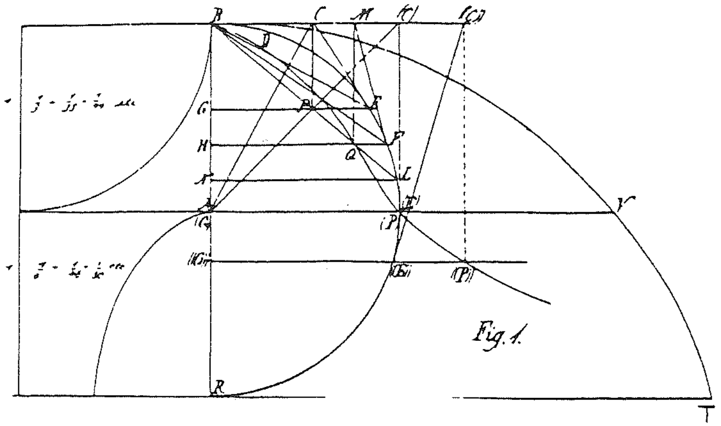
Séries et quadratures chez Leibniz

M.F. Jozeau ; M. Hallez, M. Bühler
Groupe M:A.T.H. - IREM Paris VII



Nous avons présenté deux textes de Leibniz, accompagnés d'une analyse et d'énoncés de problèmes à donner à des élèves du second cycle.

Les documents suivants furent distribués :

La lettre à C. Wolf (publiée en 1713) au sujet de la série 1-1+1-1+1-1 ... qui peut être lue avec des élèves de premières ou Terminales A_1 - S et le compte-rendu d'un travail en $1eA_1$.

La lettre à La Roque pour laquelle nous avons rédigé une succincte "aide à la lecture" et l'énoncé d'un problème niveau terminale C.

Nous concluons par un extrait de **l'Encyclopédie Méthodique** de Diderot et d'Alembert sur les deux séries qui apparaissent dans ces deux lettres, qui, depuis, a fait l'objet de travaux en classe.

Nous avons commencé par une brève présentation de Leibniz.

Leibniz (1646-1716)

Sans entrer dans le détail, voici quelques dates repères de la bibliographie de Leibniz, co-inventeur avec Newton du calcul différentiel. Ses notations se sont imposées par leur efficacité et sont celles utilisées de nos jours.

De formation juridique, il pratique à peu près tous les arts de son temps : sciences, droit, lettres, philosophie...

Voyageant continuellement pour des missions diplomatiques, il écrit beaucoup en carrosse. Sa correspondance est volumineuse ; elle comporte environ 200 000 pages de manuscrits conservées à Hanovre[1].

En 1666, il soutient une thèse de logique **De arte combinatoria**, dans laquelle il traite de considérations sur les combinaisons. Il s'intéresse à des questions de logique formelle.

En 1671, il fait un projet de machine à calculer, reprenant l'idée de Pascal. Au cours de cette étude, il travaille sur des algorithmes. Les considérations algorithmiques qu'il aborde sont très formelles, caractéristiques du travail de Leibniz à cette époque là. En 1672, envoyé comme ambassadeur par le duc de Hanovre, il vient à Paris, période clef pour sa formation mathématique. Huygens lui fait connaître les écrits de Pascal, Cavalieri, Grégoire de St Vincent ... ; il apprend à calculer sur les séries. Comme le souligne Parmentier[2] : *"Leibniz n'a pas commencé par apprendre les maths, il a réalisé la gageure d'y être à la fois néophyte et inventeur"*. Il se rend aussi à Londres, correspond avec Oldenburg, Newton. En réponse à ses questions, Newton lui écrit deux lettres célèbres dans l'histoire des Sciences, connus sous le nom d'Epistola prior et Epistola posterior où il lui expose ses démonstrations, ses découvertes. C'est au cours de cette période qu'il élabore un algorithme qu'il appelle "propre au nouveau calcul"[3]. Le premier article de Leibniz annonçant la découverte de ce calcul date de 1684 (**Nova Methodus** in Acta Eruditorum, octobre 1684). Entre 1672 et cette date, une longue maturation a donc eu lieu. Leibniz raconte l'histoire de ses découvertes dans un texte de 1714, publié seulement à la fin du 19e siècle, **Histoire et origine du calcul différentiel**[4]. Ce calcul sera diffusé très rapidement par les frères Bernouilli, par l'intermédiaire des

---

[1] Certains de ces manuscrits ont été édités par Gerhart

[2] G.W Leibniz : la naissance du calcul différentiel : Marc Parmentier Vrin 1989

[3] Il s'agit bien sûr du calcul différentiel

[4] Traduction et notes in **Les cahiers de Fontenay** I, 1975.

Acta Eruditorum. C'est en 1696, que le Marquis de l'Hospital écrit le premier traité de calcul infinitésimal, faisant ainsi connaître le calcul leibnizien **Analyse des infiniments petits pour l'intelligence des lignes courbes.**

Leibniz est surtout connu pour son invention du calcul différentiel mais ses contributions aux mathématiques sont nombreuses. Des travaux sur les séries ont précédé cette invention du calcul infinitésimal.

Le groupe M : A.T.H. a entrepris au début de l'année 1991-1992 un travail sur l'invention du calcul différentiel de Leibniz. Nous avons voulu avoir accès directement au travail de Leibniz. Nous avons donc cherché à présenter aux élèves des textes originaux de celui-ci. La lettre à Christian Wolf était le texte le plus ancien de Leibniz que nous avions à notre disposition. L'étude de cette lettre forte enrichissante nous a conduit d'une part à un travail avec nos élèves et d'autre part nous a permis peu à peu de suivre un cheminement dans la pensée de Leibniz. Au deuxième paragraphe de cette lettre, il évoque une méthode originale l'ayant fait découvrir que la somme $\frac{dx}{1+x^2}$ fournit la quadrature d'un secteur angulaire. Notre curiosité éveillée, nous avons lu **De vera proportione Circuli** (1682). Or dans le De vera nous n'avons pas trouvé de démonstrations mais seulement des résultats. Parmentier indique[5] que la méthode des métamorphoses est exposée dans une lettre à La Roque. Nous en avons donc pris connaissance.

Lettre au très illustre Christian Wolf, professeur de mathématiques à Halle sur la science de l'infini

(publiée dans les
Acta Eruditorum de Leipzig, supplément tome V, en l'an 1713).

Aide à lecture

L'objet de la lettre est la série :

"1-1 +1-1 +1 etc à l'infini" (notation de Leibniz).

Les mathématiciens contemporains la qualifient de série alternée admettant deux valeurs d'adhérence 0 et 1. Cette série est donc dite **divergente**. Or cette série fut, dans le monde des

---

[5] Parmentier op. cité p. 66

mathématiciens du XVIIe siècle, l'objet de controverses passionnées, comme cette lettre le met en évidence.

Leibniz, pour répondre à la question :
Cette série est-elle sommable ?
propose trois démarches :

1. Dans la première il utilise la somme des séries suivantes :

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\ldots=2$$

$$1+\frac{1}{3}+\frac{1}{9}+\frac{1}{27}+\ldots=\frac{3}{4}$$

connues depuis la publication en 1647 de l'opus Geometricum de Grégoire de Saint-Vincent (1584-1667) et il écrit

$$"\frac{1}{1-x}=1+x+xx+x^3+x^4+\textit{etc. à l'infini} \qquad (1)$$

$$\frac{1}{1+x}=1-x+xx-x^3+x^4-x^5+\textit{etc. à l'infini}" \qquad (2)$$

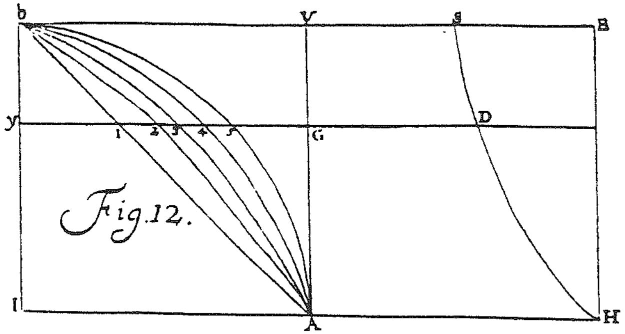
en précisant "*à condition naturellement de supposer en* x *une quantité plus petite que un*". Il attribue la première égalité à Saint-Vincent, la deuxième à Nicolas Mercator (1620-1687).

Il ose alors remplacer x par 1 dans (2) : "*Observons ce qui se passe si* x = 1. *A notre grand émerveillement, il vient alors*

$$\frac{1}{2}=1-1+1-1+1-1+\textit{etc. à l'infini}".$$

La deuxième démarche consiste, à l'aide de la figure du mathématicien et théologien Guido Grandi (1671-1742), à *"mettre à la portée des gens peu familiarisés au calcul abstrait"* ce "*merveilleux*" résultat

Sur]0,1[Grandi représente les courbes dont les ordonnées sont respectivement 1, x, x^2, x^3, x^4, x^5 et la courbe dont l'ordonnée est $1-x+x^2-x^3+\ldots$ c'est à dire la courbe dont l'ordonnée est $\frac{1}{1+x}$.



XXVI – Epistola ad Christianum Wolfium (figure 48)

Pour x = AG < 1 on a GY - G1 + G2 - G3 + G4 - G5 + ... = GD, en nommant 1, 2, 3, 4, 5 les points d'abscisse x = AG. Pour x = 1, le premier membre devient bV - bV + bV - bV + bV - bV + ..., le deuxième membre devient $Vs=\frac{1}{1+1}=\frac{1}{2}$

Conclusion de Grandi : $1-1+1-1\ldots\ldots\ldots=\frac{1}{2}$

Leibniz fait ce commentaire : *"Ceci est en accord avec la loi de continuité ... Dans les continus, on peut considérer une limite externe comme une limite interne"*, que l'on peut interpréter ainsi :
la fonction $x\rightarrow\frac{1}{1+x}$ est continue sur [0,1] ; la série $1-x+x^2\ldots$ est convergente sur [0,1[. Donc en considérant 1 qui est extérieur à [0,1[comme "limite interne", Leibniz étend l'égalité $1-x+x^2\ldots.=\frac{1}{1+x}$ à la valeur x = 1.

La troisième démarche est la plus surprenante, elle consiste à établir une moyenne en probabilité : il y a autant de changes d'obtenir 0 ou 1 pour la somme de cette série puisqu'il y a équiprobabilité du pair et de l'impair dans la suite des entiers naturels. Donc la somme de cette série est $\frac{0+1}{2}=\frac{1}{2}$!

Le pouvoir de conviction est faible pour un mathématicien moderne, mais reste fort pour beaucoup de non-mathématiciens même de nos jours.

Il ne faudrait pas en conclure que Leibniz ne fait aucune considération de convergence : dans une lettre du 26 juin 1705 il écrit à Jean Bernouilli :

"Il me semble que la détermination des limites est une partie essentielle de la théorie des séries si on veut la traiter complètement. En effet dans tous les cas tant que nous ne démontrons pas que la série converge vers le terme inconnu, afin que nous puissions rendre l'erreur plus petite qu'une quantité donnée, nous ne pouvons pas conclure que la série complète donne ce terme".[6] Mais cela n'est pas suffisant pour que Leibniz ne se laisse pas prendre à "l'évidence" géométrique du dessin de Grandi.

Sa réflexion, de plus, ne s'arrête pas là ; quelques mois plus tard le 10 janvier 1714, il écrit au même Bernouilli : *"Si tu y prêtes attention tu remarqueras aisément que lorsque les termes d'une série sont* ***continûment décroissants*** *et alternativement positifs et négatifs la valeur qu'elle exprime converge et est par conséquent fini"*[7]. Il donne là le critère suffisant de convergence d'une série alternée, lequel critère ne s'applique évidemment pas à la série $1 - x + x^2 \ldots$ pour $x = 1$.

Travail avec les élèves. Texte de problème

A. *Travail préliminaire à la lecture du texte de Leibniz*

Dans un repère $(A',\vec{i},\vec{j})$ orthonormal tel que $\|\vec{i}\| = \|\vec{j}\| = 6$ cm, construisez les courbes représentatives des fonctions f, g, h, k, l définies sur [0,1] par :

$f(x) = 1$, $\quad g(x) = x$, $\quad h(x) = x^2$, $\quad k(x) = x^3$, $\quad l(x) = x^4$

Pour chaque fonction vous tracerez avec soin le point d'abscisse $\frac{2}{3}$ et vous nommerez j, b, V, G, Y les points de coordonnées respectives $(0,1)\ (1,1)\ (1,0)\ (\frac{2}{3}, 0)\ (\frac{2}{3}, 1)$.

[6] Parmentier op. cité p. 438 n° 12
[7] Parmentier op. cité p. 439-440 n° 15

Dans un autre repère $(A', \vec{i}, \vec{j})$ de mêmes vecteurs unitaires que le précédent construisez la courbe représentative de la fonction définie sur [0,1] par $m(x) = \frac{1}{1+x}$.

Vous appellerez H, D, S les points de $\mathcal{C}_m$ d'abscisses respectives $0, \frac{2}{3}$ et 1 et B le point de coordonnées (1,0).

B. *Lecture du texte 1* :

I - Justifiez et écrivez en symboles modernes la ligne 11.

II - Justifiez le passage de la ligne 11 à la ligne 14.

III -Justifiez la ligne 18.

IV - Quelles sont les propositions disjonctives dont il est question ligne 42 ? Quelle est la proposition affirmative de la ligne 43 ?

V - Quel commentaire pouvez-vous faire ?

C. *Lecture du texte 2* :

Vous vous servirez des graphiques tracés en A.

Leibniz appelle 1, 2, 3, 4 les points de mêmes abscisses sur les différentes courbes ; on peut utiliser les équivalences de notations suivantes :

$GY = f(x) \quad G1 = g(x) \qquad G2 = h(x) \quad G3 = k(x) \quad G4 = l(x)$

I- Calculez $f(x) - g(x) + h(x) - k(x) + l(x)$ pour $x = \frac{2}{3}$ puis à 10^{-4} près la différence entre cette forme algébrique et $m\,(\frac{2}{3})$.

II- Reprenez la question I pour x = 0,9 et pour x = 0,1.

III- Quelle est la limite quand n tend vers l'infini de

$1 - \frac{2}{3} + (\frac{2}{3})^2 ...... + (-\frac{2}{3})^n$; de $1 - 0{,}9 + 0{,}9^2 .... + (-0{,}9)^n$

et de $1 - 0{,}1 + 0{,}1^2 ..... + (-0{,}1)^n$

IV- Donnez une autre formulation pour les lignes 10 à 12.

V. Quelles conclusions tirez-vous de ces lectures ?

Commentaires

Les objectifs du travail avec les élèves étaient les suivants :

- Révision de la comparaison graphique des fonctions monômes de degré de 0 à 4.
- Utilisation des connaissances sur les séries géométriques
- Approfondissement de la notion de limite.

En classe de 1ère, le travail préliminaire A (Cf. p.6) fut donné à faire à la maison et corrigé en classe avant la distribution des 2 extraits du texte et du devoir B (Cf p.6) l'accompagnant.

En classe de Terminale, les deux travaux A et B sont donnés conjointement.

La correction en classe fut accompagnée de la lecture du texte intégral avec les élèves.

Pour la question B.I, la plupart des élèves utilisèrent $\lim S_n = u_o \frac{1}{1-q}$ pour la suite géométrique $u_n = x^n$, $u_o = 1$ de raison x, avec $0 < x < 1$.

Mais certains justifièrent l'égalité par la division infinie de 1 par 1+x.

Pour la question B.II, les réponses s'équilibrèrent entre l'utilisation de la suite géométrique de raison -x, avec $0 < x < 1$ et la substitution de -x à x ; quelques-uns refirent la division infinie de 1 par 1-x.

Dans l'ensemble, les élèves répondirent correctement aux questions et une vue d'ensemble claire de la partie B se dégageait de

leurs remarques. Il n'en était pas de même pour la partie C dont l'objectif leur parut fort confus jusqu'à la mise en commun des remarques et l'analyse de la figure de l'un d'entre eux agrandie sur transparent.

Le savoureux débat du XVIIe siècle dont la lettre de Leibniz à Wolf se fait l'écho, trouva son répondant dans les virulentes discussions des élèves qui se poursuivirent au café du lycée.

Voici quelques-unes de leurs remarques :

"Quel moyen peut-on utiliser pour obtenir quelque chose de fini à partir de rien ?".

"Est-ce vraiment des riens ?".

"On peut avoir $0 \times \infty = \frac{1}{2}$

par exemple avec $\frac{x+1}{2x+1} = (x+1) \times \frac{1}{2x+1}$

$$\lim_{x \to +\infty} (x+1) = +\infty \qquad \lim_{x \to +\infty} \frac{1}{2x+1} = 0 \qquad \lim_{x \to +\infty} \frac{x+1}{2x+1} = \frac{1}{2}$$ "

"0 ou 1, symbiose du 0 et du 1 à l'infini, l'infini bouclé sur lui-même par la moyenne arithmétique" ....

Je laissais un certain suspense en ne répondant pas tout de suite aux questions "Leibniz a-t-il raison ?".

"Que dit-on aujourd'hui ?" La réponse donnée à la fin de l'heure de correction fut un soulagement pour beaucoup.

Texte 1

Dans la question remise récemment à l'ordre du jour par *Guido Grandi*, vous me demandez si je suis d'avis que $1 - 1 + 1 - 1 + 1$ etc. à l'infini est égal à $\frac{1}{2}$ et comment écarter l'apparente absurdité d'une telle proposition. En effet puisque l'égalité $1 - 1 = 0$ semble se reproduire une infinité de fois, on ne voit pas comment la répétition à l'infini de purs néants pourrait faire $\frac{1}{2}$

Ceux qui, suivant l'exemple du grand Archimède dans sa quadrature de la parabole, ont calculé la somme de termes en progression Géométrique, au premier chef *Grégoire de Saint Vincent* , ont déjà montré que

$\frac{1}{1 - x} = 1 + x + xx + x^3 + x^4 +$ etc. à l'infini, à condition naturellement de supposer en x une quantité plus petite que un. Nicolas Mercator du Holstein a transposé ce résultat en

$\frac{1}{1 + x} = 1 - x + xx - x^3 + x^4 - x^5 +$ etc. à l'infini.

Laissons-là les quadratures et revenons à la série de termes en progression Géométrique (qui me suffit pour ce que je veux faire)

$\frac{1}{1+x} = 1 - x + xx - x^3 +$ etc. à l'infini, ou

$\frac{1}{1+xx} = 1 - xx + x^4 - x^6 +$ etc. à l'infini. Observons ce qui se passe si $x = 1$. A notre grand émerveillement il vient alors :

$\frac{1}{1+1}$ soit $\frac{1}{2} = 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 +$ etc. à l'infini, ce que la figure employée par M. Grandi nous met en quelque sorte sous les yeux.

Il m'appartient à présent de révéler la véritable solution, peut-être inattendue, en tout cas singulière, de cette *énigme*, ainsi que l'explication du *paradoxe*, en me ramenant d'abord à une série finie pour passer ensuite à une série infinie. Remarquons en effet que pour une série finie il faut distinguer deux cas qui, de façon assez surprenante, se confondent dès qu'il s'agit d'une série infinie . Nous pouvons développer une série finie : $1 - 1 + 1 - 1 +$ etc. de deux manières ; elle est ou bien constituée *d'un nombre pair de termes* et se termine par un $-$, comme $1 - 1$, $1 - 1 + 1 - 1$, ou $1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1$, dans ce cas, aussi loin que nous poursuivions, nous obtenons toujours 0. Ou bien la série est constituée *d'un nombre impair de termes* et se termine par un $+$, par exemple $1 - 1 + 1$, $1 - 1 + 1 - 1 + - 1 + 1$, aussi loin que nous poursuivions, tous les cas donnent $+ 1$. Mais lorsque la Série est infinie $1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 +$ etc. à l'infini, au-delà de tout nombre, en même temps que disparaît la notion de nombre, disparaît également la détermination pair impair. Et comme il n'y a pas plus d'arguments en faveur de la parité que de l'imparité, ni par conséquent en faveur d'un résultat égal à 0 ou à 1, le génie admirable de la nature fait que le passage du fini à l'infini s'accompagne du passage de propositions disjonctives (qui disparaissent) à une proposition unique affirmative (qui subsiste), moyen terme entre les deux propositions disjonctives. Or ceux qui ont traité des estimations ont montré que lorsqu'il s'agit de prendre le milieu entre deux quantités ayant même raison d'être , il faut prendre la moyenne Arithmétique, c'est-à-dire la moitié de leur somme ; c'est ainsi que la nature observe ici encore sa loi de justice, par conséquent puisque dans le cas d'un nombre fini de termes la série $1 - 1 + 1 - 1 +$ etc. vaut 0 si le nombre est pair et 1 s'il est impair, lorsque la multiplicité infinie des termes fait disparaître les deux cas, que les prérogatives du pair et de l'impair se confondent, et que l'un et l'autre ont exactement la même raison d'être, nous obtenons par conséquent $\frac{0 + 1}{2} = \frac{1}{2}$ comme je l'avançais.

Texte 2

Soit le carré bJAV, traçons la diagonale Ab ou A_1b, ainsi qu'une infinité de paraboles et de paraboloïdes A_2b, A_3b A_4b, A_5b etc., de sorte que si nous prenions le côté du carré comme unité, que nous notions x l'abscisse AG, et que nous tracions la droite yG normale à AG coupant la diagonale et les paraboloïdes en 1, 2, 3, 4, 5, etc., les ordonnées Gy, G1, G2, G3, G4, G5 etc. soient respectivement 1, x, xx, x^3, x^4 x^5 etc. et qu'en conséquence les segments de droites Gy, G1, G2, G3, G4 etc. soient en progression Géométrique. Ceci posé, prolongeons bV jusqu'à B, avec BV = bV, et yG jusqu'à D de façon que GD soit la réunion des ordonnées alternativement additionnées et soustraites, soit $GD = Gy - G_1 + G2 - G3 +$ etc. ou encore, ce qui revient au même (compte tenu de ce que j'ai dit plus haut), $GD = \frac{1}{VA + AG} = \frac{1}{1 + AG}$. Complétons le carré AVBH et traçons la courbe SDH joignant tous les points D, et coupant AH en H et BV en S ; il est clair que dans le cas où AG = VA = 1 nous aurons $GD = \frac{1}{1 + xx} = \frac{1}{2} =$ VS, c'est-à-dire $GD = \frac{1}{2}BV$; par conséquent dans ce cas, puisque G tombe en V et D en S, $VS = \frac{1}{2}BV$ ou $= \frac{1}{2}AV$. Or comme dans ces conditions tous les points 1, 2, 3, 4, 5 etc. coïncident au même et unique point B, les points G1, G2, G3, G4 etc. deviennent égaux à Gy ou BV, et finalement $Gy - G1 + G2 - G3 +$ etc. devient $BV - BV + BV - BV +$ etc. $= \frac{1}{2}BV$.

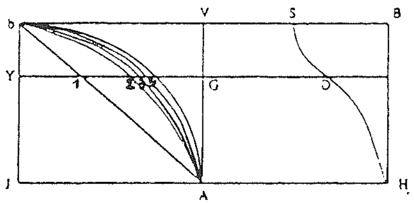


figure 48

Lettre au très illustre Christian WOLF, professeur de mathématiques à Halle, sur la Science de l'Infini? (publiée dans les *Acta Eruditorum* de Leipzig en 1713)

Dans la question remise récemment à l'ordre du jour par *Guido Grandi*, vous me demandez si je suis d'avis que $1 - 1 + 1 - 1 + 1$ etc. à l'infini est égal à $\frac{1}{2}$ et comment écarter l'apparente absurdité d'une telle proposition. En effet puisque l'égalité $1 - 1 = 0$ semble se reproduire une infinité de fois, on ne voit pas comment la répétition à l'infini de purs néants pourrait faire $\frac{1}{2}$. Je constate que M. Grandi confère à l'infini le pouvoir de faire surgir quelque chose à partir de rien, et qu'il entend par là expliquer, non sans élégance, la création du monde, que l'omnipotence Divine tire du néant. Mais la Création n'est pas simple répétition de Néants et suppose l'adjonction d'une réalité nouvelle et positive . J'entends dire également, bien que ses arguments ne me soient pas parvenus, que *M. Marchetti*, Professeur de Mathématiques à Pise, s'est opposé à l'idée de Grandi. Au demeurant, comme l'examen du problème est plaisant et qu'il joue un rôle essentiel pour expliquer la *Science de l'Infini* (dont on ne s'est pas encore occupé comme elle le méritait), il sera bon de reprendre la chose d'un peu plus haut et de la ramener à ses origines. J'ai la conviction que ce ne sera pas pour déplaire à M. Grandi lui-même puisque sur le fond j'approuve sa conclusion, même s'il faudrait selon moi prêter attention à certains de ses raisonnements et de ses déductions pour qu'ils n'aillent pas porter préjudice à la science.

Ceux qui, suivant l'exemple du grand Archimède dans sa quadrature de la parabole, ont calculé la somme de termes en progression Géométrique, au premier chef *Grégoire de Saint Vincent* , ont déjà montré que

$\frac{1}{1 - x} = 1 + x + xx + x^3 + x^4 +$ etc. à l'infini, à condition naturellement de supposer en x une quantité plus petite que un. Nicolas Mercator du Holstein a transposé ce résultat en

$\frac{1}{1 + x} = 1 - x + xx - x^3 + x^4 - x^5 +$ etc. à l'infini, résultat qu'il a démontré, en même temps que le précédent, à partir d'une division continue , bien qu'on puisse aussi le déduire du premier, en remplaçant $- x$ par $+ x$. Il fut également le premier à enseigner, en publiant sa *Logarithmotechnia*, comment déduire de ce résultat une Quadrature par une série infinie ; c'est de cette manière qu'il nous a fait connaître sa Quadrature Arithmétique de l'Hyperbole, et qu'il l'a ensuite mise en relation avec les Logarithmes. Encouragé par son exemple, j'ai eu le bonheur de trouver non seulement que la quadrature de l'Aire ayant pour ordonnée $\frac{1}{1 - xx}$ dépend de la Quadrature de l'Hyperbole, mais aussi semblablement, que $\frac{1}{1 + xx}$ repose sur la Quadrature Arithmétique du Cercle. En effet, puisque (en remplaçant x par xx) $\frac{1}{1 + xx}$ est égal à :

$1 - xx + x^4 - x^6 + x^8 - x^{10} +$ etc. à l'infini, il s'ensuivait que $\int \frac{dx}{1 + xx}$ (une méthode originale m'avait fait découvrir que cette somme fournit la quadrature d'un secteur circulaire) , serait :

$\int dx - \int xx\,dx + \int x^4\,dx - \int x^6\,dx +$ etc. à l'infini, c'est-à-dire (en faisant appel à la Quadrature des Paraboloïdes qui nous est connue) $\frac{x}{1} - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} +$ etc. Dès lors, dans le cas où $x = 1$, il vient :

$1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} +$ etc. à l'infini, et le rapport de cette série à l'unité est celui de l'aire d'un Cercle au carré de son Diamètre. La première année où ont paru les Actes de la République des Lettres de Leipzig, j'ai fait connaître ce résultat découvert bien longtemps auparavant. Plus tard dans ces mêmes Actes, j'ai donné la formule générale rassemblant en un unique théorème la Quadrature des secteurs de toutes les Coniques à centre . C'est ce que M. Grandi a voulu, dans une intention louable, mettre à la portée des gens peu familiarisés au calcul abstrait, en le démontrant à sa manière sur une figure, pour donner plus de prise à l'imagination ; lorsque dans ma jeunesse je résidais à Paris, j'avais eu moi-même l'intention de publier quelque chose d'analogue (mais applicable également à d'autres résultats apparentés), et en même temps d'éclaircir l'origine de leur découverte, qui n'est peut-être pas encore bien limpide aujourd'hui. Mais, appelé à d'autres tâches, j'ai suspendu ce projet. Il est naturellement bien plus facile de démontrer les inventions que d'en dévoiler l'origine et de faire ainsi progresser l'art d'inventer lui-même

Laissons-là les quadratures et revenons à la série de termes en progression Géométrique (qui me suffit pour ce que je veux faire)

$\frac{1}{1+x} = 1 - x + xx - x^3 +$ etc. à l'infini, ou

$\frac{1}{1+xx} = 1 - xx + x^4 - x^6 +$ etc. à l'infini. Observons ce qui se passe si $x = 1$. A notre grand émerveillement il vient alors :

$\frac{1}{1+1}$ soit $\frac{1}{2} = 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 +$ etc. à l'infini, ce que la figure employée par M. Grandi nous met en quelque sorte sous les yeux.

Soit le carré bJAV, traçons la diagonale Ab ou A_1b, ainsi qu'une infinité de paraboles et de paraboloïdes A_2b, A_3b A_4b, A_5b etc., de sorte que si nous prenions le côté du carré comme unité, que nous notions x l'abscisse AG, et que nous tracions la droite yG normale à AG coupant la diagonale et les paraboloïdes en 1, 2, 3, 4, 5, etc., les ordonnées Gy, G1, G2, G3, G4, G5 etc. soient respectivement 1, x, xx, x^3, x^4 x^5 etc. et qu'en conséquence les segments de droites Gy, G1, G2, G3, G4 etc. soient en progression Géométrique. Ceci posé, prolongeons bV jusqu'à B, avec BV = bV, et yG jusqu'à D de façon que GD soit la réunion des ordonnées alternativement additionnées et soustraites, soit $GD = Gy - G_1 + G2 - G3 +$ etc. ou encore, ce qui revient au même (compte tenu de ce que j'ai dit plus haut), $GD = \frac{1}{VA + AG} = \frac{1}{1 + AG}$. Complétons le carré AVBH et traçons la courbe SDH joignant tous les points D, et coupant AH en H et BV en S ; il est clair que dans le cas où AG = VA = 1 nous aurons $GD = \frac{1}{1 + xx} = \frac{1}{2} =$ VS, c'est-à-dire $GD = \frac{1}{2}BV$; par conséquent dans ce cas, puisque G tombe en V et D en S, $VS = \frac{1}{2}BV$ ou $= \frac{1}{2}AV$ Or comme dans ces conditions tous les points 1, 2, 3, 4, 5 etc coïncident au même et unique point B, les points G1, G2, G3, G4 etc deviennent égaux à Gy ou BV, et finalement $Gy - G1 + G2 - G3 +$ etc devient $BV - BV + BV - BV +$ etc. $= \frac{1}{2}BV$.

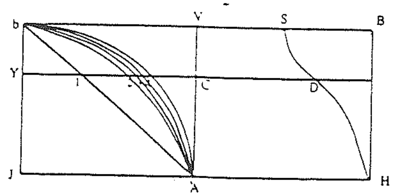


figure 48

Ceci est en accord avec la *Loi de Continuité* que j'ai proposée pour la première fois dans les Nouvelles de la République des Lettres de Bayle et appliquée aux Lois du Mouvement . Elle entraîne que *dans* *les continus, on peut considérer une limite externe comme une limite interne* , si bien que le dernier cas, même s'il est de nature complètement différente, est compris dans la loi générale gouvernant les autres ; dès ce moment, de manière paradoxale et pour ainsi dire, par une *Figure Philosophico-rhétorique*, nous pouvons considérer le point par rapport à la ligne, le repos par rapport au mouvement, comme des cas particuliers compris dans le cas général inverse , le point apparaissant comme une ligne infiniment petite, évanescente, ou le repos comme un mouvement évanescent . De même pour d'autres formules du même genre, que l'homme très profond qu'était *Joachim Jung* aurait nommées *vraies par tolérance* et qui sont des plus utiles pour l'art d'inventer, même si à mon avis elles enveloppent quelque chose de fictif et d'imaginaire. Car en les ramenant à des expressions ordinaires, il est très facile de les corriger et d'écarter tout risque d'erreur. Au reste la nature, qui procède toujours pas à pas et non par sauts, ne saurait violer la loi de continuité .

Mais apparaît ici l'objection pertinente que M. Marchetti et vous-même avez soulevée. Puisque BV – BV soit 1 – 1 = 0, n'en résulte-t-il pas que BV – BV + BV – BV + etc. à l'infini, soit

1 – 1 + 1 – 1 + 1 – 1 + etc. à l'infini, se réduit à

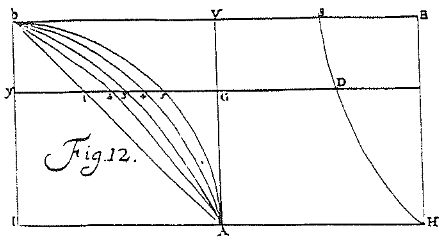
0 + 0 + 0 + 0 + 0 + etc. à l'infini ? On ne voit pas comment cela pourrait faire $\frac{1}{2}$. M. Grandi tente avec ingéniosité de lever l'objection en recourant à une analogie. Il imagine que deux frères devant partager un patrimoine découvrent dans l'héritage de leur père une pierre de très grande valeur, dont le testament interdise la vente ; ils conviennent donc entre eux de la déposer alternativement pour un an dans leur bibliothèque respective. De cette façon, à supposer que les héritiers respectent éternellement cette règle, la descendance de chaque frère se voyant accorder puis retirer la pierre une infinité de fois, en possèderait juridiquement exactement la moitié.

Mais à y regarder de plus près, cette analogie est trop claudicante. *Premièrement* parce que dans le cas qui nous occupe (M. Grandi le reconnaît lui-même), tout repose sur un privilège conféré à l'infini, de pouvoir de lui-même, par simple répétition, produire quelque chose à partir de Rien. Or dans le cas du partage d'un patrimoine, la situation reste inchangée s'il y a un nombre fini d'années. Imaginez en effet que la pierre échoie aux deux frères non par héritage paternel, mais par le legs d'un ami, et qu'ils n'en obtiennent pas la propriété perpétuelle, mais seulement l'usufruit pour cent ans ; il est clair, dès l'instant où ils la possèdent une année sur deux, que leurs droits respectifs seront les mêmes. Mais dans notre cas, si nous écrivons cent fois de suite l'unité, en faisant alternativement une addition puis une soustraction, c'est-à-dire si nous écrivons 50 fois ou même 50000 fois 1 – 1, il en résultera toujours 0.

Deuxièmement la différence tient à ce que dans le cas d'un droit commun à deux personnes possédant une chose tour à tour, ce qui est accordé puis ôté n'est pas la totalité du droit sur cette chose, mais le droit d'en user pendant un an, ce qui ne fait que de petites portions du droit total ; si nous répartissons celui-ci par années et que nous en concèdions l'usufruit pour cent ans, l'usufruit pour un an n'est, de toute évidence, que la centième partie du droit total, de ce fait puisque chacun en obtient de cette manière cinquante centièmes, nous voyons bien que chacun détient la moitié du titre. Mais dans notre cas c'est l'unité elle-même, le tout lui-même (non de petites parts), qui sont tantôt accordés, tantôt soustraits. C'est pourquoi, bien que séduisante, si nous l'examinons en détail, cette analogie laisse le problème entier.

Il m'appartient à présent de révéler la véritable solution, peut-être inattendue, en tout cas singulière, de cette *énigme*, ainsi que l'explication du *paradoxe*, en me ramenant d'abord à une série finie pour passer ensuite à une série infinie. Remarquons en effet que pour une série finie il faut distinguer deux cas qui, de façon assez surprenante, se confondent dès qu'il s'agit d'une série infinie . Nous pouvons développer une série finie : 1 – 1 + 1 – 1 + etc. de deux manières ; elle est ou bien constituée *d'un nombre pair de termes* et se termine par un –, comme 1 – 1, 1 – 1 + 1 – 1, ou 1 – 1 + 1 – 1 + 1 – 1, dans ce cas, aussi loin que nous poursuivions, nous obtenons toujours 0. Ou bien la série est constituée *d'un nombre impair de termes* et se termine par un +, par exemple 1 – 1 + 1, 1 – 1 + 1 – 1 + – 1 + 1, aussi loin que nous poursuivions, tous les cas donnent + 1. Mais lorsque la Série est infinie 1 – 1 + 1 - 1 + 1 – 1 + etc. à l'infini, au-delà de tout nombre, en même temps que disparaît la notion de nombre, disparaît également la détermination pair-impair. Et comme il n'y a pas plu d'arguments en faveur de la parité que de l'imparité, ni par conséquen en faveur d'un résultat égal à 0 ou à 1, le génie admirable de la natur fait que le passage du fini à l'infini s'accompagne du passage d propositions disjonctives (qui disparaissent) à une proposition uniqu affirmative (qui subsiste), moyen terme entre les deux proposition disjonctives. Or ceux qui ont traité des estimations ont montré qu lorsqu'il s'agit de prendre le milieu entre deux quantités ayant mêm raison d'être , il faut prendre la moyenne Arithmétique, c'est-à-dir la moitié de leur somme ; c'est ainsi que la nature observe ici encore sa loi de justice, par conséquent puisque dans le cas d'un nombre fini de termes la série 1 – 1 + 1 – 1 + etc. vaut 0 si le nombre est pair et 1 s'il est impair, lorsque la multiplicité infinie des termes fait disparaître les deux cas, que les prérogatives du pair et de l'impair se confondent, et que l'un et l'autre ont exactement la même raison d'être, nous obtenons par conséquent $\frac{0+1}{2} = \frac{1}{2}$ comme je l'avançais.

J'ajoute que même si ce type d'argumentation semble plus Métaphysique que Mathématique, il ne laisse pas d'être solide. Au reste les Règles *de la Véritable Métaphysique* (celle qui ne se contente pas de dresser des nomenclatures) sont en Mathématiques, en Analyse et même en Géométrie, d'un usage plus étendu qu'on n'imagine. En l'occurrence nous avions déjà un autre moyen de savoir, grâce au raisonnement que j'ai indiqué au début, que VS est $\frac{1}{2}$ BV (les ordonnées GD étant $\frac{1}{1+AG}$ il en résulte que lorsque AG devient AV, c'est-à-dire 1, VS devient $\frac{1}{1+1}$). Or nous aurions pu égalemen montrer qu'en prenant G arbitrairement voisin de V, GD devient à son tour aussi voisin de $\frac{1}{2}$ BV qu'on le souhaite, de façon que nous puissions rendre la différence inférieure à toute quantité donnée. Par conséquent, par la manière de raisonner d'Archimède nous obtenons également que VS vaut $\frac{1}{2}$ BV. Au demeurant le fait d'aboutir au même résultat à la fois par les propriétés des séries et par celles de l'infin n'est pas seulement source de satisfaction, ce sera aussi une aide trè précieuse pour construire des raisonnements rigoureux sur l'infini e dévoiler de mieux en mieux les origines de notre nouvelle théorie. O prendra garde du même coup à ne pas porter préjudice à la nouvell science en recourant à des paradoxes insoutenables. Ainsi lorsqu'o nous objectait que des quantités nulles si nombreuses soient elles n pouvaient rien donner de réel , il ne fallait pas répondre e distinguant entre le fini et l'infini, au sens où cette règle ne vaudrait pa pour l'infini, mais il fallait reconnaître la valeur générale de la règle e montrer, comme je viens de le faire, qu'il n'y a pas lieu de l'applique ici .

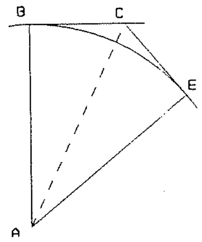


XXVI – Epistola ad Christianum Wolfium (figure 48)

Lettre à La Roque

Aide à la lecture

Paragraphe 3 :



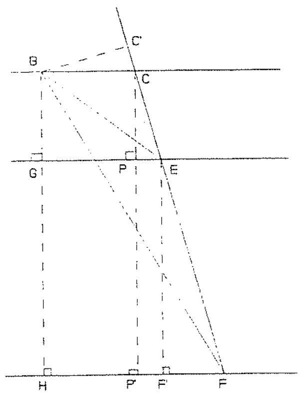
Pour un arc donné $\widehat{BE}$ dans un cercle de rayon 1, on pose b = BC. b est donc la tangente de la moitié de l'arc BE.

"La grandeur de l'arc" : il s'agit de l'aire du secteur circulaire BAE (c'est à dire de la moitié de la longueur de l'arc $\widehat{BE}$ puisque, si t est la mesure d'un arc en radians, le secteur correspondant a pour aire $\frac{1}{2}$ t).

On reconnaît dans $\frac{b}{1} - \frac{b^3}{3} + \frac{b^5}{5} - \frac{b^7}{7}$ .... le développement en série d'Arctan b.

Pour un arc $\widehat{BE} = \frac{\pi}{2}$, on obtient $\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7}$ ..... qui est aussi l'aire du cercle de diamètre 1.

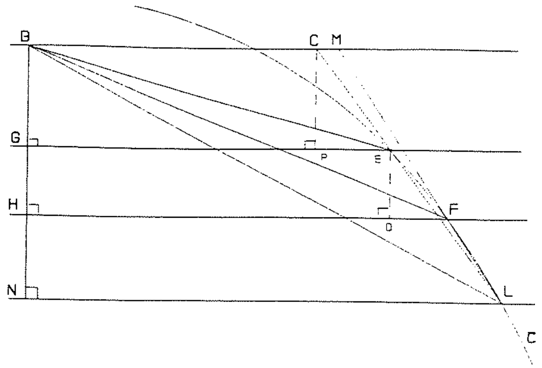
Paragraphe 4 : la méthode des métamorphoses



Lemme (BC), (GE), (HF) sont trois parallèles passant par les sommets B, E, F d'un triangle donné et C, E, F alignés.
Alors : le rectangle GPP'H a une aire double de celle du triangle BEF.
Leibniz omet la **démonstration de ce lemme** : projetons orthogonalement B en C' sur (EF) et E en F' sur (HF). Les triangles BCC' et EFF' sont semblables $\hat{C'} = \hat{F'}$ = un droit et (BC) parallèle à (HF) donc $\hat{C} = \hat{F}$). On a donc : $\frac{BC'}{EF'} = \frac{BC}{EF}$
i.e
BC' × EF = BC × EF'.

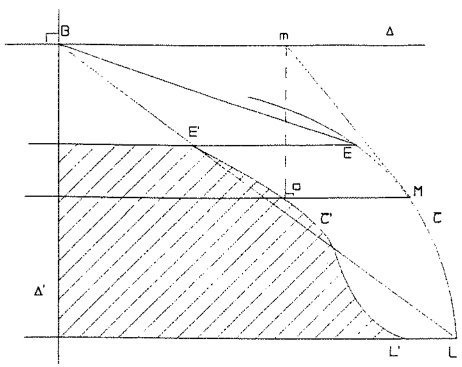
Or : BC' × EF = hauteur x base = 2 × aire du triangle BEF
BC × EF' = GP × PH = aire du rectangle GPP'H

Application du lemme à une courbe $\mathfrak{C}$



E, F, L sont des points de $\mathfrak{C}$.
. L'aire du rectangle construit sur GPH est le double de l'aire du triangle BEF.
. L'aire du rectangle construit sur HQN est le double de l'aire du triangle BFL.
etc ....

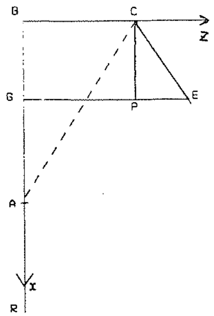
Si les bases EF, FL, etc deviennent infiniment petites, alors (EF), (FL), etc deviennent les tangentes à la courbe en E, F, etc et la somme des aires des triangles BEF, BFL, etc est l'aire de l'espace BEL limité par la courbe $\mathfrak{C}$ et les droites (BE) et (BL).
On a donc remplacé une quadrature par une autre :



On transforme $\mathfrak{C}$ en $\mathfrak{C}'$ de la manière suivante : en tout point M de $\mathfrak{C}$, on trace la tangente à $\mathfrak{C}$ qui coupe Δ en m. On projette m orthogonalement en P sur la parallèle à Δ passant par M.

Alors, lorsque M décrit $\mathfrak{C}$, P décrit une courbe $\mathfrak{C}'$ et l'aire hachurée est le double de l'aire de l'espace BEL limité par $\mathfrak{C}$, (BE) et (BL).

Paragraphe 5 : application de la méthode à la quadrature du cercle.



Le point E parcourt un arc de cercle, P parcourt la "transformée" $\mathfrak{C}'$ dont on cherche l'équation.
On pose BC = z et BG = x
Les triangles BCA et BGE sont semblables (en effet $\hat{G} = \hat{B}$ = un droit et $\hat{E} = \hat{A}$ car ce sont des angles à côtés perpendiculaires). On a donc $\frac{BC}{GB} = \frac{CA}{EB}$

donc $EB^2 = CA^2 \times \frac{GB^2}{BC^2}$.

Comme le triangle BER est rectangle en R, $EB^2 = BG \times BR$;
on a donc : $\frac{BR}{GB} = \frac{CA^2}{BC^2}$ ("raison doublée").
Si AB = a (rayon), on a :

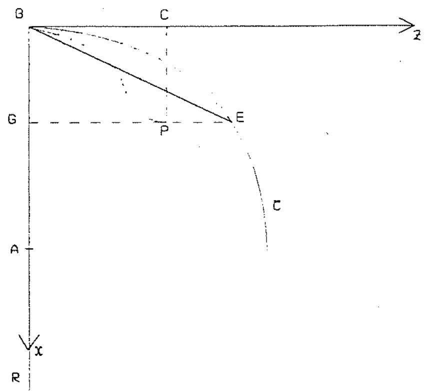
$AC^2 = BC^2 + AB^2 = a^2 + z^2$, $\quad BC^2 = z^2$

$BR = 2a \quad$ donc $\quad \frac{2a}{x} = \frac{a^2 + z^2}{z^2}$

$GB = x \quad\quad x = \frac{2a\, z^2}{a^2 + z^2}$

Lorsque le rayon de $\mathfrak{C}$ est 1, l'équation obtenue est :

$$x = \frac{2z^2}{1 + z^2}$$



L'aire curviligne $\mathbb{A}_1$ limitée par (BR), (GE) et $\mathfrak{C}'$ (en pointillés) est le double de l'aire $\mathbb{A}_2$ du segment de cercle BE (limité par $\mathfrak{C}$ et (BE)).

Première étape : on calcule l'aire $\mathbb{A}_3$ (hachurée) limitée par (BC), (CP) et $\mathcal{C}'$.

$$\frac{x}{2} = \frac{z^2}{1+z^2} = z^2 - z^4 + z^6 - z^8 + ...$$

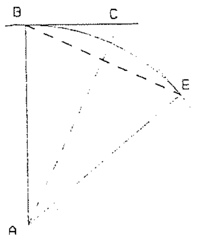
"La somme de tous les x" : pour nous c'est $\int_0^b f(z)\,dz$ si $x = f(z)$

donc c'est $2\int_0^b (z^2 - z^4 + ...)\,dz = 2\left(\frac{b^3}{3} - \frac{b^5}{5} + \frac{b^7}{7} - \frac{b^9}{9} + ...\right)$

[*"La première de toutes les z étant infiniment petite .... la somme de toutes les z^2 sera $\frac{b^3}{3}$, ..."* correspond à ce que nous écrivons $\int_0^b z^2\,dz = \frac{b^3}{3}$].

Or $\mathbb{A}_3$ est la différence entre l'aire du rectangle BCPG et $\mathbb{A}_1$, elle-même double de $\mathbb{A}_2$ ("la différence entre le rectangle CBG et le double du segment de cercle").

Deuxième étape :



L'aire du secteur ABE est égale à l'aire $\mathbb{A}_2$ du segment de cercle ajoutée à l'aire du triangle BAE qui vaut (après calcul) $\frac{b}{1+b^2}$.

On obtient finalement :
l'aire du secteur BAE vaut :

$$\mathbb{A} = \underbrace{\frac{b}{1+b^2}}_{\text{triangle BAE}} + \frac{1}{2}\Big(\underbrace{\frac{2b^3}{1+b^2}}_{\text{rectangle BCPG}} - 2\underbrace{\left(\frac{b^3}{3} - \frac{b^5}{5} + \frac{b^7}{7} - \frac{b^9}{9} - ....\right)}_{\mathbb{A}_3 \text{ (aire hachurée)}}\Big)$$

$$\mathbb{A} = b\left(\frac{1}{1+b^2} + \frac{b^2}{1+b^2}\right) - \left(\frac{b^3}{3} - \frac{b^5}{5} + \frac{b^7}{7} ....\right)$$

$$\mathbb{A} = b - \frac{b^3}{3} - \frac{b^5}{5} + \frac{b^7}{7} ......$$

Ce qui termine la démonstration.
On remarque, comme toujours à cette époque, qu'on ne voit apparaître aucune préoccupation explicite de convergence.

Travail avec les élèves. texte de problème (niveau T.C.)

Quadrature du cercle à la manière de ....Leibniz

Les deux parties, bien que liées, sont indépendantes en grande partie. On peut toujours utiliser les résultats des diverses questions dans la suite du problème.

Le but du problème est de trouver une expression de π sous forme de limite d'une suite de nombres rationnels.

Partie A. Etude d'une fonction et approximation d'une aire

On définit la fonction f sur l'intervalle [0,1] par :

$$z \longrightarrow f(z) = \frac{2z^2}{1+z^2}$$

1°) Tracer la courbe représentative de f dans un repère orthonormé (unité : 8 cm) (on étudiera la position de la courbe par rapport à sa tangente au point d'abscisse $\frac{1}{\sqrt{3}}$).

2°) Donner une interpréation géométrique du nombre

$$A = \int_0^1 f(z)\,dz$$

Le but des questions suivantes est de déterminer une suite convergeant vers A.

3°) a) Montrer que, pour tout n de $\mathbb{N}$ et tout z de $\mathbb{R}$, on a :

$$\frac{1}{1+z^2} = 1 - z^2 + z^4 - z^6 + \ldots\ldots + (-1)^n z^{2n} + (-1)^{n+1} \frac{z^{2n+2}}{1+z^2}.$$

b) En déduire une expression de A sous forme de la somme d'un nombre rationnel et d'une intégrale qu'on ne cherchera pas à calculer (tous deux dépendant de n).

c) On pose $\quad R_n = (-1)^{n+1} \displaystyle\int_0^1 \frac{z^{2n+4}}{1+z^2}\,dz$ et

$$u_n = \frac{1}{3} - \frac{1}{5} + \frac{1}{7} - \frac{1}{9} + \ldots\ldots + (-1)^n \frac{1}{2n+3}$$

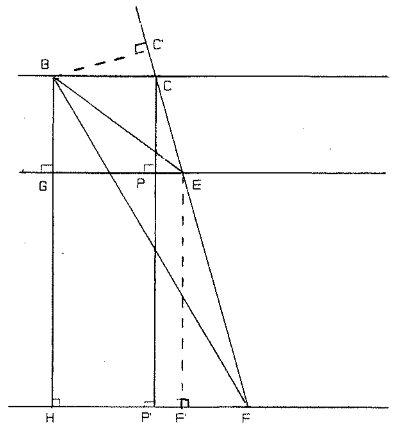
Montrer : $|R_n| < \dfrac{1}{2n+5}$ et en déduire $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} u_n$

d) Donner une valeur approchée par défaut à 10^{-3} près de u_5, u_{50}, u_{500}.

Partie B : Métamorphose d'un cercle

1°) Lire le texte suivant, extrait d'une lettre de Leibniz, écrite à La Roque, directeur du *Journal des Savants.*

Pour cet effect je me suis servi de ce lemme: Trois paralleles BC, GE, HF (fig. 1), passant par les trois angles d'un triangle BEF et un des costez EF estant prolongé jusqu'à la rencontre d'une des paralleles en C, le rectangle sous l'intervalle BC entre le point de rencontre C et l'angle B, par lequel passe cette parallele, et sous GH, la distance des deux autres paralleles GE, HF, c'est à dire le rectangle PGH (en supposant BGH normale à BC, et CP égale et parallele à BG) sera le double du Triangle BEF. De même, si HQ égale à BM, le rectangle QHN sera égal au double Triangle BFL.



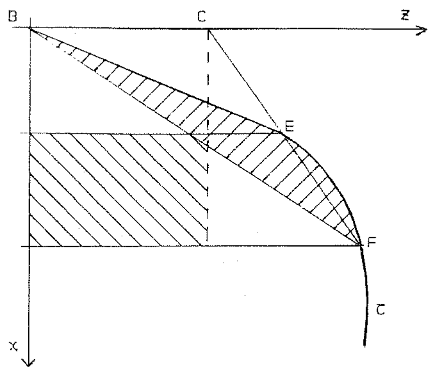
C, E, F sont alignés. (BC), (GE), (HF) sont parallèles. Le rectangle GPP'H a une aire double de celle du triangle BEF. Les questions a) et b) sont destinées à vous aider à démontrer cette assertion.

a) On projette orthogonalement B en C' sur (EF) et E en F' sur (HF).

Montrer que les triangles BCC' et EFF' sont semblables.

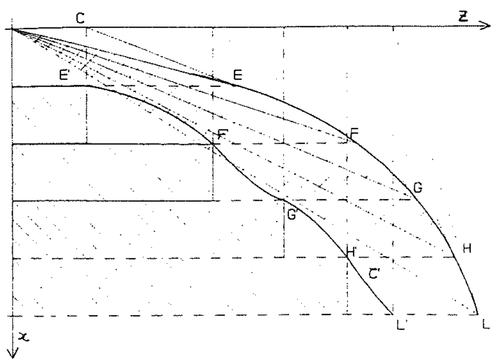
b) En déduire BC' × EF = BC × EF' et démontrer l'assertion de Leibniz.

2°) Voici ce qu'explique Leibniz dans la suite de sa lettre.



B point donné ("origine du repère formé par les axes (Bz) et (Bx), E et F deux points d'une courbe $\mathcal{C}$.
Si E et F sont très proches, la droite (EF) est la tangente à $\mathcal{C}$ en E et le triangle BEF limitée par l'arc EF de la courbe $\mathcal{C}$ et les droites (BE) et (BF).
Le 1°) dit alors :
L'aire hachurée est le double de l'aire pointillée.

En faisant ce travail en chaque point de la courbe, on obtient le résultat suivant :

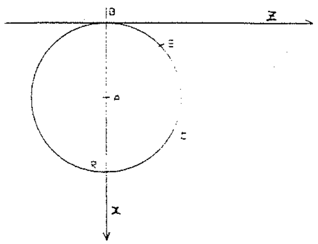


B origine du repère (Bz) (Bx). En chaque point E de $\mathcal{C}$, on trace la tangente à $\mathcal{C}$, qui coupe (Bz) en C et on projette C orthogona-lement en E' sur la parallèle à (Bz) passant par E. E' décrit une courbe $\mathcal{C}'$ lorsque E décrit $\mathcal{C}$.

L'aire hachurée (assimilable à l'aire du domaine limité par (Bx), (EE''), (LL''), $\mathcal{C}'$) est le double de l'aire pointillée (du domaine limité par $\mathcal{C}$, (BE), (BL).

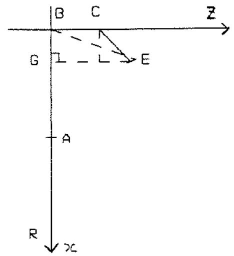
3°) Leibniz utilise alors ce résultat pour déterminer l'aire d'un cercle de rayon 1.

a)



Reproduire la figure et tracer le point E' de la courbe $\mathcal{C}'$ correspondant au point E.
(A : centre du cercle).

b) Nous allons chercher l'équation de $\mathcal{C}'$ dans le repère formé par B, (Bx), (Bz). (Le rayon du cercle est 1).



On pose BC = z et BG = x.
. Montrer que les triangles BCA et GBE sont semblables et en déduire

$EB^2 = CA^2 \cdot \frac{GB^2}{BC^2}$

. Montrer $\frac{BR}{GB} = \frac{CA^2}{BC^2}$

En déduire l'expression de x en fonction de z.

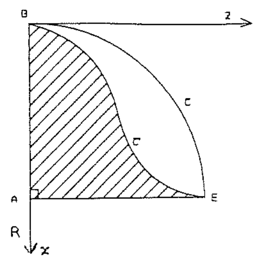
Lire l'extrait suivant de la lettre de Leibniz :

Car la courbe E(E)((E)) estant un arc de cercle, la courbe des interceptées, sçavoir BP(E)((P)), se pourra rapporter à l'angle droit RBC par cette equation $\frac{2az^2}{a^2+z^2} \sqcap x$, appellant BG ou CP, x et BC ou GP, z, c'est à dire RB sera à BG en raison doublée de AC à BC, comme il est aisé de demonstrer.

La courbe E(E) ((E)) est la courbe $\mathcal{C}$. La courbe BP(E)((P)) est la courbe $\mathcal{C}'$. ; a est le rayon de $\mathcal{C}$ (a = 1).

Que signifie l'expression :

"RB sera à BG en raison doublée de AC à BC"



B est l'origine du repère dont les axes sont (Bz) et (Bx).
a) Donner une expression de l'aire du domaine limité par $\mathcal{C}'$, (Bz) et la droite d'équation z = 1 à l'aide d'une intégrale.
b) En déduire une expression de l'aire hachurée (domaine limité par $\mathcal{C}'$, (Bx), la droite d'équation x = 1).

c) On a vu que l'aire hachurée est le double de l'aire du domaine limité par la corde (BE) et l'arc BE du cercle. Déduire de ce qui précède une expression de l'aire $\mathbb{A}$ du quart de cercle ABE à l'aide d'une intégrale.

d) En utilisant la partie A, exprimer $\mathbb{A}$ comme limite d'une suite de nombres rationnels.

Quelle est la valeur exacte de $\mathbb{A}$? Qu'en conclure pour π ?

Lire le texte de Leibniz (nous avons travaillé dans le cas particulier où BAE est un angle droit ce qui correspond à b = 1).

Et pour y arriver il faut se servir de la belle methode de Nicolaus Mercator, selon laquelle, puisque *a* estant l'unité et $\frac{x}{2}$ égal à $\frac{z^2}{1+z^2}$, la même x sera égale à $z^2 - z^4 + z^6 - z^8$ etc. à l'infini, et la somme de toutes les x égale à la somme de toutes les $z^2 - z^4$ etc. Or la premiere de toutes les z estant infiniment petits, et la derniere estant d'une certaine grandeur, comme BC que nous appellerons b, la somme de toutes les z^2 sera $\frac{b^3}{3}$, et la somme de toutes z^4 sera $\frac{b^5}{5}$ etc. (par la quadrature des paraboles), donc la somme de toutes les x ou l'espace BCPB, ou la difference du rectangle CBG et du double segment du cercle BEB sera $\frac{b^3}{3} - \frac{b^5}{5} + \frac{b^7}{7} - \frac{b^9}{9}$ etc. donc (par une suite assez aisée de la Geometrie ordinaire) l'arc BDE sera $\frac{b}{1} - \frac{b^3}{3} + \frac{b^5}{5} - \frac{b^7}{7}$ etc. le rayon estant 1 et BC, touchante de la moitié de l'arc, estant appellée b. Ce qu'il falloit demonstrer.

A quelle époque vivait Leibniz ? En avez-vous entendu parler à d'autres cours ?.

. Pouvez-vous donner une définition du nombre π ?

Quelles approximations de π connaissez-vous ? Connaissez-vous des méthodes permettant de justifier ces approximations ?

Lettre à La Roque, Directeur du Journal des Savants.

I.

Monsieur

La quadrature Arithmetique du Cercle et de ses segments ou secteurs, que j'ay trouvée et communiquée à plusieurs excellens Geometres il y a déja quelques années, leur a paru assez extraordinaire, et ils m'ont exhorté d'en faire part au public. Mais comme je n'aime pas d'écrire un volume farci d'un grand nombre de propositions repassées pour donner une seule qui soit nouvelle et considerable, j'ay recours à Vostre Journal qui nous donne le moyen de publier un theoreme sans faire un livre.

Quadrature Arithmetique est, qui exprime la grandeur de la figure proposée par un rang infini de nombres rationaux ou commensurables à une grandeur donnée, ce qui suffit pour l'Arithmetique lorsqu'on ne le sçauroit faire par un nombre rationel fini, car l'arithmetique ne connoist les nombres irrationaux qu'autant qu'elle les peut exprimer par les rationels soit finis soit infinis. Et il n'est pas difficile de donner même un rang infini de nombres rationaux égal à une racine sourde, ce que je croy d'avoir fait le premier, en......*) la division dans une extraction continuée.

La quadrature Arithmetique du Cercle et de ses parties peut estre comprise dans ce theoreme: Le rayon du Cercle estant l'unité, et la tangente BC de la moitié BD d'un arc donné BDE estant appellée b, la grandeur de l'arc sera: $\frac{b}{1} - \frac{b^3}{3} + \frac{b^5}{5} - \frac{b^7}{7} + \frac{b^9}{9} - \frac{b^{11}}{11}$ etc. Or les arcs estant trouvez, il est aisé de trouver les espaces, et le corollaire de ce theoreme est que le Diametre et son quarré estant 1, le Cercle est $\frac{1}{1} - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \frac{1}{11}$ etc. L'usage de cette quadrature est qu'outre la beauté d'un theoreme aussi simple et aussi surprenant que celuy-ci, vous avons un moyen de trouver les angles par les costez et a rebours; item les espaces ou portions des Cercles, Ellipses, Cones, Spheres, Spheroides et de leur surfaces, le tout par une simple addition de nombres rationaux ou grandeurs commensurables au defaut même de tables toutes calculées, et sans polygones, dont le calcul demande une extraction perpetuelle de racines, outre qu'ainsi on approchera bien viste; car si *b* par exemple ou BC estoit $\frac{1}{10}$ du rayon, b^{11} seroit $\frac{1}{100000000000}$ et par consequent toutes les puissances plus hautes pourront negligées hardiment. Ce qui serviroit à continuer les tables, et à les rendre plus exactes sans beaucoup de peine.

Or comme il n'y a rien de si important que de voir les origines des inventions qui valent mieux à mon avis que les inventions mêmes, à cause de leur fecondité et par ce qu'elles contiennent en elles la source d'une infinité d'autres qu'on en pourra tirer par une certaine combinaison (comme j'ay coûtume de l'appeller) ou application à d'autres sujets lors qu'on s'avisera de la faire comme il faut; j'ay crû estre obligé de faire part au public de l'origine de celle-cy. J'ay donc consideré, que les quadratures que nous avons trouvées jusqu'icy par l'analyse ordinaire, dependent des regles Arithmetiques de trouver les sommes des rangs reglés, ou des progressions de nombres rationaux. Mais les données du cercle estant irrationelles, j'ay taché de transforme cercle en une autre figure, du nombre de celles que j'appelle tionelles, c'est à dire dont les ordonnées sont commensurable leurs abscisses. Pour cet effect j'ay fait le dénombrement de quai de Metamorphoses, et les ayant essayées par une combinaison aisée (car je pourrois par ce moyen écrire en une heure de te une liste de plus de 50 figures planes ou solides, differentes, neantmoins dependentes de la circulaire) j'ay trouvé bientost moyen que je m'en vays expliquer. J'ay crû cependant à pro de remarquer cecy en passant pour justifier ce que j'avois dit tresfois de l'utilité des combinaisons pour trouver des choses l'algebre et si vous voulez, l'analyse même telle que nous l'av ne sçauroit donner. Or le moyen que les combinaisons m' offert sert à trouver un nombre infini de figures commensural à une figure donnée. Pour cet effect je me suis servi de ce lemi Trois paralleles BC, GE, HF (fig. 1), passant par les trois an d'un triangle BEF et un des costez EF estant prolongé jusqu'à rencontre d'une des paralleles en C, le rectangle sous l'interv. BC entre le point de rencontre C et l'angle B, par lequel pa cette parallele, et sous GH, la distance des deux autres paralle GE, HF, c'est à dire le rectangle PGH (en supposant BGH a male à BC, et CP égale et parallele à BG) sera le double Triangle BEF. De même, si HQ égale à BM, le rectangle Q sera égal au double Triangle BFL. Et si ces bases EF, FL sont infiniment petites, et continuées pour remplir*) tout l'Esp EB((E))LFE à la courbe EFL((E)), et de même si GH, HN sont infiniment petites afin que les rectangles PGH, QHN etc. re plissent tout l'espace PG((G))((P))QP à la courbe PQ((P)), cet espace sera le double de l'autre espace. Et puisque FEC, LI ((E))((C)) seront les touchantes de la premiere courbe, le theore se pourra enoncer generalement ainsi: Si d'une courbe E((E)) mene à un costé AB d'un angle droit ABC les ordonnées I ((E))((G)), à l'autre costé BC les touchantes EC, ((E))((C)), al la somme des interceptées BC, ((B))((C)) entre le point de l'an B et le point de la rencontre des touchantes C ou ((C)) appliqu normalement à l'axe AB ou GP, ((G))((P)), c'est à dire la fig PG((G))((P))QP sera le double de l'espace EB((E))E compris en ıne portion de la premiere courbe et les droites qui joignent extremités de cette portion au point B.

Le troisieme Corollaire est la quadrature Arithmetique du Cercle. Car la courbe E(E)((E)) estant un arc de cercle, la courbe des interceptées, sçavoir BP(E)((P)), se pourra rapporter a l'angle droit RBC par cette equation $\frac{2az^2}{a^2+z^2}$ ⊓ x, appellant BG ou CP, x et BC ou GP, z, c'est à dire RB sera à BG en raison doublée de AC à BC, comme il est aisé de demonstrer. D'ou il s'ensuit premierement que celuy qui trouvera une regle de donner par abregé la somme d'un tel rang, quoyque fini, de nombres rationaux: $\frac{2,1}{1+1}$ ou $\frac{2}{2}$, $\frac{2,4}{1+4}$ ou $\frac{8}{5}$, $\frac{2,9}{1+9}$ ou $\frac{18}{10}$, $\frac{2,16}{1+16}$ ou $\frac{32}{17}$ etc. sans estre obligé de les adjouter ensemble l'un apres l'autre, aura achevé la quadrature du cercle, parceque c'est la progression des ordonnées CP de la figure BCPB, dont la quadrature donneroit celle du Cercle. Mais à present ce n'est pas encor la quadrature Arithmetique. Et pour y arriver il faut se servir de la belle methode de Nicolaus Mercator, selon laquelle, puisque *a* estant l'unité et $\frac{x}{2}$ égal à $\frac{z^2}{1+z^2}$, la méme x sera égale à $z^2 - z^4 + z^6 - z^8$ etc. à l'infini, et la somme de toutes les x égale à la somme de toutes les $z^2 - z^4$ etc. Or la premiere de toutes les z estant infiniment petite, et la derniere estant d'une certaine grandeur, comme BC que nous appellerons b, la somme de toutes les z^2 sera $\frac{b^3}{3}$, et la somme de toutes z^4 sera $\frac{b^5}{5}$ etc. (par la quadrature des parabole donc la somme de toutes les x ou l'espace BCPB, ou la differen du rectangle CBG et du double segment du cercle BEB sera $-\frac{b^5}{5} + \frac{b^7}{7} - \frac{b^9}{9}$ etc. donc (par une suite assez aisée de la G metrie ordinaire) l'arc BDE sera $\frac{b}{1} - \frac{b^3}{3} + \frac{b^5}{5} - \frac{b^7}{7}$ etc. rayon estant 1 et BC, touchante de la moitié de l'arc, estant pellée b. Ce qu'il falloit demonstrer. J'avoue que cette dem stration ne pourra pas estre entendue de tout le monde, par qu'elle suppose bien des choses qui ne sont connues qu'à ceux sont versez dans les nouvelles decouvertes et qui sçavent ma les characteres ou symboles. Mais il n'y en a que trop p ceux-cy: et il faudroit un volume pour satisfaire aux autres. pourroit prouver aussi le rapport qu'il y a entre la figure interceptées B((G))((P))PB et le cercle, en supposant la quadrat de la Cissoeide trouvée par Mons. Hugens, comme il m'a fait marquer. Mais la demonstration que je viens de donner m'a s de principe d'invention et est feconde en theoremes nouve S'il y a lieu d'esperer qu'on pourra jamais arriver à une ra analytique, exprimée en termes finis, du Diametre à la circonfere je croy que ce sera par cette voye, car quoyque les expressi soyent infinies, nous ne laissons pas quelques fois d'en trouver sommes: et pour cet effect je donneray pour conclusion l'obse tion suivante, qui me paroist tres curieuse:

$\frac{1}{3}\ \frac{1}{8}\ \frac{1}{15}\ \frac{1}{24}\ \frac{1}{35}\ \frac{1}{48}\ \frac{1}{63}\ \frac{1}{80}\ \frac{1}{99}\ \frac{1}{120}$ etc. dont la somme ⊓ $\frac{3}{4}$ la progres estant co nuée à l'i

$\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{15} \cdot \frac{1}{35} \cdot \frac{1}{63} \cdot \frac{1}{99}$. etc. . . . . . . ⊓ $\frac{1}{2}$

$\cdot \frac{1}{8} \cdot \frac{1}{24} \cdot \frac{1}{48} \cdot \frac{1}{80} \cdot \frac{1}{120}$ etc. . . . . . . ⊓ $\frac{1}{4}$

$\frac{1}{3}$ . . . $\frac{1}{35}$ . . . $\frac{1}{99}$. etc. . . . . . . ⊓ pendet ex q c

$\frac{1}{8}$ . . . $\frac{1}{48}$ . . . $\frac{1}{120}$ etc. . . . . . . ⊓. pendet ex q hype

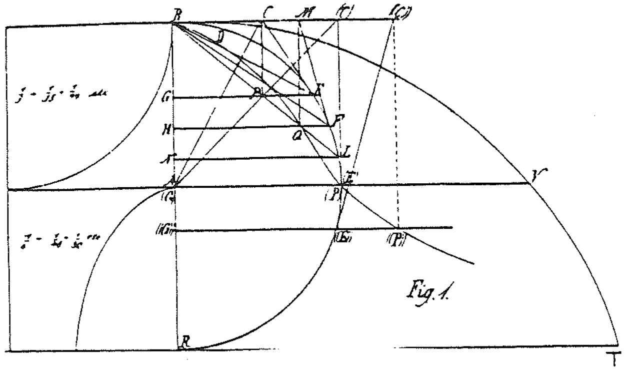


Fig. 1.

Extraits de

l'*Encyclopédie Méthodique*

de Diderot et d'Alembert.,

Réédition A.C.L.

Mais, dira-t-on, qu'exprime donc alors une pareille suite? Car, par la nature de l'opération, elle doit être égale à la quantité ou fraction proposée; & cependant elle s'en éloigne continuellement. Un auteur nommé *Guido Ubaldus*, dans son traité de *quadratura circuli & hyperbolæ*, a poussé ce raisonnement plus loin; & en a tiré une conséquence fort singulière. Ayant pris la suite $\frac{1}{2} = \frac{1}{1+1}$, & ayant fait la division, il a trouvé au quotient $1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1$, &c. qui, à l'infini, ne peut jamais donner que 1 ou 0; savoir 1, si on prend un nombre impair de termes; & 0, si on prend un nombre pair; d'où cet auteur a conclu que la fraction $\frac{1}{2}$ pouvoit devenir 1 par une certaine opération, & que 0 pouvoit être aussi égal à $\frac{1}{2}$, & que par conséquent la création étoit possible, puisque avec moins on pouvoit faire plus.

L'erreur de cet auteur venoit de n'avoir pas remarqué que la suite $1 - 1 + 1 - 1$, &c. & en général $1 - c + c^2 - c^3$, &c. n'exprimoit point exactement la valeur de la fraction $\frac{1}{1+c}$. Car supposons qu'on ait poussé le quotient de la division jusqu'à cinq termes, comme la division ne se fait jamais exactement, il y a toujours un reste, soit ce reste *r*; & pour avoir le quotient exact, il faut, comme dans la division ordinaire, ajouter ce reste *r* divisé par le diviseur $1 + c$, à la partie déjà trouvée du quotient.

Ainsi supposons que la *série* générale soit terminée à $-c^3$, on aura $\frac{1}{1+c} = 1 - c + c^2 - c^3 + \frac{c^4}{1+c} = \frac{1+c-c-c^2+c^2+c^3-c^3-c^4+c^4}{1+c} = \frac{1}{1+c}$.

Par conséquent la valeur exacte de $\frac{1}{2} = \frac{1}{1+1}$ est $1 - 1 + 1 - 1 + \frac{1}{1+1}$; & cette valeur se trouve toujours égale à $\frac{1}{2}$, & non pas zéro à 1. *Voyez* dans les *Mémoires de l'Acad. de* 1715, un écrit de M. Varignon, où cette difficulté est éclaircie avec beaucoup de soin.

Quadrature du cercle par M. Leibnitz. Soit la tangente KB (*Pl. d'analyse fig.* 49) $= x$, $BC = 1$; la secante AC infiniment proche de CK; décrivez avec le rayon CK le petit arc KL: vous aurez $AK = dx$, $KC = \sqrt{(1+x^2)}$. Maintenant puisque les angles B & L sont droits, & l'angle BKC = KAC à cause de la petitesse infinie de l'angle KCL, nous aurons KC : BC :: KA : KL, c'est-à-dire, $\sqrt{(1+x^2)} : 1 :: dx : \frac{dx}{\sqrt{(1+x^2)}} = KL$. De plus, CK : KL :: CM : mM; c'est-à-dire, $\sqrt{(1-x^2)} : \frac{dx}{\sqrt{(1+x^2)}} :: 1 : \frac{dx}{1+x^2} = Mm$. Donc le secteur $CMm = \frac{1}{2} dx : (1+x^2) = \frac{1}{2}(dx - x^2dx + x^4dx - x^6dx + x^8dx - x^{10}$ &c.) & l'on trouve, par le calcul intégral, le secteur BCM (dont la tangente KB est x) $= \frac{1}{2}x - \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{10}x^5 - \frac{1}{14}x^7 + \frac{1}{18}x^9$ &c. & ainsi à l'infini. C'est pourquoi si BM est la huitième partie du cercle ou un arc de 45°, le secteur sera $\frac{1}{2} - \frac{1}{6} + \frac{1}{10} - \frac{1}{14}$ &c. à l'infini. Donc le double de cette série $1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \frac{1}{11}$ &c. à l'infini, est le quart de cercle.