Les 'Elemens de la géomètrie de l'infini' de Fontenelle

Michel Blay
CNRS, Paris

En décembre 1727, Fontenelle fait paraître à Paris un ouvrage qui lui tient profondément à coeur et auquel il a consacré près de trente années de travail: **Les Elémens de la géométrie de l'infini**. Dans son édition originale, cet ouvrage in 4° de 548 pages en deux parties (1), sortie des presses de l'Imprimerie Royale, est présenté comme une "suite des Mémoires de l'Académie Royale des Sciences" (2).

Le livre reçut de la part des contemporains un accueil très réservé. Ces derniers, au lieu de porter leur attention sur le projet intellectuel fontenellien, s'attachèrent seulement à souligner, souvent d'ailleurs à juste titre, les insuffisances mathématiques et les difficultés de la construction théorique. En adoptant une telle attitude, ils méconnaissaient le véritable enjeu du travail et de la réflexion du secrétaire perpétuel.

Pour ce dernier, son livre n'a pas pour objet de présenter de nouveaux résultats, mais bien plutôt, en refusant de réduire le nouveau calcul, soit à un simple calcul d'approximation (3), soit à un artifice de calcul (4), d'éclairer en profondeur, par ce que l'on pourrait appeler en termes modernes un travail sur les fondements (5), les résultats déjà acquis. Pour Fontenelle, on ne peut être satisfait, comme beaucoup à l'époque, d'une méthode qui, sans doute, "marche bien" et donne de nombreux résultats, mais que, en contre partie, on manipule, pour ainsi dire, à l'aveuglette. Fontenelle est sur ce point très explicite dans la remarquable Préface qu'il place en tête de son livre et qui est aussi, d'une certaine façon, une histoire de la genèse du nouveau calcul leibnizien :

> "[...] *il est arrivé dans la haute Géométrie une chose bizarre, la certitude a nui à la clarté. On tient toujours le fil du calcul, guide infaillible, il n'importe où l'on arrive, il y falloit arriver, quelques ténebres qu'on y trouve. De*

plus, la gloire a toujours été attachée aux grandes recherches, aux solutions des Problemes difficiles, & non à l'éclaircissement des idées.

J'ai cru que cet éclaircissement, négligé par les habiles Géometres, pourroit être utile à la Géométrie; on n'en marchera pas plus sûrement, mais on verra plus clair autour de soi, avec le fil qu'on avoit dans des Labyrinthes sombres, on aura un flambeau, dont la lueur ne sauroit être si petite, qu'elle ne soit toujours de quelque usage, & même si cette petite lueur que je présente n'est pas fausse, rien n'empêchera qu'on ne l'augmente beaucoup" (6).

ou bien encore:

"J'avoue qu'on peut me reprocher qu'au lieu d'éclaircir l'Infini, j'y porte une obscurité nouvelle, un Paradoxe inoui, qui est exposé dans la Sect. III, & qui ensuite se retrouve souvent dans tout l'Ouvrage : mais si ce Paradoxe est vrai, s'il suit nécessairement de la nature de l'Infini, je la fais mieux connoître, j'en fais mieux connoître les propriétés, qui, quoiqu'obscures, sont la source de tout ce que le Calcul nous donne de plus étonnant ; on arrivera aux plus grandes merveilles bien préparé, & sans cette espèce de surprise, qui dans le fonds n'est point honorable à une vraie Science. C'est toujours un degré de lumiere, que de voir sûrement à quel principe, fût-il peu connu, tiennent certains effets" (7).

Pour répondre à cette exigence de clarté, mais aussi de rigueur, Fontenelle se propose de construire une véritable théorie ou un "système général de l'infini" (8) susceptible de rendre raison de tous les résultats obtenus, de leur donner un sens:

"Quand une Science, telle que la Géométrie, ne fait que de naître, on ne peut guere attraper que des Vérités dispersées qui ne se tiennent point, & on les prouve chacune à part comme l'on peut, & presque toujours avec beaucoup d'embarras. Mais quand un certain nombre de ces Vérités désunies ont été trouvées, on voit en quoi elles s'accordent, & les principes généraux commencent à se montrer, non pas encore les plus généraux ou les premiers, il faut un plus grand nombre de Vérités pour les forcer à paroître. Plusieurs petites Branches que l'on tient d'abord séparément, menent à la grosse Branche qui les produit, & plusieurs grosses Branches menent enfin au Tronc. Une des grandes difficultés que j'aie éprouvées dans la composition de cet Ouvrage a été de saisir le Tronc, & plusieurs grosses Branches m'ont paru l'être qui ne l'étoient pas. Je ne suis pas sûr de ne m'y être pas encore trompé, mais enfin quand j'ai eu pris l'Infini pour le Tronc, il ne m'a plus été possible d'en trouver d'autre, & je l'ai vu distribuer de toutes parts, & répandre ses rameaux avec une régularité & une symétrie, qui n'a pas peu servi à ma persuasion particuliere.

Un avantage d'avoir saisi les premiers Principes, seroit que l'ordre se mettroit par-tout presque de lui-même, cet ordre qui embellit tout, qui fortifie les Vérités par leur liaison, que ceux à qui on parle ont droit d'exiger, & qu'on ne peut leur refuser sans une espece d'injustice, sur tout si on sacrifie leur commodité à la gloire de paroître plus profond" (9)

ou bien encore, un peu plus loin :

"Le Calcul n'est guere en Géométrie que ce qu'est l'expérience en Physique, & toutes les Vérités produites seulement par le Calcul, on les pourroit traiter de Vérités d'expérience. Les Sciences doivent aller jusqu'aux premieres causes, sur-tout la Géométrie, où l'on ne peut soupçonner comme dans la Physique des principes qui nous soient inconnus. Car il n'y a dans la Géométrie, pour ainsi dire,que ce que nous y avons mis, ce ne sont que les idées les plus claires que l'Esprit humain puisse former sur la Grandeur comparées ensemble, & combinées d'une infinité de façons différentes" (10).

C'est le sens de cette démarche théorique, visant à construire un "système général de l'infini", qui n'a pas toujours été bien perçu.

Ainsi, tandis que Leibniz dès le 20 juin 1702 écrit à Varignon:

"Entre nous je crois que Mons. de Fontenelle, qui a l'esprit galant et beau, en a voulu railler, lorsqu'il a dit qu'il vouloit faire des elemens metaphysiques de nostre calcul. Pour dire le vray, je ne suis pas trop persuadé moy même, qu'il faut considerer nos infinis et infiniment petits autrement que comme des choses ideales ou comme des fictions bien fondées. Je croy qu'il n'y a point de creature au desous de la quelle il n'y ait une infinité de creatures,

cependant je ne crois point qu'il y en ait, ny même qu'il y en puisse avoir d'infiniment petites et c'est ce que je crois pouvoir demonstrer. Il est que les substances simples (c'est-à-dire qui ne sont pas des estres par aggregation) sont véritablement indivisibles, mais elles sont immaterielles, et ne sont que principes d'action" (11).

le Père Castel, pour sa part, regrette dans une lettre adressée à Fontenelle en date du 20 mars 1728, que ce dernier ne soit pas dans son ouvrage "remonté à la métaphysique":

"Tous les autres, sans en excepter M. de l'Hôpital, n'en ont traité que l'art, le tâtonnement et la routine du calcul. De sorte que si vous aviez voulu remonter à la Métaphysique, comme je l'avois toujours espéré, je ne vois pas ce qui pourroit manquer à une si belle science" (12).

La raison de cette incompréhension réside pour une grande part dans une méconnaissance du concept fontenellien de système géométrique, concept dont l'introduction donne justement tout son sens à la distinction, essentielle pour Fontenelle, entre infini géométrique et infini métaphysique. Fontenelle insiste sur l'importance de ce concept en donnant à la première partie de son ouvrage le titre de "Système général de l'infini". Par ailleurs, c'est principalement sur cette question qu'il attire, dans sa correspondance, l'attention de ses lecteurs. Ainsi, dans sa lettre à Jean I Bernoulli en date du 22 avril 1725, il se"flatte" que son "assez gros ouvrage, dont le titre est **Elémens de la géométrie de l'infini**" soit :

"[...] *une espece de* ***sistéme****, non pas Metaphisique, mais Geometrique, assés bien lié de tout ce que vous nous avés découvert sur cette grande matiere. i'en croi l'ordre a peu prés aussi exact qu'il puisse l'étre, et le spectacle assés beau pour un Esprit mathematicien, il a falu, ne fust ce que pour la liaison des pierres du Bâtiment, que i'aye meslé un grand nombre de pensées qui n'étoient qu'a moi, avec celles qui vous appartenoient* [...] " *(13)*

Mais ce qui illustre, pour Fontenelle, de façon particulièrement exemplaire, sa conception d'un système géométrique "bien lié", c'est la place déterminante qu'il a dû concéder pour la cohérence du système à un paradoxe ; celui présidant à l'introduction des "finis indéterminables" (cf. infra).

Aussi précise-t-il, dans cette même lettre à Jean I Bernoulli en

date du 22 avril 1725 :

"Car ce qu'il y a de bizarre, c'est qu'autant que ce principe est ***paradoxe*** *et* ***sauvage****, autant il est fécond et général, et ie vous prie sur ce point seulement de m'en croire à ma parole. ie retrouve cela par tout, et sans l'avoir aucunement cherché, au contraire. i'aurois voulu de tout mon coeur m'en pouvoir passer, i'en connoissois le peril . i'en trouve à chaque moment dans le cours de l'ouvrage de nouvelles preuves par des analogies, par le Calcul, par la liaison necessaire de ce principe avec toutes les vérités connües qui peuvent y avoir rapport"* (14).

Fontenelle revient à de multiples reprises sur ces mêmes thèmes dans sa correspondance avec Jean I Bernoulli (15), mais aussi avec Jean-Pierre de Crousaz (1663-1750) (16), s'Gravesande (1668-1742) (17) et Boullier (1669-1759) (18). A la lecture de ces différents textes, il apparaît clairement que, pour lui, ses **Elemens** se présentent comme un "système géométrique" doté d'une remarquable cohérence interne ("bien lié"), et faisant usage entre autres d'une hypothèse en forme de paradoxe présidant à l'introduction des "finis indéterminables". Dans cette perspective, l'existence des objets du système repose, en dernier ressort, sur cette cohérence interne. Elle est le garant de leur réalité, leur seul support ontologique.

Fontenelle écrit d'ailleurs dans la Préface de ses **Elémens** :

"La Géométrie est toute intellectuelle, indépendante de la description actuelle et de l'existence des Figures dont elle découvre les propriétés. Tout ce qu'elle conçoit nécessaire est réel de la réalité qu'elle suppose dans son objet. L'Infini qu'elle démontre est donc aussi réel que le Fini , & l'idée qu'elle en a n'est point plus que toutes les autres, une idée de supposition, qui ne soit que commode, & qui doive disparoître dès qu'on en a fait usage" (19).

Cela étant, la distinction fontenellienne entre infini géométrique et infini métaphysique prend toute sa signification :

"Nous avons naturellement une certaine idée de l'Infini, comme d'une grandeur sans bornes en tous sens, qui comprend tout, hors de laquelle il n'y a rien. On peut appeller cet Infini ***Métaphysique****: mais l'Infini* ***Géométrique****, c'est-à-dire, celui que la Géométrie considere, & dont elle a besoin dans ses recherches, est*

fort différent, c'est seulement une grandeur plus grande que toute grandeur finie, mais non pas plus grande que toute grandeur. Il est visible que cette définition permet qu'il y ait des Infinis plus petits ou plus grands que d'autres Infinis, & que celle de l'Infini Métaphysique ne le permettroit pas. On n'est donc pas en droit de tirer de l'Infini Métaphysique des objections contre le Géométrique, qui n'est comptable que de ce qu'il renferme dans son idée, & nullement de ce qui n'appartient qu'à l'autre"(20)

L'infini géométrique, selon Fontenelle, apparaît donc, dans le cadre de sa conception du "système géométrique", comme un concept mathématique qui, en tant que tel, est ontologiquement indépendant de l'infini métaphysique. Il ne relève que de la cohérence du système à l'intérieur duquel il se déploie. En conséquence, pour Fontenelle, aucune critique du concept d'infini géométrique s'appuyant sur celui, d'ailleurs pour lui assez flou, d'infini métaphysique, ne peut être d'une quelconque valeur (21). Par cette volonté de considérer le concept d'infini géométrique comme un concept spécifique dont le contenu doit être défini à l'intérieur du seul discours mathématique, Fontenelle annonce incontestablement les travaux de Cantor et de ses successeurs, en dépit de certaines faiblesses mathématiques sur lesquelles nous reviendrons et résultant pour l'essentiel d'une absence de distinction nette entre nombres ordinaux et cardinaux (22).

Fontenelle définit dans la Section I de ses **Elémens** la grandeur comme ce qui "est susceptible d'augmentation et de diminution, ou ce qui est le même, de plus et de moins". Seront donc des grandeurs "les nombres, les lignes, les surfaces, les solides, les temps, etc.." (23). En son sens général, la grandeur est donc toujours "par son essence, susceptible de plus et moins", par conséquent, "elle ne perd rien de son essence en recevant ce plus ou ce moins, donc elle est encore grandeur, donc encore également susceptible de plus et de moins, donc elle en est toujours susceptible; donc elle est sans fin, ou à l'infini" (24). L'objet de la Section II est précisément l'examen de cette "grandeur infiniment grande" (25).

La réalité particulière du "nombre infini" est, comme le note Léon Brunschvicg à propos de Fontenelle, "immédiatement donnée" (26) par la "suite naturelle des nombres dont l'origine est O ou 1", et, en ce sens, "le nombre infini" possède le même type de réalité que celui que l'on suppose aux nombres finis (27) :

"84. Pour mieux concevoir l'Infini, je considere la Suite naturelle des nombres, dont l'origine est O ou 1.

Chaque terme croit toujours d'une unité, & je vois que cette augmentation est sans fin, et que quelque grand que soit le nombre où je serai arrivé, je n'en suis pas plus proche de la fin de la Suite, ce qui est un caractère qui ne peut convenir à une Suite dont le nombre des termes seroit fini. Donc la Suite naturelle a un nombre de termes infini.

En vain diroit-on que le nombre des termes qui la composent est toujours actuellement fini; mais que je le puis toujours augmenter. Il est bien vrai que le nombre des termes que je puis actuellement parcourir ou arranger selon leur ordre, est toujours fini; mais le nombre des termes dont la Suite est composée en elle-même, est autre chose. Les termes dont elle est composée en elle-même, existent tous également, & si je la conçois poussée seulement jusqu'à 100, je ne donne pas à ces 100 termes une existence dont soient privés tous ceux qui sont par delà. Donc tous les termes de la Suite, quoiqu'ils ne puissent pas être tous embrassés ou considérés ensemble par mon esprit, sont également réels. Or le nombre en est infini, comme on vient de le prouver, donc un nombre infini existe aussi réellement que les nombres finis" (28).

En outre "dans la suite naturelle chaque terme est égal au nombre des termes qui sont depuis 1 jusqu'à lui inclusivement", or, "le nombre de tous ses termes est infini"; il s'ensuit, par conséquent, que la suite naturelle "a un dernier terme qui est ce même infini". Ce dernier terme est exprimé par le "caractère ∞" (29).

Cependant, bien que le passage, dans la suite naturelle des nombres, du fini à l'infini, soit "inconcevable", cette situation n'entrave en rien un travail mathématique sur l'infini puisque la grandeur infiniment grande doit être prise, en suivant Fontenelle, "non comme étant dans ce passage obscur du fini à l'infini; mais comme l'ayant franchi entièrement et ayant passé par les degrés nécessaires, quels qu'ils soient, si ce n'est que je puisse quelque fois entrevoir quelque lumière sur la nature de ces degrés" (30).

Il n'en reste pas moins que le concept même de grandeur infiniment grande semble contradictoire puisque, d'une part, "l'idée naturelle de la grandeur infinie est, qu'elle ne puisse être plus grande ou augmentée" et que, d'autre part, la grandeur infiniment grande en tant qu'elle est grandeur "en doit conserver l'essence et être susceptible d'augmentation et même sans fin" (31). Cependant, "ces deux idées si contraires en apparence se concilient parfaitement" si l'on distingue rigoureusement, suivant Fontenelle, l'ordre du fini et celui de l'infini; en ce sens que l'infini en tant qu'il est grandeur peut recevoir des augmentations et des diminutions, mais seulement des augmentations et des diminutions à l'intérieur de son ordre, d'où finalement :

> *"113. Ces ordres ainsi établis, une grandeur quelconque a des rapports finis à tout ce qui est de son ordre, & elle ne peut recevoir des augmentations ou des diminutions que par ce qui est de son ordre. Si on la conçoit élevée à un ordre supérieur, il faut la prendre comme ayant franchi ce passage immense, & alors tout ce qui est d'un ordre inférieur n'est plus grandeur par rapport à elle, & disparoît devant elle, comme elle-même n'est point grandeur par rapport à toutes celles des ordres supérieurs, & disparaîtroit devant elles. Tout cela n'est que ce qui a été dit du Fini & du simple Infini, appliqué à tous les ordres en général, dont le Fini et le simple Infini n'étoient que les deux premiers" (32).*

Fontenelle dégage ensuite les deux concepts d'"infini indéterminé" et de "fini indéterminable" qui servent de clé de voûte à son système dans la mesure où ils sont introduits pour éviter implicitement tout à la fois les objections adressées au concept d'infini actuel et le retour des paradoxes de Zénon.

De ce point de vue, le cas du concept central de "fini indéterminable" est particulièrement exemplaire puisque son introduction, comme nous allons le voir, est précisément une réponse à la formulation d'un paradoxe pouvant servir d'argument contre l'infini actuel (33).

- Les "infinis indéterminés"

En divisant le dernier terme de la suite des nombres naturels A (à savoir ∞) par un "nombre fini quelconque" n , on obtient encore des infinis du même ordre :

> *"Puisque A est une progression arithmétique, dont le dernier terme est ∞, son terme du milieu est $\frac{\infty}{2}$, Infini, après lequel il ne peut y avoir que des Infinis plus grands. De même le terme de son 1er quart est $\frac{\infty}{4}$, encore infini, celui de sa premiere 100me partie est $\frac{\infty}{100}$ encore infini; de sorte que de l'intervalle infini, qui est entre 1 & ∞, divisé en 100 parties, il y en a déjà 99 qui ne peuvent avoir que des termes infinis, & il ne reste que la 1re qui puisse en avoir de finis. Il est visible que cette premiere 100ème partie sera infinie, puisqu'elle sera une partie finie d'un intervalle infini, & par conséquent elle contiendra encore une infinité de termes"* (34).

Ces infinis en "nombres prodigieux" contenus dans A et "moindres que ∞" sont tous distingués "par ce caractère α qui représente un infini indéterminé et variable du même ordre que ∞ , qui est un infini fixe" (35). Par conséquent, ces infinis indéterminés sont tels, par exemple, que " $\frac{\infty}{\alpha}$ est un entier fini, plus une fraction le plus souvent, et $\frac{\alpha}{\infty}$ est une fraction finie moindre que 1", ou bien encore, puisque les infinis indéterminés n'ont entre eux que des rapports finis " $\frac{\alpha}{\alpha}$ est un fini " (36).

Ces résultats sont très importants dans la perspective du système fontenellien car ils expriment en termes finis les rapports de grandeurs infinies du même ordre.

- Les "finis indéterminables"

Fontenelle souligne qu'"il est visible que A^2 a autant de termes que A" (37) ; cependant, on doit admettre que A^2 a des infinis "plutôt que A" ou que le passage à l'infini se fait plus tôt en A^2 qu'en A puisque les termes de A^2 croissent comme les carrés de A :

> *"Je représente les deux Suites aux yeux, pour mieux faire voir leur correspondance.*

								B		
A	1	2	3	4	&c.	n	nn		infinis	∞
A^2	1	4	9	16	&c.	nn			infinis	∞^2
								C		

"La ligne BC marque dans A la séparation des termes finis d'avec les Infinis, de sorte qu'à la gauche de BC ils sont tous Finis, & à sa droite Infinis, & en même temps elle marque dans A^2 , qu'au moins à sa droite ils seront tous Infinis, car les Infinis de A ne peuvent qu'augmenter dans A^2 par l'élévation au quarré.

Soit nn le plus grand quarré fini, qui soit dans A, & posé par conséquent à la gauche de BC, & tout auprès : il sera aussi dans A^2, puisqu'il est le quarré de n, un des termes de A. Mais il sera dans A^2 sous n sa racine, & n est dans A, fort éloigné de nn, & d'autant plus que n est plus grand. Mais nn est le plus grand quarré fini possible, & dans A^2 il y a encore loin de nn à la ligne BC. Donc dans A^2 il n'y a plus de termes finis après nn, ou bien il y a dans cette Suite un vuide depuis nn jusqu'à la ligne BC ; de sorte que tous les termes Finis qui sont dans A depuis n jusqu'à la ligne BC, n'ont point de correspondans ou de quarrés dans A^2 , ce qui est manifestement impossible. Donc après nn, il vient dans A^2 des Infinis, & A^2 en a plutôt que A" (38).

Par conséquent, et de façon paradoxale, pour parler comme Fontenelle, des termes finis de A peuvent donner des carrés infinis :

"[...] *les Infinis qui seront dans A^2 depuis nn jusqu'à la ligne BC seront donc des quarrés de termes finis correspondans qui étoient dans A depuis n jusqu'à la ligne BC : or comment des quarrés de termes finis peuvent-ils être infinis ?"* (39).

Fontenelle accepte finalement ce paradoxe (40) pour les deux raisons principales suivantes (41) :

- la première fait appel une nouvelle fois à l'obscurité (42) et à la spécificité du dynamisme présidant au passage du fini à l'infini (43).

- la seconde, plus suggestive, s'appuie sur la cohérence interne du système et la fécondité du dit paradoxe, en ce sens qu'une fois admis, ce paradoxe, d'après Fontenelle, "ne conduit jamais à aucune conclusion fausse. Au contraire, il se lie nécessairement aux vérités déjà connues, et en produit beaucoup de nouvelles. C'est de quoi l'on sera pleinement convaincu dans la suite". Par conséquent, si ce paradoxe est faux, il doit être cependant "parfaitement équivalent à quelque chose de vrai" et en remplir "bien heureusement la place". Il convient donc "en attendant ce vrai" de "prendre ce paradoxe pour une vérité démontrée dans l'art. précédent, me réservant toutefois, & je le dis avec la derniere sincérité, à le rejetter absolument, dès qu'on me fera voir que sans l'employer on peut faire un Système lié de l'Infini en Géométrie, ou qu'il y a quelque autre idée à lui substituer, qui fasse le même effet sans avoir la même difficulté, ou une équivalence" (44).

Cela étant, Fontenelle "appelle **Finis indéterminables**, les termes finis de A qui deviennent infinis dans A^2 par l'élévation au quarré : car comme ils sont dans le passage que fait A^2 du Fini à l'Infini, ils ne peuvent jamais être connus ni déterminés, comme les termes qui sont à l'origine de A ou de A^2 " (45).

Il généralise ensuite ces résultats aux cas des puissances entières et fractionnaires de A (46).

En résumé, cette étude de la suite A des nombres naturels a donc conduit Fontenelle à introduire trois grands ensembles d'éléments lui appartenant : les finis déterminables, les finis indéterminables et les infinis indéterminés. Pour illustrer au mieux la situation complexe liée à la répartition de ces éléments dans A, nous nous permettons de donner en citation un très long extrait de la lettre adressée par Bragelongne, disciple particulièrement fervent de Fontenelle, en avril 1729, à Daniel Bernoulli en réponse à la lettre que ce dernier avait adressée à Fontenelle le 5 octobre 1728 après avoir reçu un exemplaire des **Elémens**. Nous lisons donc sous la plume de Bragelongne:

"7°. Cela posé, si l'on prend m pour représenter tous les finis déterminables et n pour représenter tous les finis indéterminables, si outre cela (faute d'avoir un assez grand nombre de caractéristiques différentes) on représente les infinis qui forment la seconde et la plus grande partie de la Suite, par des fractions dont les numérateurs soient toujours la Caractéristique ∞, et les dénominateurs successivement, en s'éloignant du dernier terme, les finis déterminables, puis les finis indéterminables, en sorte que ces dénominateurs décroissent toujours en s'approchant du dernier terme ∞ , jusqu'à devenir = 1, il est évident que la suite marquée A *représentera suffisamment les changemens qui arrivent dans la Suite des nombres naturels avant d'arriver à son dernier terme qui est toujours ∞ .*

$$\begin{array}{l} \qquad\quad \mathrm{B} \quad \mathrm{C} \quad \mathrm{D} \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \mathrm{E} \\ \mathrm{A.}\ /\ 0,1,2,3,4,\ \&c \,..\, m \,../..\, n..\ /\ ..\ \frac{\infty}{n} ../..\ \frac{\infty}{m} \,..\, \frac{\infty}{100} \,..\, \frac{\infty}{4} \,..\, \frac{\infty}{2} \,..\, \frac{\infty}{1}\ / \end{array}$$

En effet on peut se représenter tous les nombres finis déterminables comme s'ils étoient contenus depuis A jusqu'en B, les finis indéterminables depuis B jusqu'en C, et enfin cette infinité de termes infinis qui vont toujours en augmentant s'étendra depuis C jusqu'en E. C'est à ces sortes d'infinis aux quels Mr de Fontenelle adopte la Caractéristique α, lorsqu'ils ne sont pas encore arrivez à leur dernier terme; je les représente icy par différentes fractions, pour pouvoir les distinguer les uns des autres, sans abandonner neantmoins la Caractéristique de l'Auteur (47).

Ainsi, l'introduction des finis indéterminables et des infinis indéterminés donne, si l'on peut dire, une épaisseur au "passage obscur du fini à l'infini", passage à l'intérieur duquel, dans le système fontenellien, se résolvent en fait les contradictions apparentes du calcul de l'infini. Ou, pour reprendre les termes de Léon Brunschvicg, c'est "par la distinction entre le dynamisme obscur du passage à l'infini et la clarté inhérente de l'idée statique de l'infini", que se résolvent "les contradictions apparentes du calcul de l'infini" (48).

Quant aux "grandeurs infiniment petites" (49), elles ne sont, pour reprendre une expression de Fontenelle, que des grandeurs infiniment grandes "renversées" (50). Et, corrélativement, les concepts de fini indéterminable et d'infini indéterminé se trouvent dans ce nouveau contexte introduits tout naturellement.

Puis, après avoir développé dans la très longue Section VII intitulée "Sur les suites infinies de grandeurs quelconques" (51), de multiples considérations centrées en particulier sur la question des "sommes de ces suites", Fontenelle en vient finalement au cas des "suites dont les différences seroient infiniment petites" (52). L'étude de ces suites dont "les variations seront conduites par degrés infiniment petits" (53) amène Fontenelle à introduire, pour exprimer ses concepts, une notation qui n'est autre, en fait, que la notation leibnizienne :

"Si on appelle y une grandeur variable quelconque, dont l'accroissement ou décroissement perpetuel réglé par

quelque Loi, forme une Suite, on appellera dy ses différences infiniment petites. Ces dy sont les $\frac{1}{\infty}$ *, & en effet ce sont des fractions ou parties infinitiémes de y, & dy est* $\frac{y}{\infty}$ *. Si les dy sont variables, ils auront aussi des différences qui seront par rapport à eux comme les dy par rapport aux y. On les appelle ddy, & on a ddy =* $\frac{dy}{\infty}$ *. De même les ddy pourront avoir leurs dddy , &c."* (54).

Ainsi, pour la première fois dans l'ouvrage de Fontenelle, un pont est jeté entre la recherche fontenellienne sur les fondements et le calcul leibnizien, ce dernier trouvant ainsi, si l'on en croit l'auteur, une nouvelle clarté, voire une nouvelle rigueur. Fontenelle précise d'ailleurs à la fin de la Section X intitulée "Des variations et des changements des courbes" (55) :

"Mais il y a toujours dans la connoissance des Courbes, même géométriques, un grand nombre de choses qui demandent la Théorie de l'Infiniment grand ou petit, du moins pour être connues d'une maniere générale & commune à toutes les Courbes, & en même temps immédiatement tirée du fond de leur nature. Il faut donc aussi avoir l'Art de calculer les Infinis qui entrent dans les Courbes, & surtout les Infiniment petits, parce que, comme nous l'avons vu, les différences infiniment petites des grandeurs finies qui y entrent, sont ce qu'il y a de plus important à considérer. Par cette même raison, ce Calcul s'appelle ***Différentiel****" (56).*

Cependant, ce n'est véritablement qu'à partir de la Section XI intitulée "Règles générales pour déterminer par le calcul différentiel tout ce qui appartient au cours d'une courbe rapportée à un axe" (57), que Fontenelle utilise systématiquement, pour exprimer ses propres concepts, les notations leibniziennes. Le point décisif réside dans le fait qu' aux différents ordres des différentielles correspondent les différents ordres fontenelliens des grandeurs "absolument infiniment petites". La fin de l'ouvrage est alors, pour l'essentiel, consacrée à la réorganisation de l'ensemble des résultats, y compris sur le mouvement, obtenus par les contemporains avec l'aide du calcul leibnizien (58).

LISTE des ABREVIATIONS

A.Ac.Sc. Registres : Archives de l'Académie des Sciences de Paris; Registres manuscrits des Procès-verbaux des séances de l'Académie Royale des Sciences de Paris.

GM : **Leibnizens mathematische Schriften**. Hrsg. von C.I.Gerhardt, Bd. 1-7 (Berlin, Halle 1849-1863, rééd. Hildesheim, 1960-1961).

UB Basel : Öffentliche Bibliothek der Universität, Basel.

1 - Les deux parties sont composées comme suit: la première (pages 1 à 392), divisée en douze Sections, porte le titre "Système général de l'infini"; la seconde (pages 393 à 546), divisée en huit Sections, porte le titre "Différentes applications ou remarques". Les dernières pages de l'ouvrage (546 à 548) sont intitulées "Réflexion sur les sommes des suites". Il semble que cette "réflexion" ait été faite alors que le livre était déjà sous presse. Des travaux sur ces questions sont présentés par Nicole à l'Académie à la séance du 25 juin 1727, **A.Ac.Sc. Registres**, t. 46, fol. 239, et **Ibid**. fol. 240-246. Nous avons déjà donné deux articles sur cet ouvrage: "Du fondement du calcul différentiel au fondement de la science du mouvement dans les 'Elémens de la géométrie de l'infini' de Fontenelle", **Studia Leibnitiana** (1989), XVII, 99-122, "Du Système de l'infini au statut des nombres incommensurables dans les 'Elémens de la géométrie de l'infini' de Fontenelle", dans **Le labyrinthe du Continu** (Springer Verlag, 1992) 61-75 ; voir également nos ouvrages, **La Naissance de la mécanique analytique** (PUF, 1992), 2° partie, chap. III, et **Les raisons de l'infini** (Paris, gallimard, 1993)

2 - Une Commission composée de Dortous de Mairan et de François Nicole a été nommée par l'Académie sur la demande de Fontenelle le mercredi 14 août 1726 "pour examiner mes Elémens de la géométrie de l'infini", **A.Ac.Sc. Registres**, t. 45, fol. 255 r°.

Le compte rendu des travaux de cette Commission a été présenté à la séance de l'Académie le samedi 22 février 1727, **Ibid**.,t. 46, fol. 73-74. Le rapport rédigé par la Commission a été publié en totalité par l'abbé Trublet à qui de Mairan l'avait communiqué, dans ses **Mémoires pour servir à l'histoire de la vie et des ouvrages de Fontenelle tirés du Mercure de France I756, 1757 et 1758, par l'abbé Trublet, seconde édition corrigée et augmentée** (Amsterdam, 1759)

3 - **Elémens**, Préface, 8 et 12.
4 - **Ibid**., Préface, 9-10.
5 - La présence du terme "élémens" dans le titre de l'ouvrage est tout à fait significative.

6 - **Ibid**., Préface, 15-16.
7 - **Ibid**., Préface, 16. "Paradoxe" ne doit pas être pris ici dans un sens trop technique, mais seulement en conformité avec son etymologie, comme ce qui heurte l'opinion commune.
8 - C'est le titre donné par Fontenelle à la première partie de son livre. Voir supra.
9 - **Elémens**, Préface, 18-19.
10 - Ibid., Préface, 19-20.
11 - GM, IV, 110. Voir également la réponse non datée de Leibniz à la lettre de Fontenelle en date du 9 septembre 1704, **Lettres et opuscules inédits de Leibniz**, édités par Foucher de Careil (Paris, 1854), 234.
12 - **Oeuvres de M. de Fontenelle** (1766), XI, 157. Le Père Castel publie dans les mois suivants un Extrait des **Elémens** dans le Journal de Trévoux.
13 - **UB Basel** MS LIa 692. Sur cette correspondance, voir Michel Blay: "Note sur la correspondance entre Jean I Bernoulli et Fontenelle", **Corpus**, 13 (1989), 93-100.
14 - **UB Basel** MS LIa 692. Voir également **Elémens**, 66.
15 - Lettres en date des 7 juin 1725, 8 mai 1729, 28 juin 1729, 29 août 1729, **UB Basel** MS LIa 692.
16 - Lettres en date des 20 novembre 1728 et 29 mars 1729. Ces lettres ont été publiées par Jacqueline de la Harpe sous le titre "Des inédits de Fontenelle. Sa correspondance avec J.P. de Crousaz", **Revue Historique vaudoise** (juin 1954), 90-108.
17 - Lettre en date du 7 avril 1730, **Oeuvres de M. de Fontenelle** (1766), XI, 40-41.
18 - Lettre en date du 22 septembre 1739, Ibid., 29-30.
19 - **Elémens**, Préface, 11.
20 - **Ibid**., Préface, 13.
21 - **Ibid**., Préface, 14.
22 - Voir infra.
23 - **Elémens,** 1
24 - Ibid., 29.
25 - La Section II est intitulée "De la grandeur infiniment grande". Elle occupe les pages 29 à 57.
26 - **Les étapes de la philosophie mathématique** (Paris, 1912, rééd. Blanchard 1972), 244.
27 - Voir supra.
28 - **Elémens**, 29-30.
29 - **Ibid**., 30. Le symbole ∞ a été emprunté par Fontenelle à Wallis qui l'a utilisé précédemment dans son **De sectionibus conicis** (1655), partie I, Proposition 1. Il ne faut donc pas confondre le nombre infini de Fontenelle qui finalement, et c'est l'une de ses faiblesses, est

à l'intérieur de la "Suite naturelle", avec le nombre cantorien désigné par ω, dans **Grundlagen einer allgemeinen Mannichfaltigkeitslehre** (Leipsig, 1883). Par contre, certains rapprochements peuvent être faits avec les développements récents de l'analyse non standard.

30 - **Elémens**, 30-31.

31 - **Ibid.**. 31-

32 - **Ibid.**, 35. Dans les paragraphes précédents, Fontenelle a bien précisé à l'aide d'exemples ce qu'il faut entendre par "ordres d'infinis".

33 - Galilée, **Discours**, première journée; Louis Couturat, **De l'infini mathématique** (Paris, 1896, rééd. Blanchard 1973), 445-446.

34 - **Elémens**, 59

35 - **Ibid.**, 59

36 - **Ibid.**, 61.

37 - **Ibid.**, 63.

38 - **Ibid.**, 63-64. Dans sa lettre à Jean Bernoulli en date du 22 avril 1725, Fontenelle raisonne à partir des infiniment petits, voir supra,

39 - **Elémens**, 64.

40 - Fontenelle emploie lui-même ici le terme de "paradoxe" pour caractériser la conclusion à laquelle il est parvenu, **Ibid.**, 64.

41 - Fontenelle donne en fait 7 arguments qui se recoupent pour l'essentiel.

42 - Voir supra.

43 - **Elémens**, 65.

44 - Ibid., 66.

45 - Ibid., 66-67.

46 - Ibid., 74 et 82.

47 - **UB Basel** MS LIa 676, fol. 114-118.

48 - **Op. cit.** note 26, 244.

49 - La Section IV de la première partie est intitulée: "De la grandeur infiniment petite". Cette Section occupe les pages 116 à 146.

50 - **Elémens**, 146.

51 - Cette Section occupe les pages 184 à 244.

52 - **Ibid.**, 243.

53 - **Ibid.**, 243.

54 - **Ibid.**, 243.

55 - Cette Section occupe les pages 271 à 310.

56 - **Ibid.**, 310.

57 - Cette Section occupe les pages 311 à 352.

58 - La Section XII est consacrée à la "Règle générale pour déterminer par le calcul différentiel, la courbure des courbes" (pages 353 à 392). Vient ensuite la seconde partie des **Elémens** intitulée: "Différentes applications ou remarques". Cette seconde partie se compose de 8 Sections.

Evolution du concept d'infiniment petit aux 18ème et 19ème siècles

Gert Schubring
Université de Bielefeld

L'intérêt pour l'histoire des quantités infiniment petites, qu'on peut remarquer depuis quelques années, est apparu avec la création d'une *nouvelle* théorie mathématique, l'*analyse non-standard* (NSA). Bien que l'accueil et le développement de cette théorie soient largement redevables à un objectif didactique, au souci tout-à-fait classique de "ne pas rebuter les commençants", d'applanir les entrées dans l'analyse, et donc de supprimer l'appareil technique embarrassant de l'analyse standard pour le remplacer par des notions accessibles intuitivement - bien qu'on pourra donc qualifier la NSA de théorie "didactique", ses promoteurs se sont proposés de trouver les origines historiques de leur programme. Il s'agit donc largement d'un intérêt visant une légitimation, et une grande partie des études historiques entreprises s'inscrivent dans une perspective finaliste qui n'est pas toujours favorable à un approfondissement historique. Ce n'est pas par hasard que la recherche de ses "racines" par la NSA se concentre sur Cauchy - mathématicien tellement fameux qu'il pourra bien servir comme précurseur légitimant la théorie ou même comme père direct de cette théorie.[1]

Pour entreprendre une analyse historique approfondie du concept d'infiniment petit, je souhaite qu'on se libère des contraintes finalistes et qu'on étudie l'évolution de la signification de ce concept dans son contexte historique *contemporain*. Un tel programme de recherche historique implique deux dimensions :

- premièrement, il ne faut pas seulement regarder un concept isolé, comme c'était en général le cas chez ceux qui analysaient le concept de convergence uniforme chez Cauchy, mais il faut plutôt étudier tout un "champ conceptuel" (selon G. Vergnaud), et cela veut dire, pour le concept d'infiniment petit, qu'il faut analyser le système

1 Pour une discussion de cette finalité je peux recommander le livre de Teun Koetsier (*Lakatos' Philosophy of Mathematics*, Amsterdam, 1991), où les textes de Cauchy sont analysés soigneusement et comparés avec les prétentions des adhérents de la NSA.