à conclure dans la démonstration concernant la différence d'un produit ; en effet, d'une part Bernouilli ne prend pas $x + dx$ pour x, ou pour $x + 2dx$, ce que sa demande lui permettrait, mais d'autre part il exécute $dxdy$, non pas parce que la différence $xdy + ydx + dxdy$ moins $xdy + ydx$ est infiniment petite, mais parce que $dxdy$ divisé par dx est infiniment petit alors que ydx divisé par dx ne l'est pas.

C'est en fait la deuxième partie de la demande qui est utile (et qui n'est donc pas comme il le prétend *la même chose* que la première partie). Le quotient joue ici le rôle principal et pourrait se noter aujourd'hui :

$$x \sim x + \varepsilon \Leftrightarrow \frac{\varepsilon}{x} \text{ est infiniment petit } \Leftrightarrow \frac{x+\varepsilon}{x} = 1 + \frac{\varepsilon}{x} \cong 1.$$

Il s'agit une autre circonstance que celle d'être *infiniment proche*, c'est l'*équivalence* : $x \sim y \Leftrightarrow \frac{x}{y} \cong 1.$

On sait bien aujourd'hui que l'équivalence et l'infinie proximité ne sont pas "la même chose" (et je suis heureux d'avoir incité les non standardistes français à distinguer chacune de ces notions par un vocabulaire et des notations spécifiques). On connaît en effet les difficultés pédagogiques rencontrées dans les calculs sur des fractions ou des sommes dont les termes tendent vers zéro. Le mérite d'une présentation non standard est de bien pouvoir séparer ces notions sans compliquer les situations par l'étude de limite de fonctions ; en effet la distinction n'est que de nature algébrique et leur confusion apparaît du même type que celle (qui ne devrait plus exister au niveau des lycées) entre les structures additives et multiplicatives.

Cependant bien sûr Jean Bernouilli ne fait pas exactement cette erreur. Dans le contexte qui est le sien, en effet, les nombres infiniment petits n'existent pas vraiment ; il a donc, en un certain sens, raison d'affirmer que ces deux demandes sont la même chose puisqu'elles ne portent que sur des *quantités*, c'est-à-dire, en termes d'aujourd'hui, sur des *nombres appréciables* (ou, à tout le moins, sur des couples de quantités, définis à un coefficient de proportionnalité près comme il était convenant en ce siècle de virtuosité sur les proportions).

En effet, on démontre sans difficulté :

Si x et y ne sont ni infiniment petits, ni infiniment grands, alors

$$x \cong y \Leftrightarrow x \sim y$$

Par contre :

. Si ε est infiniment petit : $\varepsilon \cong 2\varepsilon$ mais ε n'est pas équivalent à ε.
. Si N est infiniment grand : $N \sim N+1$ mais N n'est pas infiniment proche de $N+1$.

La notion d'ordre de grandeur.

L'association de cette notion à l'analyse est déjà exprimée par Leibniz d'une manière très claire [20] :

> *(...) il faut concevoir, par exemple, (1) le diamètre d'un petit élément d'un grain de sable, (2) le diamètre du grain de sable même, (3) celui du globe de la terre, (4) la distance d'une étoile fixe de nous, (5) la grandeur de tout*

le système des fixes, comme (1) une différentielle du second degré, (2) une différence du premier degré, (3) une ligne ordinaire assignable, (4) une ligne infinie, (5) une ligne infiniment infinie.

Cependant on sait que Leibniz en est resté, sur ce sujet, au plan du commentaire, sans jamais prétendre que l'*infiniment petit* n'était exactement que le *très petit* ; d'ailleurs ni Robinson, ni Nelson ne sont explicitement allés jusque là et c'est certainement dans la famille de ceux qui se réclament en France de Georges Reeb et qui s'intéressent plus particulièrement à l'enseignement, qu'il faut chercher les promoteurs de cette conception éliminant radicalement l'infini au niveau élémentaire. (Voir [6], [7], [9], [10]).

Jusqu'à Lazare Carnot, tous les métaphysiciens du calcul infinitésimal ont voulu considérer les infiniment petits ou grands comme des entités commodes et nécessaires au calcul, mais sans existence réelle. Et Carnot lui-même d'ailleurs, pense pareillement en un certain sens. C'est pourtant le premier qui tentera de raisonner avec deux catégories de quantités pouvant préfigurer les catégories standard/non standard.

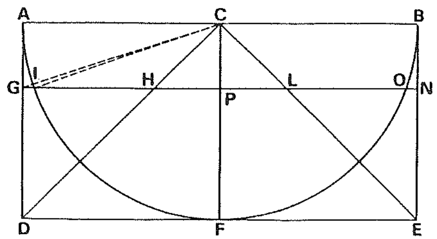
Au point que les analystes non standardistes d'aujourd'hui appellent "Principe de Carnot" la paraphrase des énoncés ci-dessous où les mots standard/non standard sont mis pour non -arbitraires(=désignées)/arbitraires [25].

24. Deux quantités non arbitraires ne peuvent différer entre elles que d'une quantité non arbitraire.
25. Deux quantités non arbitraires sont rigoureusement égales entre elles, du moment que leur différence prétendue peut être supposée aussi petite qu'on le veut.
26. Pour être certain que deux quantités désignées sont rigoureusement égales, il suffit de prouver que leur différence, s'il y en avait une, ne saurait être une quantité désignée.

Les deux exemples précédents sont bien connus. Par contre il nous a semblé reconnaître dans une fausse piste suivie par Galilée ce qui aurait pu être une amorce de considération des ordres de grandeur.

Les paragraphes suivant sont extraits du *Dialogue concernant deux sciences nouvelles* [15].

En outre, cette façon de composer la ligne de points, le divisible d'indivisibles, la quantité de non-quantités, me semble être un écueil des plus difficiles à franchir.
(...)
Aussi vais-je vous montrer que deux surfaces égales et, avec elles, deux solides égaux ayant pour bases ces mêmes surfaces, peuvent continuellement et également diminuer, ceux-ci comme celles-là, tout en laissant des restes toujours égaux entre eux, et en arriver pour finir, au terme de leurs perpétuelles égalités, à ce que l'un des solides et l'une des surfaces se réduisent à une très longue ligne, l'autre solide et l'autre surface à un seul point, autrement dit ceux-là à une infinité de points et ceux-ci à un seul.



Suit ici la remarquable et simple démonstration (Pythagore suffit) de l'égalité des aires du cercle de centre P de rayon PL et de la couronne engendrée par ON tournant autour de CF.

Ainsi Galilée démontre-t-il, de la plus belle manière, comment calculer le volume d'une sphère lorsqu'on sait calculer le volume d'un cône. Mais ce n'est pas cela qui l'intéresse le plus :

(...); il suffit d'avoir vu comment les surfaces ci-dessus définies sont toujours égales entre elles et que, diminuant toujours également, elles vont à la fin se réduire l'une à un seul point, l'autre à la circonférence d'un cercle dont la grandeur pourra surpasser celle du plus grand cercle que l'on voudra : c'est en effet cette seule conséquence qui suscite notre émerveillement.

Ce qui suscite l'émerveillement, et le trouble, de Galilée c'est qu'il soit possible de passer continûment d'un point à un cercle et donc de changer radicalement de forme. Ce trouble est essentiellement dû à la vision des nombres comme un modèle universel ("tout est nombre" : la mesure des objets comme leur forme ou leurs éléments de forme) et homogène : l'accumulation, même énorme, de "pas", même petits, n'aboutit jamais qu'à un résultat de même nature. Et la continuité de la droite réelle étant ainsi transmutée en continuité des formes, l'homogénéité supposée de R est elle aussi transportée sur les formes, ce qui fait dire à Galilée : "le cercle égale le point".

Cependant, comme l'homme de Michel-Ange, il aura touché du doigt une belle aventure intellectuelle : s'il avait en effet décidé de croire à l'hétérogénéité de l'espace des formes, il aurait eu l'image d'un passage continu d'un ordre de grandeur à un autre ; il est en effet possible de passer continûment du petit au grand en faisant des pas aussi petits que l'on veut, pourvu que l'on en fasse un assez grand nombre :

> Si ε est très petit, $N.\varepsilon$. peut dépasser 5 ; il suffit de prendre N plus grand que int($5/\varepsilon$) ; évidemment aucun N appréciable ne permet à $N.\varepsilon$ de dépasser les nombres très petits ; il faut prendre N très grand !

Ainsi l'utilisation de "quantité de non-quantités" permet-elle bien de traverser ce qui ne peut s'interpréter que comme une discontinuité si on croit à l'homogénéité du plan et de la droite (vision classique) mais qui ne contredit pas la continuité si l'on croit à l'hétérogénéité de R en différents ordres de grandeur (vision non standard).

La notion de permanence.

Relecture d'un texte de d'Alembert

Le premier essai de démonstration du théorème fondamental de l'Algèbre est reconnu à d'Alembert, dans ses *Recherches sur le calcul intégral*, parues dans le bulletin de l'*Académie royale des sciences et des belles lettres de Berlin* en 1748 (Année 1746 - p. 182 à 224) [23].

Christian Houzel en a fait une analyse fine et classique, qui tente d'en expliciter les articulations in *Jean d'Alembert, savant et philosophe*, Editions des Archives Contemporaines.

Résumons rapidement ce texte de d'Alembert :

> *Propos. I. Soit TM une courbe quelconque dont les coordonnées TP=z, PM=y, & dans laquelle y=0 ou* ∞ *lorsque z=0. Si on prend z positive ou négative, mais infiniment petite, la valeur de y en z pourra toujours être exprimée par une quantité réelle, lorsque z sera positive ; & lorsque z sera négative, par une quantité réelle, ou par une quantité* $p+q\sqrt{-1}$, *dans laquelle p & q seront l'un & l'autre réels.*
>
> *Car lorsque Z est infiniment petite, on peut avoir la valeur de y en z par cette série très convergente* $y=az^{m/n} + bz^{r/t} + cz^{t/n}$ *& dans laquelle les exposants de z sont imaginés aller en augmentant, & dont on peut toujours supposer que tous les termes sont réels en faisant z positive ;*

Une relation $\varphi(z,y)$ est donc supposée, au voisinage de 0+, explicitable en une fonction y de z.

D'Alembert invoque pour une telle fonction l'existence d'un développement dit plus tard de Puiseux (voir, par exemple, Dieudonné, *Calcul infinitésimal*, Hermann) à droite de zéro. Mais le "principe de permanence" de la validité des opérations algébriques (d'application déjà très féconde pour les négatifs et les complexes) le fait conclure à sa validité à gauche ; le calcul possible des racines chez les complexes lui permet alors de prolonger la relation sur les infiniment petits négatifs.

> *Si* $z^{m/n}$ *devient imaginaire en faisant z négative, ce qui arrivera si n est un nombre pair, et m un nombre impair, alors l'ordonnée correspondante à z négative ou positive pourra encore être exprimée par* $az^{m/n}$ *qui sera réelle, quand z sera positive, & qui se changera pour z négative en* $a(-z)^{\frac{m}{n}}(\sqrt{-1})^{\frac{m}{n}}$. *Or les Géomètres savent que toute quantité* $B\,(\sqrt{-1})^{\frac{m}{n}}$ *peut toujours se réduire à la forme* $p + q\sqrt{-1}$, *p & q étant réels. Donc l'ordonnée imaginaire répondante à z négative pourra être exprimée dans ce cas par* $p + q\sqrt{-1}$.

Après une translation des axes, voici le passage essentiel :

> *. Cor. II. Donc si on augmente l'abscisse AC, d'une quantité finie CQ, au moins jusqu'à un certain terme, l'ordonnée correspondante pourra être supposée =* $p + q\sqrt{-1}$. *Car s'il n'y avoit aucune valeur finie de CQ, telle que* $p + q\sqrt{-1}$ *pût exprimer l'ordonnée correspondante, cette ordonnée ne pourroit pas non plus être exprimée par* $p + q\sqrt{-1}$ *CQ étant infiniment petite. Ce qui est contre le Cor. précédent. D'ailleurs il est visible par les observations qui terminent l'art.2, que la valeur de*

y en z étant infiniment convergente lorsque z est infiniment petite, on peut supposer à z une valeur finie, telle que la valeur correspondante de y soit aussi exprimée par une série très convergente ; & si on imagine que cette série entière composée d'une infinité de termes soit substituée dans l'Equation de la courbe à la place de y, le résultat de la substitution sera infiniment petit ou zéro, soit dans le cas de z positive, soit dans le cas de z négative. Or dans le cas de z négative, la série qui exprime la valeur de y est composée de termes dont chacun est $A + B\sqrt{-1}$*, A & B marquant des quantités réelles. Par conséquent la série entière peut être supposée =* $p + q\sqrt{-1}$*. Il y a donc une valeur finie de z, à laquelle il répond une valeur de y, égale à* $p+q\sqrt{-1}$.

La relation entre z et y est donc prolongeable sur $[a\ ,\ 0]$ (avec $a < 0$).

D'Alembert postule alors (un peu hâtivement pour le cas général qu'il traite, mais valablement dans le cas d'une relation polynomiale) que les a pour lesquels la relation est prolongeable sur $[a\ ,\ 0]$ ont une borne inférieure a pour laquelle la relation est (aussi) prolongeable sur $[a\ ,\ 0]$.

. Cor. III. Je dis maintenant que, quelle que soit la quantité finie CQ dont on augmente l'abscisse AC, l'ordonnée imaginaire correspondante pourra toujours être supposée égale à $p + q\sqrt{-1}$*. Car supposons pour un moment qu'on ne puisse pas donner une telle valeur à l'ordonnée, & que CO soit la plus grande valeur de CQ, qui donne l'ordonnée correspondante égale à* $p + q\sqrt{-1}$*, c.à.d. que* α *ou CO soit la plus grande valeur de CQ qui donne p & q réels, il est évident (art. 2.3.4.) qu'en augmentant* α *d'une quantité infiniment petite, la valeur correspondante de p pourra être supposée* $t + i\sqrt{-1}$*, & celle de* $q = b + \delta\sqrt{-1}$*, les nombres t, i, b,* δ*, étant réels.*

Reprenant alors l'argument précédent, il peut prolonger la validité de la relation encore au-delà de a et donc sur $\mathbb{R}$ tout entier.

Finalement la relation $\varphi(z,y) = 0$, dans le cas polynomial où $z = y^m + ay^{m-1} + by^{m-2} + ... + fy + g$, peut être inversée pour tout z de $\mathbb{R}$ et, en particulier, il existe un y réel ou complexe annulant le polynôme.

. Propos. II. Soit un multinome quelconque $y^m+ay^{m-1}+by^{m-2}...+fy+g$*, tel qu'il n'y ait aucune quantité réelle qui étant substituée à la place de y, y fasse évanouir tous les termes, je dis qu'il y aura toujours une quantité* $p + q\sqrt{-1}$ *à substituer à la place de y, & qui rendra ce multinome égal à zéro.*

(Note : nous avons mis y à la place du x mis par d'Alembert dans l'énoncé de ce dernier théorème).

On peut effectivement transformer la démonstration de d'Alembert en une démonstration juste dont le schéma serait le suivant :

1. Lorsque φ est continue de dérivée continue en (z_0, y_0), la relation $\varphi(z,y) = 0$, vérifiée pour (z_0, y_0) de $\mathbb{R}\times\mathbb{C}$ peut être inversée sur un voisinage ouvert de (z_0, y_0) en au moins une fonction y de z.

2. Lorsque la relation est de la forme $z = P(y)$ où P est un polynôme, l'ensemble des z sur lesquels elle est vérifiée est fermé.

3. L'ensemble des z sur lequel φ peut être inversé est donc à la fois ouvert et fermé. La connexité de $\mathbb{R}$ fait conclure que cet ensemble est $\mathbb{R}$ tout entier et contient donc 0.

Il est passionnant de suivre d'Alembert dans cette démonstration, mais il est non moins étonnant de remarquer que cette démonstration est à peu près exclusivement de nature non standard. Elle utilise en effet successivement...

... les caractérisations non standard des ouverts et des fermés :
Un ensemble ouvert (standard dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{R}^2$) est un ensemble qui contient les éléments infiniment proches de chacun de ses points.
Un ensemble fermé borné (standard dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{R}^2$) est un ensemble qui contient les parties standard de chacun de ses éléments.

... et le "principe de permanence" de Robinson :
Si une propriété standard est vérifiée pour tout infiniment petit, alors elle est vérifiée sur un intervalle $[0,\ a\ ]$ où a est non infiniment petit.

Insistons sur le fait que d'Alembert énonce exactement (comme indiscutable et intuitivement manifeste) ce principe que les analystes non standardistes appellent parfois "principe de Cauchy", qui l'a aussi utilisé explicitement.

Relecture d'un texte d'Euler

Nous terminerons ces quelques relectures par ce qui est certainement le texte le plus surréaliste de l'histoire de l'analyse, celui où Euler fait émerger en quelques lignes, les formules qui porteront son nom [22].

Il démontre d'abord la formule de Moivre, d'où il tire :

$$\textit{133}\ .\ \cos.nz = \frac{(\cos z+\sqrt{-1}\sin z)^n+(\cos z-\sqrt{-1}\sin z)^n}{2}\ \&$$

$$\sin.nz = \frac{(\cos z+\sqrt{-1}\sin z)^n-(\cos z-\sqrt{-1}\sin z)^n}{2v-i}$$

...

138. Supposons encore dans les formules précédentes (art. 133) ***l'arc z infiniment petit, & n un nombre infiniment grand i****, afin d'obtenir pour* ***iz une valeur finie v*** *; nous aurons donc nz = v, & z = v/i, & par conséquent sin.z = v/i, & cos.z = 1 ; ces substitutions faites donneront*

$$\cos.v = \frac{\left(1+\frac{v\sqrt{-1}}{\mathrm{i}}\right)^{\mathrm{i}}+\left(1-\frac{v\sqrt{-1}}{\mathrm{i}}\right)^{\mathrm{i}}}{2}\ \&$$

$$\sin.v = \frac{\left(1+\frac{v\sqrt{-1}}{i}\right)^{i}-\left(1-\frac{v\sqrt{-1}}{i}\right)^{i}}{2\sqrt{-1}}.$$

Or dans le chapitre précédent, nous avons vu que $\left(1+\frac{z}{i}\right)^i = e^2$, *e désignant la base des logarithmes hyperboliques ; ayant donc écrit pour z, d'une part* $+v\sqrt{-1}$ *& d'une autre part* $-v\sqrt{-1}$, *on aura*

$$\cos.v = \frac{e^{+v\sqrt{-1}}+e^{-v\sqrt{-1}}}{2}\ \&\ \sin v = \frac{e^{+v\sqrt{-1}}-e^{-v\sqrt{-1}}}{2\sqrt{-1}}.$$

On comprend par là comment les quantités exponentielles imaginaires se ramènent à des sinus & à des cosinus d'arcs réels. On aura aussi

$$e^{+v\sqrt{-1}} = \cos.v+\sqrt{-1}\ \sin.v,\ \&\ e^{-v\sqrt{-1}} = \cos.v-\sqrt{-1}\sin.v.$$

Il y a deux passages "délicats" dans cette démonstration :

1. les "substitutions" sin $z \sim z$, avec $z = v/i$ infiniment petit, justifié par le fait que v est standard appréciable et i infiniment grand et $\cos z \sim 1$, pour les mêmes raisons.

2. l'égalité $(1 + z/i)^i = e^z$ pour i infiniment grand.

Le passage (2) est facilement justifiable en ANS. En effet pour z standard et i infiniment grand, il est classique d'établir $(1 + z/i\ )^i \cong e^z$.

Si l'on a donc

$$\cos v = \frac{\left(1+\frac{v\sqrt{-1}}{i}\right)^{i}+\left(1-\frac{v\sqrt{-1}}{i}\right)^{i}}{2}$$

alors, $\cos v$ étant limité, les parties standard des deux membres sont égales (c'est le principe de Carnot) et donc $\cos v$ est bien exactement égal à

$$\frac{e^{v\sqrt{-1}}+e^{-v\sqrt{-1}}}{2}.$$

Le passage (1) exige une attention beaucoup plus soutenue. Il s'appuie en effet sur le fait que :

Si $f_n(z) = (\cos z + \sqrt{-1}\sin z)^n$, alors $f_n(z) \cong (1 + \sqrt{-1}z)^n$, pour tout z infiniment petit, d'ailleurs égal à v/n, n étant infiniment grand.

Or ce résultat pourrait aujourd'hui effectivement se démontrer sur le schéma non standard suivant :

D'une part, la fonction $Z \longrightarrow Z^n$ est S-continue pour au moins un n infiniment grand ; la S-continuité de cette fonction n'est pas vérifiée pour tout N infiniment grand mais on peut l'assurer jusqu'à un certain n infiniment grand, par application du "principe de Robinson" (Nous n'explicitons ici ni ce qu'est la S-continuité, ni l'application de ce principe).

D'autre part, pour ce n là, et donc pour un $z = v/n$ infiniment petit, les nombres complexes $\cos z + \sqrt{-1}\sin z$ et $1 + \sqrt{-1}z$ sont infiniment proches et donc leur puissances $n$ième aussi, d'après la S-continuité précédente.

Nous ne prétendons évidemment pas ici qu'Euler ait eu une quelconque idée des difficultés qui pouvaient l'attendre dans une telle démonstration ; mais nous ne pouvons nier qu'il ait eu dans la tête des conceptions suffisamment sûres pour lui permettre d'avoir la conviction que son schéma de raisonnement était correct. Et ces conceptions n'étaient pas simplement celles de nombres infiniment petits et infiniment grands ; nous ne saurons certainement jamais si elles intégraient tout, ou partie, ou plus, des notions d'*ordre de grandeur* et de *permanence*.

BIBLIOGRAPHIE SUR L'ANALYSE NON STANDARD

[1] . Abraham ROBINSON - *Non Standard Analysis* - North Holland, 1966.

[2] . *La mathématique non standard* - Collectif - Editions du CNRS, 1989. (contient la *Théorie des Ensembles Internes* de Edward NELSON, 1977 ; *Was sind und was sollen die Zählhen ?* de Pierre CARTIER ; *Une théorie du continu* de Jacques HARTHONG,...).

[3] . André DELEDICQ - *L'invention des logarithmes : une catalyse du calcul infinitésimal* - A paraître, 1993.

[4] . André DELEDICQ & Marc DIENER - *Le calcul infinitésimal* - Colin 1989.

[5] . Imre LAKATOS - *Cauchy and the continuum : the signifiance of Non Standard Analysis for the History and Philosophy of Mathematics* - paru dans Mathematical Intelligencer, vol. 1, 77-78, 1966.

[6] . Georges REEB - *Mathématiques non standard* - Bulletin APMEP, n°328, avril 1981

[7] . R. LUTZ - *Rêveries infinitésimales* - La gazette des mathématicienes n° 34, octobre 1987.

[8] . André DELEDICQ - *Introduction au i-calcul, pratique de l'analyse non standard* - Quadrature n° 6 et 7, septembre 90 et janvier 91.

[9] . Thérèse ANTOINE, André BEAUMONT, André DELEDICQ, Jean Louis FORGUES, Marc DIENER - *L'analyse au lycée avec le vocabulaire infinitésimal* - IREM de Paris 7, 1991.

[10] . André DELEDICQ - *Cours d'analyse infinitésimale élémentaire (non standard)* - IREM de Paris 7, 1992.

LISTE DES AUTEURS DE TEXTES PRESENTES A L'EXPOSE

[11] . EUDOXE, pour le renversement d'un argument de type arithmétique (dit axiome d'Archimède) en un somptueux premier théorème d'analyse, dans les *Eléments d'Euclide*, livre X (rééd. et trad. Peyrard - Blanchard, 1966).

[12] . ARCHIMEDE, pour sa méthode qui, par un épuisement des cas d'inexistence conclut à la coïncidence de deux objets dont les algorithmes de construction appartiennent à deux cadres différents, dans *La Quadrature de la parabole* (rééd. et trad. Paul Ver Eecke - Blanchard, 1960).

[13] . STEVIN, pour ses essais de justification d'une premier sommation des effets de multiples tranches, dans *La Statique*, 1685 (trad. Albert Girard, 1734 - rééd. ACL Editions, 1987).

[14] . NEPER, pour l'invention d'une fonction qui conserve sa forme quel que soit l'ordre de grandeur auquel on la regarde, dans *Mirifici logarithmorum canonis descriptio...*, 1614 (cité par Charles Naux - *Histoire des logarithmes* - Blanchard, 1966).

[15] . GALILEE et CAVALIERI, pour leur faux-passage à la limite avec des indivisibles qui n'en sont pas, dans *Discorsi e dimostrazioni matematiche intorne a due nuove scienze...*, 1638 (rééd. et trad. Paul Henri Michel - Hermann, 1966).

[16] [17] . FERMAT et GREGOIRE de SAINT VINCENT, pour leur emploi de la progression géométrique comme stéréotype de fragmentation, dans *Sur l'emploi de la progression géométrique pour la quadradutre des paraboles et hyperboles à l'infini*, ~ 1640, et l'*Opus geometricum quadraturae circuli et sectioni coni*, 1630.

[18] . NEWTON, pour son emploi explicite des infiniment petits, l'universalité de la variable temporelle et l'immédiateté conséquente de la dérivée, vue comme une vitesse, dans la *Méthode des fluxions et des suites infinies*, 1671 (trad. Buffon, 1740 ; rééd. Blanchard, 1966).

[19] [20] . LEIBNIZ, pour la découverte d'une représentation symbolique adaptée aux calculs et la dénégation de son propre génie, dans *Nova Methodus pro maximis et minimis...*, 1684 (rééd. et trad. Marc Parmentier - Vrin, 1989) et la *Lettre à Monsieur Dangicourt*, 1716 (trad. Jean Peyroux ; rééd. Blanchard, 1983).

[21] . BERNOUILLI Jean, nègre du marquis de L'Hospital, pour ses demandes à la manière d'Euclide et ses confusions inévitables à partir des conceptions leibniziennes, dans *Analyse des infiniment petits pour l'intelligence des lignes courbes*, 1696 (rééd. ACL-Editions, 1988).

[22] . EULER, pour son audace légitimée par une anticipation osée des principes de permanence robinsonniens, dans *Introduction à l'analyse infinitésimale*, 1748 (Trad. J.B. Labey, 1797 ; rééd. ACL-Editions, 1988).

[23] . D'ALEMBERT, pour l'énoncé des premiers théorèmes sur les limites et les premières rencontres des concepts topologiques élémentaires (ouvert, fermé, connexe), dans *Recherches sur le calcul intégral* - Berlin, 1748.

[24] . LHUILLIER, pour sa traduction formelle de l'intuition de borne, dans *Principes des calculs supérieurs* - Berlin, 1786.

[25] . CARNOT pour ses principes de manipulation de nombres "arbitraires", différents des nombres assignables, dans *Métaphysique du calcul infinitésimal*, 1797 (rééd. Blanchard, 1970).

[26] . LAGRANGE, pour son tour de passe-passe occultant le passage à la limite en le projetant à distance non finie, dans *Théorie des fonctions analytiques*, 1797.

[27] . CAUCHY, pour sa vision de l'uniforme continuité et le premier raisonnement en epsilon-éta, dans *Leçons d'Analyse à l'Ecole Polytechnique*, 1823 (rééd. ACL-Editions, 1987).

[28] . DUHAMEL, pour l'expression des principes de substitution des infiniment petits, dans *Eléments de Calcul Infinitésimal*, 1860.

[29] . DEDEKIND, pour son idée, qu'il croyait triviale, de "coupure", dans *Continuité et nombres irrationnels*, 1872 (trad. Judith Milner et Hourya Sinaceur).

ROBINSON et NELSON, pour leurs constructions débouchant sur l'idée de dé-fonctionnalisation et, partant, d'immobilisation du concept de limite (voir Bibliographie sur l'ANS [1] et [2]).