Un argument important reste à être analysé : est-ce-que les infiniment petits sont vraiment indispensables dans les applications? Lagrange est toujours cité ici comme témoin, mais il ne l'a prétendu que dans la première édition de sa mécanique (1788), tandis que sa théorie des fonctions analytiques avait, comme un de ses buts explicites, de bannir les infiniment petits aussi bien dans l'application de l'analyse à la géométrie et à la mécanique. Et : sont ils vraiment plus simples dans les applications ? Je veux ici seulement mentionner que ceux qui étaient en dehors du système de l'Ecole Polytechnique, ont toujours contesté cette assertion et maintenu que la méthode des infiniment petits n'est pas du tout plus simple ou plus brève si on explicite les notions implicites ou sous-jacentes.

**REFERENCES**

Johann Bernoulli, *Der Briefwechsel von Johann I Bernoulli. Band 2. Der Briefwechsel mit Pierre Varignon, erster Teil: 1692-1702*. Bearbeitet und kommentiert von Pierre Costabel und Jeanne Peiffer. Basel: Birkhäuser, 1988.

Margaret M. Bradley, *Gaspard-Clair-François-Marie Riche de Prony: His Career as Educator and Scientist*. Ph.D. thesis Coventry Polytechnic 1984.

Laurence W. B. Brockliss, *French Higher Education in the Seventeenth and Eighteenth Century: a Cultural History*. Oxford: Clarendon Press, 1987.

Felix Klein, *Elementarmathematik vom höheren Standpunkte aus. Band 2: Geometrie*. Reprint Berlin: Springer 1968.



# Les infinitésimaux dans l'enseignement au XIXème siècle

**Martin Zerner**
UFR Sciences
Université de Nice

Outre que nous limiterons à la France, c'est à travers les traités que nous étudierons l'évolution de l'enseignement du calcul différentiel et intégral au XIXème siècle; comment faire autrement[1]? La matière est d'ailleurs particulièrement riche puisque la Révolution venait au début du siècle de doter la France d'institutions scientifiques originales, puissantes et bien organisées, tout particulièrement l'Ecole Polytechnique et ses classes préparatoires. La plupart des cours d'analyse de Polytechnique sont publiés; à partir des années 1860 on trouve aussi bien des cours des facultés des sciences; d'autres traités sont destinés à la formation des ingénieurs civils (c'est-à-dire en première approximation non polytechniciens, par la suite, ce sera d'eux qu'il s'agira quand on parlera simplement d'ingénieurs).

Ces traités ne s'adressent pas à des débutants complets mais à des gens qui ont eu un premier contact au moins avec les notions de limite et de dérivée dans les classes de mathématiques spéciales. Il est d'ailleurs très difficile de savoir ce qu'on enseignait dans ces classes pendant la première moitié du siècle. Ensuite on peut se faire une idée sans doute assez juste en consultant les dix-huit éditions successives du cours de Briot (1855).

Deux livres ont été utilisés pendant tout le siècle ou presque, il s'agit du *Traité élémentaire du calcul différentiel et du calcul intégral* de Lacroix (à ne pas confondre avec le *Traité* tout cours) et les *Elémens de calcul différentiel et de calcul intégral* de Boucharlat. Ils ont eu 9 éditions chacun, le premier de 1802 à 1881, le second de 1813 à 1891 mais avec une réimpression en 1926[2]! C'est ce que j'appelle la première génération. Les fondements de l'analyse n'y posent pas problème. Après une définition rapide des fonctions, la

1 La plus grande partie de cet exposé est un résumé succinct de séminaires antérieurs (Zerner 1986 et 1989) et d'un article plus complet à paraître.

2 Tous les livres dont le lieu d'édition n'est pas donné ont été publiés à Paris.

dérivée, appelée coefficient différentiel, est introduite d'abord sur un ou deux exemples simples, puis de façon générale. Lacroix emploie systématiquement la méthode des limites. Il mentionne occasionnellement les infiniment petits dans une note en bas de page, en disant que c'était la méthode de Leibniz. Quant à Boucharlat, il déclare que les trois méthodes des limites, des infiniment petits et celle de Lagrange (développements en puissances entières) n'en forment au fond qu'une. Cependant sa préférence va visiblement à la dernière.

L'intermède Cauchy se situe dans les années 1820 avec la parution de ses cours à l'Ecole Polytechnique. Certains auteurs, dont Lombardi (1991) dans un article de *Repères* , croient y trouver la continuité uniforme. Cette thèse qui, telle le monstre du Loch Ness, reparaît de temps en temps, est discutable; le plus vraisemblable est qu'il ne faisait pas la distinction, du moins jusqu'à une date beaucoup plus tardive. Mais peu importe, le fait historiquement significatif est que tous les contemporains de Cauchy ont lu sa définition de la continuité comme ponctuelle. Il a été dit, essentiellement par les intégristes du non-standard, qu'à la suite de Cauchy les infinitésimaux avaient été chassés de l'enseignement. Je ne connais pas d'exemple plus parfait de contre-vérité. Premièrement, nous venons de voir qu'avant Cauchy les infinitésimaux n'étaient pas enseignés. Deuxièmement, Cauchy n'a pas eu d'influence sur l'enseignement, si ce n'est une influence tardive et indirecte dont nous parlerons sous peu. A preuve, les plaintes incessantes des conseils de l'Ecole Polytechnique contre l'enseignement de Cauchy et le fait que ses cours n'ont jamais été réédités. A preuve aussi, les *Leçons de calcul différentiel et de calcul intégral, rédigées d'après les méthodes et les ouvrages publiés ou inédits de M. Augustin-Louis Cauchy* du Chanoine Moigno, grand ami de Cauchy (Belhoste 1985) parues en 1840; les fondements y sont traités comme chez Boucharlat encore qu'avec moins de soin. Le troisièmement nous amène à parler de la génération suivante.

Elle est inaugurée par la deuxième édition du cours de Polytechnique de Duhamel (1847). Les ouvrages les plus importants sont les *Eléments de calcul infinitésimal* du même Duhamel (quatre éditions de 1856 à 1886), le *Cours d'analyse de l'Ecole Polytechnique* de Sturm (quinze éditions de 1857 à 1929), le *Cours de calcul différentiel et intégral* de Serret (six éditions de 1863 à 1911). Les fonctions continues y sont définies, mais sans plus, les infiniment petits aussi, comme quantités variables ayant zéro pour limite, cette définition se réfère à Cauchy. Surtout un principe de substitution des infinitésimaux, placé au début du traité joue un rôle fondamental.



Nous en prendrons l'énoncé chez Bertrand (1864), où il est particulièrement condensé: "Deux infiniment petits $a$ et $b$ peuvent être substitués l'un à l'autre et l'on peut négliger leur différence soit dans la recherche d'une limite de rapport, soit dans celle d'une limite de somme, pourvu que cette différence soit infiniment petite par rapport à l'un d'eux." Il s'agit donc de deux propositions concernant l'une le rapport, l'autre la somme. D'ailleurs dans la plupart des traités on trouve deux énoncés distincts mais groupés. Ils s'appellent principes, théorèmes fondamentaux, parfois seulement théorèmes, mais alors on insiste en général sur leur importance. Ils se trouvent au début de l'ouvrage. Rétrospectivement, le premier, qui concerne le rapport, ne pose pas de problème particulier; nous l'enseignons encore aujourd'hui mais sans lui accorder un caractère fondamental. C'est le deuxième qui fait l'essence du principe de substitution et il demande quelques éclaircissements. On a deux sommes $a_1 + a_2 +\ldots+ a_n$ , $b_1 + b_2 +\ldots+ b_n$ et quand $n$ tend vers l'infini, la première a une limite. D'autre part, tous les rapports $(a_i-b_i)/a_i$ tendent vers zéro (tout le problème peut être vu dans l'ambigüité de cette phrase: comment l'indice $i$ varie-t-il avec $n$ ?). Conclusion: la deuxième somme tend vers la même limite que la première. Il n'est jamais question d'uniformité.

Si on cherche une classification plus fine, on peut distinguer ces traités selon qu'ils font de ce principe de substitution un usage technique précis (c'est typiquement le cas de Sturm) ou une justification générique de toute espèce de passage à la limite. Dans le deuxième cas, un lecteur peu averti peut avoir, bien à tort, l'impression de lire du non-standard.

Le premier livre de la troisième génération (rassurez vous, ce sera la dernière) est l'*Introduction à la théorie des fonctions d'une variable* de Jules Tannery[3] parue en 1886. Dans ce livre et ceux qui vont suivre on trouve les fondements rigoureux de l'analyse tels qu'ils ont été mis au point par Weierstrass et ses élèves. On y trouve une construction des nombres réels (en général par les coupures de Dedekind), les propriétés des fonctions continues, une étude rigoureuse de l'intégrale de Riemann. Le plus important de ces livres est celui de Goursat paru en 1902 qui sera l'ouvrage de référence jusque dans les années 1950.

Cette fois, les infinitésimaux sont éliminés des fondements de l'analyse, mais non pas de l'enseignement. Ils sont largement utilisés dans les parties consacrées à la géométrie différentielle, très

[3] Il s'agit du frère de l'historien des mathématiques Paul Tannery.

importantes dans tous ces livres et aussi dans les problèmes d'examen. On peut lire dans le plus moderne de ces traités, la deuxième édition du *Cours d'analyse* de Jordan (1893):

> "Pour trouver l'équation de cette enveloppe, considérons l'une de ces courbes
> F(x,y,c) = 0,
> et la courbe infiniment voisine
> F(x,y,c+dc) = 0." (p.425 de la 2ème édition).

Le livre de Tannery me donne l'occasion de revenir sur l'article de Lombardi dont j'ai déjà parlé. Ce livre est extrêmement bien fait et aujourd'hui encore je crois que c'est une excellente lecture pour un étudiant en mathématiques. C'est là qu'on trouve pour la première fois (à ma connaissance) l'idée qu'il vaut mieux définir la continuité uniforme avant la continuité en un point. Cette idée refait surface de temps en temps depuis mais n'a jamais été suivie (encore un monstre du Loch Ness). Pourtant l'autorité de Tannery était grande. Sous-directeur scientifique à l'Ecole Normale Supérieure (ce qui voulait dire en fait directeur de la section scientifique de l'Ecole), c'est lui qui a formé la plupart des mathématiciens français pendant vingt ans. Au demeurant son livre est la rédaction d'un cours qu'il avait fait à l'ENS et il y a de bonnes raisons de penser qu'il a été lu par de nombreux enseignants . Il faut donc qu'il y ait une contrainte didactique très forte qui s'oppose à l'emploi de cette méthode. L'article de Lombardi dont j'ai dit un mot suggère de l'adopter; il pose un problème sérieux mais qui est typiquement du ressort des didacticiens.

Avant de terminer je dois ajouter que dans ce qui précède, j'ai négligé les livres destinés à la formation des ingénieurs. Quand on les examine, on découvre un phénomène très frappant de retard. Les manuels publiés en gros pendant la durée de vie de la deuxième génération (le dernier date de 1887) ne contiennent pas le principe de substitution des infinitésimaux et ont quelques autres points communs avec les livres de la première génération[4]. Seule exception: un cours de Boussinesq à l'Institut Industriel du Nord, et cette exception s'explique très bien par les particularités de l'auteur. Même phénomène avec les livres publiés à l'époque de la troisième génération (le premier en 1893)[5]. Pas un des cours de Polytechnique

4 Le plus important de ces livres est Sonnet *Premiers éléments de calcul infinitésimal à l'usage des jeunes gens qui se destinent à la carrière d'ingénieur* publié en 1869 et qui a eu huit éditions jusqu'en 1919.

5 Le plus important de ces livres est Appell *Eléments d'analyse mathématique* publié en 1898 et qui a eu six éditions jusqu'en 1950 (il s'agit d'un cours de Centrale).



et des facultés des sciences ne présente ce phénomène de retard. Il ne m'est pas possible dans cette brève intervention de présenter les éléments d'explications que je crois en voir. C'est en tout cas à méditer.

## Références


Belhoste B. 1985 *Cauchy, un mathématicien légitimiste au XIXème siècle* Belin, Paris

Bertrand J. 1864 *Traité de Calcul Différentiel et de Calcul Intégral* ,1er volume *Calcul Différentiel* , Gauthier-Villars, Paris

Briot C. 1855 *Leçons d'algèbre. Deuxième partie à l'usage des élèves de la classe de mathématiques spéciales* Carilian-Gœury et V. Dalmont, Paris

Lombardi H. 1991 L'uniformité, un concept implicite efficace chez Cauchy *Repères* 5

Zerner M. 1986 Sur l'analyse des traités d'analyse: les fondements du calcul différentiel dans les traités français, 1870-1914 *Cahier de didactique des mathématiques* n°30 IREM, Université Paris 7

Zerner M. 1989 La rectification des courbes dans les traités d'analyse français de la deuxième moitié du XIXème siècle *Cahiers du Séminaire d'Histoire des Mathématiques* 10 p.267-281 Laboratoire de Mathématiques Fondamentales, Université Pierre et Marie Curie (Paris 6)