Présentation de l'"arithmetica infinirorum" de John Wallis

par Anne Chevalier
Université Louvain-La-Neuve

Ce qui frappe le mathématicien de cette fin du XXe siècle, à la lecture de l'"Arithmétique des Infinis", c'est d'être plongé dans un traité de mathématique construit essentiellement sur une succession d'inductions basées sur des analogies entre des résultats obtenus expérimentalement (c'est-à-dire à partir de calculs sur quelques valeurs particulières) sans autre forme de justification. Wallis fait défiler devant nous une suite de conjectures dont pratiquement aucune n'est soumise à une preuve de type déductif. Et pourtant, ce traité a réellement fait progresser une question séculaire des mathématiciens, à savoir la recherche des quadratures de surfaces planes délimitées par une courbe et celle des cubatures de solides dont une partie de la surface est courbe. Dix ans plus tard, le célèbre Newton, dont le génie n'est contesté par personne, met en œuvre ces mêmes méthodes pour poursuivre la recherche entamée par son prédécesseur.

Cet article présente l'objet (I) et la méthode (II) de l'"Arithmetica Infinitorum", à partir de traductions de cette oeuvre du latin en français[1] ainsi que les résultats auxquels l'auteur est arrivé (III).

John Wallis, sa vie, son oeuvre

Né en Angleterre en 1616, John Wallis entre en 1632 au Collège Emmanuel à Cambridge qui est le lieu de naissance de son génie mathématique comme il le sera, 30 ans plus tard, pour Newton.

En dépit de sa prédilection pour les mathématiques, Wallis devient un éminent théologien et est ordonné prêtre en 1640, ce qui l'occupe beaucoup et lui laisse peu de loisirs pour ses recherches. Il devient malgré tout un membre très actif de la "Royal Society".

[1] Cet article est un résumé d'un mémoire de D.E.A. cité en bibliographie.

C'est en 1647 que son intérêt pour les mathématiques rejaillit grâce à lecture du "Clavis Mathematicae" (Clef des Mathématiques) de Oughtred. Wallis lui dédie son œuvre fondamentale, "Arithmetica Infinitorum", lui exprimant ainsi sa reconnaissance d'avoir renseigné de façon claire et précise ce qu'il recherchait en vain chez les autres mathématiciens[2].

Il obtient en 1649 la chaire de Géométrie à Oxford, place qu'il occupera jusqu'à la fin de sa vie. Cette nomination lui donne enfin l'occasion d'exercer ses talents mathématiques.

En 1655, John Wallis publie deux ouvrages importants. L'un, le "De Sectionibus Conicis Tractatus", est un exposé de géométrie analytique. L'autre, l'"Arithmetica Infinitorum", traite des aires et des volumes à partir d'"indivisibles" auxquels sont associées des suites de nombres. Cet ouvrage a une influence importante sur le développement du calcul infinitésimal au XVIIe siècle et en particulier sur la recherche du développement du binôme par Newton.

Wallis publie aussi "Mathesis Universalis" (1657) dont le principal intérêt est d'apporter une contribution au développement des notations, "De curbarum rectificatione et complatione" (1659), une recherche sur les courbes et les surfaces, dont un traité sur la cycloïde, "Mechanica, sive tractatus de motu" (1670-1671), un traité de mécanique et "Algebra", un traité d'algèbre en 1685.

Il meurt à Oxford en 1703.

I. Objet de l'"Arithmetica Infinitorum"

Ce traité expose - nous dit Wallis - "*toute la progression de la démonstration, en même temps que la méthode avec laquelle je suis parvenu tant à la quadrature du cercle qu'à celle d'innombrables autres courbes*"[3].

D'emblée, Wallis nous livre ses intentions tant du point de vue de la forme, à savoir combiner la présentation d'une méthode de découverte avec la démonstration des résultats auxquels il parvient, que du fond, arriver à la quadrature du cercle.

Nous allons tenter de montrer, dans cet article, comment et jusqu'où Wallis atteint les objectifs annoncés.

[2] Wallis, Opera I, A.I., p.357.
[3] Idem, p.362.

Dans une première partie, nous présentons les différents principes de la méthode mise en oeuvre par l'auteur ainsi que quelques aspects du traitement de l'infini et de l'infiniment petit proposé par Wallis ; nous exposons ensuite différents résultats auxquels il est parvenu.

II. Principes de la méthode de recherche de Wallis

a) La méthode des indivisibles

La recherche de Wallis s'inscrit dans le prolongement des différentes théories des indivisibles qui prennent naissance dans la première moitié du XVIIe siècle avec Cavalieri et Torricelli. Voici ce qu'en dit Wallis, dans sa dédicace de l'"Arithmetica Infinitorum".

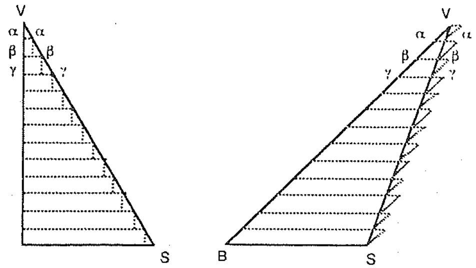
> "A la fin de l'année 1650, je suis tombé sur les écrits mathématiques de Torricelli [...] dans lesquels il expose, entre autres, la Géométrie des Indivisibles de Cavalieri. Je n'ai jamais eu Cavalieri sous la main et je l'ai cherché bien souvent en vain chez les libraires. Quant à sa méthode, telle qu'elle est relatée par Torricelli, elle m'était d'autant plus agréable que m'était venu à l'esprit je ne sais quel principe du même genre presqu'aussitôt que j'avais abordé la Mathématique ; ce qui est, en effet, soutenu par la plupart à propos du cercle (qui est considéré comme un polygone à un nombre infini de côtés et dont la circonférence est donc formée d'une infinité de côtés infiniment petits) m'était apparu, en changeant ce qui doit l'être, pouvoir s'appliquer utilement ailleurs et il me semblait aussi qu'un certain nombre de choses qu'on trouve çà et là chez Euclide, Apollonius et surtout Archimède allaient dans le même sens. " [4]

Wallis ne donne pas le détail des principes de Cavalieri et de Torricelli qui ont inspiré sa recherche. Il faut savoir que le concept d' indivisibles chez ces deux auteurs est très éloigné de ce que Wallis présente. Avant de développer la différence entre ces deux approches, penchons-nous sur un extrait de la proposition 1 du traité des Sections coniques[5], dans lequel Wallis présente ce qu'il entend par "indivisibles" :

[4] Idem, p.357.
[5] Notons ici que Wallis ne présente pas le fondement de sa méthode de quadrature dans l'"Arithmétique des Infinis" mais dans le traité des sections coniques dont la publication est contemporaine.

"**PROPOSITION 1** : Des figures planes considérées d'après la méthode des indivisibles.

Je suppose, pour commencer (conformément à la Géométrie des Indivisibles de Cavalieri), qu'un plan quelconque peut être considéré comme formé par l'assemblage d'une infinité de lignes parallèles, ou plutôt (ce que je préférerais) d'une infinité de parallélogrammes de même hauteur, dont la hauteur de chacun d'eux soit égale à $1/\infty$ de la hauteur totale, c.-à-d. une partie aliquote infiniment petite (posant le signe ∞ pour le signe d'un nombre infini[6]), telle que la hauteur de tous les parallélogrammes pris ensemble soit égale à la hauteur de la figure.[...]"[7]



Il s'agit donc, pour Wallis, de diviser toute figure en une infinité de parallélogrammes infiniment minces. Il ne précise pas comment il procède pour arriver à ce découpage infini, ni ce qu'il entend par infini. Nous reviendrons sur cette question. A ce stade, il faut noter que les "indivisibles" de surface sont, pour Wallis, des surfaces infiniment petites et non des segments obtenus par l'intersection de la surface et d'un plan mobile sécant à celle-ci, comme l'envisage Cavalieri. Wallis présente une notion d'"indivisible" fort proche du concept développé par Roberval.

L'objectif du découpage des figures est la recherche de quadrature, c.-à-d. la comparaison de surfaces dont l'une est inscrite ou circonscrite à l'autre et d'aire connue.

Cavalieri, confronté à cette problématique des quadratures, compare les indivisibles des deux surfaces. Toutefois, des règles très strictes limitent les comparaisons possibles. La décomposition des figures en indivisibles doit se faire suivant la même "règle", c.-à-d.

[6] Nous donnerons une interprétation possible de"∞" à la section f de ce chapitre.
[7] A.I., p.297.

parallèlement à une même droite pour les surfaces et à un même plan pour les volumes. De plus, les indivisibles doivent être en bijection et répartis selon une même densité. Ainsi, les figures comparées ont même hauteur.

Les règles énoncées ci-dessus sont tout à fait respectées par Wallis dans son "Arithmetica Infinitorum". Il compare des agrégats d'indivisibles parallèles, en même nombre et en même densité dans les deux figures comparées. Par contre, il se démarque de Cavalieri, dans la mesure où il travaille sur des parallélogrammes infiniment minces et non sur des segments, ce qui lui permet de passer à un travail purement algébrique.

"Notre méthode prend naissance là où la méthode des indivisibles de Cavalieri s'achève : c'est là le point de départ pour le travail lui-même comme pour son titre (de sorte que si lui a décidé de nommer son œuvre, Géométrie des Indivisibles, moi j'ai décidé d'appeler la mienne Arithmétique des Infinis)."[8].

Pour cela, il associe un nombre à chacun des parallélogrammes, que nous appelons "indivisibles" d'une figure, de telle sorte que la suite des nombres ainsi définie soit dans le même rapport que la suite des "indivisibles".

b) La suite arithmétique des "indivisibles" d'un triangle

Dans la proposition 2 du traité des sections coniques, Wallis nous indique comment il associe une suite arithmétique aux "indivisibles" d'un triangle :

"Si un triangle est coupé par une droite parallèle à la base, le triangle tronqué est semblable au triangle de départ, et par conséquent ses côtés sont proportionnels (comme il est bien connu). Par conséquent, si un triangle quelconque VBS est sectionné par un nombre quelconque de droites $\alpha\alpha$, $\beta\beta$, $\gamma\gamma$, etc. parallèles à la base BS, qui sont espacées également l'une de l'autre et qui par conséquent divisent l'un et l'autre côtés en segments égaux (et donc encore tout le triangle en bandes de même hauteur), ces droites $\alpha\alpha$, $\beta\beta$, $\gamma\gamma$ etc. seront en proportion arithmétique. (Ces droites $\alpha\alpha$, $\beta\beta$, $\gamma\gamma$, etc. sont entre elles comme $V\alpha$, $V\beta$, $V\gamma$, etc., c.-à-d. comme 1, 2, 3, etc., à cause des excédents égaux $V\alpha$, $\alpha\beta$, $\beta\gamma$, etc.) Pour cette raison, si ces droites sont supposées en nombre infini, la série de toutes (ce qui

[8] Idem, p.357.

correspond à l'entièreté du triangle en vertu de la proposition précédente) est l'agrégat d'un nombre infini de droites en proportion arithmétique, dont la plus petite est le point V (à savoir le sommet) et la plus grande est la base BS du triangle.

Et donc, la même chose arrivera si nous supposons qu'un nombre identique de parallélogrammes est compris entre cette infinité de droites dans cette même figure plane, et que la hauteur de chacun d'eux vaut $1/\infty$ de la hauteur du triangle. Ces parallélogrammes sont évidemment en proportion arithmétique puisqu'ils ont même hauteur et sont proportionnels à leur base."[9].

Ainsi, pour d'autres surfaces, la suite des indivisibles sera associée à la suite des carrés ou des cubes ou des racines carrées, etc. d'une suite arithmétique. Une démarche semblable peut être envisagée pour les solides. Il reste à comprendre comment il utilise ces suites pour étudier la quadrature des surfaces ou les cubatures de solides.

c) De la Géométrie des Indivisibles à l'Arithmétique des Infinis

La recherche d'une quadrature revient à comparer une figure à une autre qui lui est inscrite ou circonscrite. Ainsi, on peut étudier le rapport entre la somme des "indivisibles" du triangle ou de toute autre surface et la somme des "indivisibles" du parallélogramme circonscrit, qui se décompose en tout autant d'"indivisibles" égaux au plus grand de ceux de la première surface. Le résultat obtenu est le rapport entre les aires des deux figures comparées. C'est cette recherche qui fait l'objet des premières propositions de l'"Arithmétique des infinis".

Regardons sur quelques exemples comment fonctionne son principe.

Dans le cas d'un triangle de base b et de hauteur h, appelons h/∞ la hauteur infinitésimale de chacun des parallélogrammes et $a = b/\infty$ l'accroissement de longueur entre deux parallélogrammes consécutifs. Ainsi, la suite des indivisibles du triangle est proportionnelle à la suite des bases des parallélogrammes : 0a, 1a, 2a, 3a, ...ou encore à la suite des entiers 0, 1, 2, 3, ... Le parallélogramme circonscrit au triangle se décompose de la même façon en une même infinité de parallélogrammes infinitésimaux de hauteur h/∞ et de longueur égale à la base b. Rechercher la quadrature du triangle revient à calculer le rapport entre la somme des indivisibles du triangle et la somme des

[9] S.C., p.298.

indivisibles du parallélogramme circonscrit, ce qui peut s'écrire sous la forme :

$$\frac{0a + 1a + 2a + 3a + \dots}{b + b + b + b + \dots} = \frac{0 + 1 + 2 + 3 + \dots}{\text{tout autant d'égaux au plus grand}}$$

après simplification par a.

Si la suite des "indivisibles" est comme la suite des carrés d'une suite arithmétique, il s'agira d'étudier le rapport

$$\frac{0a + 1a + 4a + 9a + \dots}{b + b + b + b + \dots} = \frac{0 + 1 + 4 + 9 + \dots}{\text{tout autant d'égaux au plus grand}}$$

Comment Wallis arrive-t-il à calculer ces rapports qui portent sur une infinité de termes ?

d) L'induction basée sur l'analogie

"Le moyen d'investigation le plus simple pour ceci et pour certains problèmes suivants, est de montrer la chose même jusqu'à un certain point, d'observer les rapports qui en résultent et de les comparer l'un avec l'autre afin qu'une proposition universelle se fasse connaître enfin par induction."[10]

Un des aspects importants de la méthode de découverte mise en œuvre par Wallis est sa recherche constante d'analogies entre les résultats qu'il obtient dans le cadre d'une même problématique, afin de pouvoir induire des résultats nouveaux et plus généraux. Cet aspect de son travail lui donne une véritable force créative dont nous montrerons les fruits dans la suite.

Ainsi pour l'étude des rapports de séries infinies présentées plus haut, il part de l'observation des résultats obtenus dans quelques cas de sommes finies et en déduit, si possible, un résultat général.

C'est ainsi que, dès qu'une recherche portant sur plusieurs problèmes du même ordre lui fait découvrir quelques résultats, il s'évertue à les comparer afin de progresser dans leur généralisation. Il a la conviction que beaucoup de situations (il pense en particulier aux problèmes d'aires et de volumes de figures courbes), qui ont été étudiées jusqu'ici de façon isolée et pour lesquelles les Anciens ont apporté des

[10] A.I., p.365.

solutions au coup par coup, peuvent être traitées comme des cas particuliers d'une problématique plus générale, et donc qu'elles répondent à des lois qu'il faut découvrir à partir de cas particuliers.

Bien sûr, le mathématicien soucieux de rigueur sera souvent étonné de ce que Wallis démontre rarement les résultats qu'il obtient de cette façon. En effet, notre auteur cherche seulement à être confirmé soit par des résultats démontrés par d'autres, antérieurement, dans un cadre axiomatique rigoureux et accepté par tous, soit par la cohérence interne de son système.

Il est clair que cette façon de procéder ne plaît pas à tous. Fermat est un de ses opposants farouches. Wallis consacre le chapitre 79 de son traité d'algèbre, dont le titre fait référence explicitement aux réserves de Fermat, à cette question

> "Moi, je considère l'induction comme une remarquable méthode de recherche puisqu'elle nous mène à la découverte de lois générales ou du moins nous conduit près de celles-ci. Et chaque fois que ce type de recherche fait surgir un résultat évident par l'observation, il n'est pas nécessaire (bien que la chose soit possible) d'en donner une démonstration ultérieure."[11]

e) La méthode de Wallis confrontée avec celle des Anciens

Cette façon de procéder et d'avancer des résultats est nouvelle et choquante, pour qui est soucieux de rigueur et formé à l'école des Eléments d'Euclide, où toute proposition nouvelle se doit d'être justifiée à partir des définitions, axiomes et propositions qui précèdent. Ainsi, puisqu'à ce stade aucun traitement axiomatique de l'infini n'a pu être mis en place, il n'est pas question de démontrer une égalité entre deux quantités après une infinité d'étapes.

Il faut donc contourner la question de l'infini par des raisonnements par l'absurde dits d'"exhaustion" qui présentent les inconvénients d'être lourds à manipuler, de nécessiter un développement spécifique à chaque cas étudié ainsi que la connaissance du résultat final avant de commencer.

Avec les différentes théories des indivisibles, une nouvelle approche des mathématiques s'introduit au XVII^{e} siècle, ouvrant la porte à l'usage des infiniment petits et des processus infinis. Ces outils ont permis de découvrir et d'avancer de nombreux résultats nouveaux qui

[11] Wallis, Opera 2, Algebra, p331.

s'accordent avec ceux déjà démontrés par les Anciens. Le souci des mathématiciens de cette école est de fournir des raisonnements qui éclairent le lecteur sur la démarche suivie pour obtenir les résultats plus que de convaincre de la vérité de ceux-ci par des voies très éloignées de la découverte.[12]

C'est dans ce contexte qu'il faut situer Wallis afin de comprendre les différentes remarques qu'il fait tout au long de son exposé.

> "Il aurait peut-être été plus habile (si je ne m'étais attaché qu'à me faire une réputation) de cacher la méthode grâce à laquelle nous sommes parvenus jusqu'ici et d'exposer quelques propositions particulières (commme s'il s'agissait de quelque chose d'admirable ou même de stupéfiant) par des démonstrations apagogiques. Ce que je soupçonne que les Anciens ont fait souvent dans le passé ; ils semblent très souvent s'être donné pour but d'être admirés plutôt que compris, ou du moins de voir les autres, à la suite de leurs démonstrations, donner leur assentiment plutôt que de comprendre la marche authentique du problème. Voilà, je crois, la raison pour laquelle leur "analytique" a été presque entièrement cachée à la postérité (qu'ils en aient pourtant possédé une, cela est assez clair par de nombreux indices dans beaucoup de démonstrations)."[13]

Nul doute, pour Wallis et pour d'autres, que les Anciens maîtrisaient des techniques qui leur permettaient de découvrir de nouveaux résultats et qu'ils ne révélaient pas, peut-être pour les raisons évoquées ci-dessus, mais surtout par ce qu'elles impliquaient l'usage des infiniments petits et des processus infinis. Par contre, au XVII^{e} siècle, les nouveaux géomètres, passant outre la rigueur euclidienne, cherchent à livrer leur méthode de recherche en même temps que leurs résultats :

> "J'aurais, certes, plutôt attendu des remerciements qu'une accusation, pour avoir indiqué ouvertement et loyalement, non seulement où j'étais arrivé, mais encore quelle route j'avais suivie."[14]

Wallis n'estime pas nécessaire de donner au lecteur, en plus des développements qu'il présente, toutes les démonstrations sous forme de

[12] voir à ce sujet les articles d'Evelyne Barbin, cités dans la bibliographie.
[13] A.I., p.412.
[14] Wallis, Lettre à Digby du 1er décembre 1657, dans Fermat, Oeuvres, tome 3.

raisonnements par l'absurde, ce dont tout le monde - pense-t-il - est capable :

> "Quant à moi, ces démonstrations que j'ai produites en suivant la "Méthode des Indivisibles" de Cavalieri me suffisent (puisque je l'ai trouvée déjà admise par les géomètres). "[15]

A cette époque, en effet, la méthode de Cavalieri est admise, sans être fondée. Nous voyons que, de son côté, Wallis fait des tentatives pour justifier sa propre méthode, en faisant différents commentaires au sujet du traitement de l'infini.

f) Le traitement de l'infini et de l'infiniment petit

L'extrait ci-dessous est la suite de la proposition 1 du traité des Sections coniques, où Wallis tente de préciser ce qu'il entend par "indivisible":

> "Quelle que soit la façon dont on aborde la question (soit par une infinité de lignes parallèles, soit par une infinité des parallélogrammes de même hauteur, inscrits entre ces lignes), cela revient au même. En effet, un parallélogramme dont la hauteur est supposée infiniment petite, c.-à.d. nulle (car une quantité infiniment petite est tout à fait la même chose qu'une non-quantité), est à peine autre chose qu'une ligne. (Ces deux objets diffèrent au moins en ceci qu'on suppose que la ligne est dilatable, c.-à-d. qu'elle a au moins une épaisseur si petite que, par une multiplication infinie, elle puisse acquérir une certaine hauteur ou largeur, aussi grande que celle de la figure elle-même.) Par conséquent, dans ce qui suit (en partie parce que cette façon de parler semble avoir fait ses preuves dans la méthode de Cavalieri sur les Indivisibles, en partie aussi pour veiller à être bref), nous nommerons quelquefois lignes plutôt que parallélogrammes ces parties infiniment petites (c.-à-d. dont la hauteur est infiniment petite), du moins lorsqu'on ne considère pas une hauteur déterminée. Par contre, dès qu'on envisagera une hauteur définie (ce qui aura lieu quelquefois), il faudra tenir compte de cette hauteur réduite dans la mesure exacte où celle-ci, multipliée à l'infini, est supposée égaler la hauteur totale de la figure."[16]

---

[15] A..I., p.383.
[16] S.C., p.297.

Toute l'oeuvre de Wallis est traversée par ce double regard sur l'infini, à savoir $1/\infty$ égale zéro ou bien $1/\infty$ est une quantité telle qu'elle puisse être remultipliée par ∞ pour donner 1 c.-à-d. $\frac{1}{\infty} \times \infty = 1$.

Tantôt les quantités infiniment petites sont des quantités évanescentes, qui peuvent se rapprocher de 0 d'aussi près qu'on veut. Tantôt, un infiniment petit se définit comme l'inverse d'une quantité infiniment grande et possède une existence propre. On peut y appliquer les règles du calcul algébrique.

Wallis oscille donc, dans le cours de son œuvre, entre une conception de l'infini se rapprochant de la vision relevant aujourd'hui de l'analyse non standard au sens de Nelson et celle de notre analyse classique.

Ainsi, dans la proposition 1 des sections coniques, on perçoit l'infini noté "∞" comme un naturel plus grand que tous les autres. Il pourrait correspondre à un infiniment grand en analyse non standard, noté "ω" et défini comme étant un entier plus grand que tous les naturels standard. Son inverse $1/\omega$ est donc un infiniment petit strictement positif, plus petit que tous les réels standard. Peut-on dire que $1/\omega$ soit égal à 0 ? Non, en analyse non standard, on dit que qu'il est infiniment voisin de 0, différent de 0.

Par contre, quand Wallis exprime qu'une quantité infiniment petite s'évanouit et s'annulle, il effectue un passage à la limite, dans le sens de l'analyse classique : $\lim_{x \to \infty} \frac{1}{x} = 0$. Aujourd'hui, lorsque nous écrivons les égalités : $1/\infty = 0$ ou $\infty + 1 = \infty = \infty - 1$, nous sous-entendons ces passages à la limite. Et les difficultés auxquelles l'auteur est confronté proviennent de cette oscillation entre son acceptation et son rejet des infinitésimaux.

Il est clair que ces deux approches se rejoignent, mais qu'il importe de bien les distinguer. Travailler avec les deux regards en même temps peut être source d'erreurs.

III. Résultats auxquels Wallis est arrivé

a) La quadrature de la parabole.

Dès les premières propositions de l'"Arithmetica Infinitorum", Wallis s'attaque au comportement du rapport

$$\frac{0a + 1a + 2a + 3a + \dots}{b + b + b + b + \dots} = \frac{0 + 1 + 2 + 3 + \dots}{\text{tout autant d'égaux au plus grand}}$$

pour lequel il trouve comme résultat 1/2 à partir de l'observation de quelques cas finis.

Ensuite, il s'attaque à l'étude du rapport

$$\frac{0a + 1a + 4a + 9a + \dots}{b + b + b + b + \dots} = \frac{0 + 1 + 4 + 9 + \dots}{\text{tout autant d'égaux au plus grand}}$$

de la façon suivante :

"**PROPOSITION 19 : Lemme** : Soit une suite de quantités en proportion arithmétique en raison double (c.-à-d. comme la suite des nombres carrés), croissant continuellement, qui débute par un point ou zéro (par exemple comme 0, 1, 4, 9, 16,...) ; nous cherchons à connaître le rapport de cette série à la série de tout autant d'égaux au terme le plus grand.

Que la recherche se fasse au moyen de l'induction (comme dans la proposition 1) et on aura que :

$$\frac{0+1}{1+1} = \frac{1}{2} = \frac{3}{6} = \frac{1}{3} + \frac{1}{6}$$
$$\frac{0+1+4}{4+4+4} = \frac{5}{12} = \frac{1}{3} + \frac{1}{12}$$
$$\frac{0+1+4+9}{9+9+9+9} = \frac{14}{36} = \frac{7}{18} = \frac{1}{3} + \frac{1}{18}$$
$$\frac{0+1+4+9+16}{16+16+16+16+16} = \frac{30}{80} = \frac{3}{8} = \frac{1}{3} + \frac{1}{24} \; [\dots] \text{ et}$$

ainsi de suite.

Le rapport qui en ressort est toujours supérieur à 1/3. Quant à l'excès, il décroît sans interruption dans la mesure où le nombre de termes augmente, à savoir 1/6, 1/12, 1/18, 1/24, 1/30, 1/36, etc. dont le dénominateur des fractions (ou conséquent du rapport) augmente, comme on le voit, dans chaque cas d'un multiple de six (comme cela est évident) de sorte que l'excès du rapport obtenu au-delà de 1/3 est comme 1 est à six fois le nombre de termes au-delà de 0.

PROPOSITION 20 : Théorème : *Soit une suite de quantités en proportion arithmétique en raison double (c.-à-d. comme la suite des nombres carrés), croissant continuellement, qui débute par un point ou zéro ; le rapport de cette série à la série de tout autant d'égaux au terme le plus grand excèdera 1/3 ; et l'excès sera le rapport entre l'unité et six fois le nombre de termes au-delà de 0, ou encore entre la racine carrée du premier terme et six fois la racine carrée du terme maximum.*

Ainsi (si le terme situé après 0 vaut 1, et le dernier L) la somme vaut $\frac{l+L}{3} L^2 + \frac{l+L}{6L} L^2$.[...]

Avec le nombre croissant de termes, l'excès au-delà de 1/3 diminue continuellement, de sorte qu'il finit par devenir plus petit que n'importe quelle quantité donnée (comme cela est évident). Si on continue à l'infini, il s'évanouira finalement."[17]

Wallis fait donc apparaître la suite des excès, 1/6, 1/12, 1/18, 1/24, ... qu'il exprime, à la proposition 2, sous la forme 1/6L où L correspond au plus grand terme. Que peut-il dire du comportement d'une telle suite dont le dénominateur augmente en proportion arithmétique ? Il estime que, comme il est toujours possible de trouver dans la suite un terme plus petit que toute quantité donnée, le terme 1/6L s'évanouit à l'infini. Cette conviction permet à Wallis de conclure que :

"**PROPOSITION 21 : Théorème** : *Soit une suite infinie de quantités en proportion arithmétique en raison double (c.-à-d. comme la suite des nombres carrés), croissant continuellement, qui débute par un point ou zéro (par exemple comme 0, 1, 4, 9, 16,...) ; le rapport de cette série à la série de tout autant d'égaux au terme le plus grand sera comme 1 est à 3.*

Ceci est évident d'après ce qui précède.

PROPOSITION 22 : Théorème : *Et pour cette raison, le cône ou la pyramide est au cylindre ou au prisme (de même hauteur et de même base) comme 1 est à 3.*

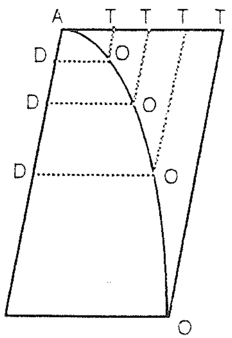
Nous supposons, en effet, que le cône aussi bien que la pyramide sont constitués d'une infinité de figures planes, semblables et parallèles, en raison double d'une suite arithmétiquement proportionnelle, dont le minimum est le point

---

17 A.I.,p.373-374.

et le maximum la base (en vertu de ce que nous avons dit à la proposition 6 des sections coniques) tandis que le cylindre ou le prisme sont constitués de tout autant de surfaces égales à la plus grande (comme il est évident). En vertu de ce qui précède, le rapport est donc de 1 à 3.

PROPOSITION 23 : Corollaire : *De la même façon, le complément de la demi-parabole (à savoir la figure AOT qui, avec la demi-parabole remplit le parallélogramme) est au parallélogramme TD (construit sur la même base ou de base égale et de même hauteur) comme 1 est à 3. (Et par conséquent, la demi-parabole même est au même parallélogramme comme 2 est à 3.)*



Soit, en effet, la figure AOT de sommet A, de diamètre AT, de base TO, et un nombre quelconque de parallèles à celle-ci (entre la base et le sommet) TO, TO, etc. Puisque les droites DO, DO, etc. (en vertu de la proposition 21 des Sections Coniques) sont comme les racines carrées des droites AD, AD, etc.[18]

Les droites AD, AD, etc. et aussi TO, TO, etc. seront, par contre, en raison double [comme les carrés] des mêmes DO, DO, etc. et aussi des AT, AT, etc.

La figure entière AOT (constituée d'une infinité de droites TO, TO, etc. en raison double des droites AT, AT, etc., en proportion arithmétique) sera au parallélogramme de même hauteur TD (constitué de tout autant de droites égales au maximum des TO) comme 1 est à 3 en vertu de la proposition 21. (Ce qui devait être démontré.)

Et par conséquent, la semi-parabole AOD (le reste du parallélogramme) est au même parallélogramme comme 2 est à 3." [19]

b) La démarche de généralisation pour tous les paraboloïdes.

L'objectif de Wallis, en introduisant son calcul sur les suites de nombres, n'est évidemment pas de trouver la quadrature du triangle et

[18] "in subdupliata ratione rectarum"
[19] Idem, p.374.

de la parabole, toutes deux bien connues depuis des siècles. Par contre, confirmé dans sa méthode par l'adéquation entre les résultats qu'il obtient et ceux démontrés par les Anciens, il va explorer cette méthode aussi loin que possible pour trouver de nouveaux résultats.

C'est ainsi que, dans la lignée des suites arithmétiques d'une part et en raison double de celles-ci d'autre part, Wallis étudie, dans les propositions 39 à 42, le rapport de la somme des cubes d'une suite arithmétique à tout autant d'égaux au plus grand, en passant par les mêmes étapes que dans les deux cas précédents. Il trouve un rapport de 1 à 4. Et il poursuit immédiatement de la façon suivante :

"**PROPOSITION 44 : Théorème** : C'est pourquoi, si on considère une suite infinie de quantités, commençant par un point ou 0, augmentant continuellement en proportion arithmétique (suite que j'appelle suite de "Latérales" ou du premier ordre [Primanorum], ou leurs carrés, leurs cubes, leurs puissances quatrièmes, etc. (que j'appelle séries du deuxième ordre [Secundanorum], du troisième ordre [Tertianorum], du quatrième ordre [Quartanorum], etc.), le rapport de toute la série à la série de tout autant de termes égaux au terme le plus élevé est comme ce qui est indiqué dans le tableau qui suit:

égaux	1/1		1
premier ordre	1/2		2
deuxième ordre	1/3		3
troisième ordre	1/4	ou comme 1 à	4
quatrième ordre	1/5		5
cinquième ordre	1/6		6
sixième ordre	1/7		7 [...]

Et ainsi de suite. Ainsi les dénominateurs des fractions, c.-à-d. les conséquents des rapports, sont arithmétiquement proportionnels à partir de l'unité. Le numérateur ou antécédent est commun, à savoir 1.

PROPOSITION 45 : Corollaire : Cela nous enseigne une méthode pour chercher l'aire du complément de la parabole, et du paraboloïde cubique, du biquadratique, du sursolide ou de n'importe quelle puissance supérieure et, par conséquent, de l'aire même de la parabole ou des paraboloïdes de n'importe quelle puissance. [...]"[20]

[20] Idem, p.384.

Jusqu'ici, Wallis n'a fait que réexprimer et généraliser, à partir d'une méthode nouvelle certes, des résultats déjà découverts par d'autres mathématiciens de son époque, en particulier Cavalieri. La spécificité de notre auteur se situe dans l'extension de cette loi de quadrature, vérifiée pour tous les paraboloïdes à puissance entière, aux puissances fractionnaires et même négatives. C'est un raisonnement basé sur l'analogie qui permet à Wallis de conclure de la façon suivante :

"**PROPOSITION 54 : Théorème** : [...] Le rapport de la somme de toutes les racines à la série de tout autant d'égaux au maximum sera comme ce qui suit dans ce tableau :

racines carrées	2/3		1 1/2
racines cubiques	3/4	ou comme 1 à	1 1/3
racines quatrièmes	4/5		1 1/4
racines cinquièmes	5/6		1 1/5
[...]	et ainsi de suite." [21]		

et de façon plus générale, pour toutes les puissances fractionnaires :

"**PROPOSITION 64 : Théorème** : Soit une suite infinie de quantités, commençant par un point ou 0, et croissant continuellement en raison d'une puissance quelconque soit simple soit composée de simples, alors le rapport du tout à la série de tout autant d'égaux au plus grand, est ce que l'unité est à l'indice de la puissance augmenté de 1." [22]

Wallis obtient donc un résultat équivalent, en termes actuels, à $\int_0^1 x^q\,dx = \frac{1}{q+1}$ pour toute puissance q rationnelle positive. Dans la foulée de sa généralisation, il n'hésite pas à dire, sans aucune forme de justification, que :

"Si l'indice supposé est irrationnel, par exemple $\sqrt{3}$, le rapport sera comme 1 est à $1+\sqrt{3}$".

Wallis poursuit sa réflexion en regardant comment la proposition 64 s'applique aux indices négatifs. Il tombe sur 1/0, qui vaut l'infini, pour la série de puissance -1, et sur des valeurs négatives, qu'il interprète comme étant égales à plus que l'infini, pour toutes les

[21] Idem, p. 390.
[22] Idem, p. 395.

puissances inférieures à -1. On sent, à ce stade de la réflexion, que Wallis s'arrange pour conserver la cohérence de sa théorie mais qu'il est mal à l'aise avec les résultats qu'il obtient. Ceci ne l'amène cependant pas à revoir l'ensemble de sa démarche.

c) La quadrature du cercle

Comme nous l'avons déjà signalé dans la présentation de l'œuvre, l'objectif principal de Wallis est de "*découvrir comment quarrer le cercle, ou bien qu'il ne peut pas se quarrer mais qu'au moins il en sortirait quelques mesures qui vaudraient la peine*"[23].

Ce problème de la quadrature du cercle a occupé bien des esprits depuis l'antiquité et il semble important de signaler que Wallis fait entrer cette recherche dans une nouvelle phase. En effet, de l'antiquité au XVII^e siècle, les recherches sur la quadrature du cercle tournent autour de la question de savoir si on peut construire, à la règle et au compas, un carré de même aire qu'un disque donné. Autrement dit, il s'agit d'évaluer l'aire ou la circonférence du cercle par celles de polygones inscrits ou circonscrits à ce cercle.

La deuxième période coïncide avec le développement du calcul infinitésimal. La question n'est plus de tenter de construire un carré de même aire qu'un disque, mais bien d'approcher le rapport de l'aire du disque à celle du carré circonscrit le plus précisément possible, et de savoir si ce rapport peut s'exprimer comme rapport de deux entiers ou, à défaut, être approché par une expression à l'aide d'entiers. Wallis arrive, à la fin des développements qu'il propose dans ce traité, à exprimer $\frac{4}{\pi}$ sous la forme

$$\frac{3 \times 3 \times 5 \times 5 \times 7 \times 7 \times \ldots}{2 \times 4 \times 4 \times 6 \times 6 \times 8 \times \ldots}.$$

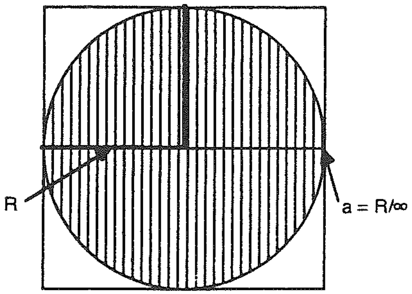
C'est la première formule permettant d'approcher π uniquement à l'aide d'entiers. Très vite après Wallis, on voit apparaître de nombreuses séries convergeant vers ce rapport. Il ne revient toutefois pas aux mathématiciens du XVII^e de démontrer que π est irrationnel, même s'ils en sont convaincus.

La méthode d'approche utilisée par Wallis est particulièrement originale. Ce qui suit en retrace les différentes étapes.

[23] Idem, p.258.

La suite associée aux indivisibles du quart de disque

Comme il l'a fait pour toutes les autres figures planes rencontrées jusqu'à présent, Wallis considère le disque comme étant constitué d'une infinité de parallélogrammes infiniment minces juxtaposés et en déduit que



"**PROPOSITION 121 : Corollaire** :

Pour cette raison, le cercle a au carré du diamètre (ou l'ellipse à un de ses parallélogrammes circonscrits) le même rapport que la série des racines carrées de la différence terme à terme de la suite infinie des égaux et de la suite du second ordre a à la série des égaux.

En effet, si on appelle R le rayon de ce cercle (dont une partie infiniment petite $R/\infty = a$), et que des perpendiculaires, ou "sinus recti", en nombre infini sont placées sur le rayon de façon à couvrir le quadrant, alors ces perpendiculaires seront les moyennes proportionnelles entre les segments du diamètre (comme cela est bien connu) c.-à-d.

entre	$R + 0$,	$R + 1a$,	$R + 2a$,	$R + 3a$, etc.
et	$R - 0$,	$R - 1a$,	$R - 2a$,	$R - 3a$, etc.

dont les rectangles sont :

$R^2 - 0 \quad R^2 - 1a^2 \quad R^2 - 4a^2 \quad R^2 - 9a^2$, etc

et les moyennes proportionnelles sont :

$$\sqrt{R^2 - 0} \qquad \sqrt{R^2 - 1a^2} \qquad \sqrt{R^2 - 4a^2} \qquad \sqrt{R^2 - 9a^2}$$

Ainsi, quel que soit le rapport de l'agrégat des racines carrées universelles à la somme d'autant de termes égaux à leur maximum (le rayon), tel est le rapport entre le quart de cercle (qui est constitué des premières) et le carré du rayon (qui est constitué des autres), au point que cela correspond au rapport

entre le cercle entier et le carré du diamètre. "Ce qui devait être montré". 24

Il s'agit donc de calculer l'équivalent de $\int_0^1 (1 - x^2)^{1/2}\,dx$. Or, à partir de ce qui précède, Wallis peut, en développant les termes, calculer les rapports correspondant aux séries dont le terme général est du type $(R^q - (ka)^q)^n$ (avec q rationnel et n entier) et qui correspondent à $\int_0^1 (1 - x^q)^n\,dx$. $\int_0^1 (1 - x^2)^{1/2}\,dx$ échappe donc à ces possibilités puisque Wallis ne connait pas de développement polynomial de $(1 - x^2)^{1/2}$.

La quadrature du cercle par interpolation

En vue d'approcher au mieux la quadrature du cercle, l'idée de Wallis est d'étudier dans quelle mesure, il est possible de trouver le rapport de la série de terme général $(R^2 - k^2a^2)^{1/2}$ à tout autant de termes égaux à R, par interpolation[25] entre le premier et le deuxième terme de la suite des rapports correspondant aux séries dont les termes généraux sont :

$$(R^2 - k^2a^2)^0 \,,\ (R^2 - k^2a^2)^1 \,,\ (R^2 - k^2a^2)^2 \,,\ (R^2 - k.^2a^2)^3$$

et qui valent 1, 2/3, 8/15, 48/105, ...Ces nombres forment une suite de premier terme 1 et dont l'élément d'ordre n, qui correspond à $\int_0^1 (1 - x^2)^n\,dx$, s'obtient en multipliant l'élément d'ordre n-1 par $\frac{2n-2}{2n-1}$.

La loi de formation de cette suite ne s'applique qu'à des valeurs de puissances entières. C'est ainsi que la première démarche d'interpolation en vue d'approcher la quadrature du cercle n'aboutit pas, du moins immédiatement.

Wallis en entame une autre après avoir transformé la notation de l'expression

$$(R^2 - k^2a^2)^{1/2} \text{ en } (\sqrt[1/2]{R} - \sqrt[1/2]{ka})^{1/2}.$$

Il calcule les rapports correspondants des séries dont les termes généraux sont les suivants :

24 Idem, p.417.

25 Par "interpolation", Wallis entend intercaler, entre les termes d'une suite donnée, d'autres termes se conformant autant que possible aux lois de formation des termes en place.

$(R - ka)^0$,	$(R - ka)^1$,	$(R - ka)^2$,	$(R - ka)^3$,	etc.
$(\sqrt[2]{R} - \sqrt[2]{ka})^0$,	$(\sqrt[2]{R} - \sqrt[2]{ka})^1$,	$(\sqrt[2]{R} - \sqrt[2]{ka})^2$,	$(\sqrt[2]{R} - \sqrt[2]{ka})^3$,	
$(\sqrt[3]{R} - \sqrt[3]{ka})^0$,	$(\sqrt[3]{R} - \sqrt[3]{ka})^1$,	$(\sqrt[3]{R} - \sqrt[3]{ka})^2$,	$(\sqrt[3]{R} - \sqrt[3]{ka})^3$,	
$(\sqrt[4]{R} - \sqrt[4]{ka})^0$,	$(\sqrt[4]{R} - \sqrt[4]{ka})^1$,	$(\sqrt[4]{R} - \sqrt[4]{ka})^2$,	$(\sqrt[4]{R} - \sqrt[4]{ka})^3$,	

dont les dénominateurs des rapports sont rassemblés dans le tableau de la proposition 132.

"**PROPOSITION 132 : Théorème** : Si de la suite infinie des égaux, on soustrait une suite analogue du premier ordre [...], des racines carrées, des racines cubiques, etc., ces différences et les carrés, les cubes, les quatrièmes puissances, etc. de celles-ci auront le même rapport à la somme des égaux qu'a l'unité au nombre indiqué dans le tableau ci-dessous :

différence de la série d'égaux à la série	égaux [n=0]	résidus [n=1]	carrés [n=2]	cubes [n=3]	4e puis. [n=4]	5e puis. [n=5]	6e puis. [n=6]	7e puis. [n=7]	
nulle	1	1	1	1	1	1	1	1	
égaux	1	2	3	4	5	6	7	8	$(R-a)^n$
racines carrées	1	3	6	10	15	21	28	36	$(\sqrt[2]{R} - \sqrt[2]{a})^n$
racines cubiques	1	4	10	20	35	56	84	120	$(\sqrt[3]{R} - \sqrt[3]{a})^n$
racines quatrièmes	1	5	15	35	70	126	210	330	$(\sqrt[4]{R} - \sqrt[4]{a})^n$
racines cinq.	1	6	21	56	126	252	462	924	$(\sqrt[5]{R} - \sqrt[5]{a})^n$
racines sixièmes	1	7	28	84	210	462	924	1716	$(\sqrt[6]{R} - \sqrt[6]{a})^n$

et ainsi de suite

(...). Chacun des nombres intermédiaires du tableau est la somme des deux termes qui lui sont proches, situés l'un au-dessus, l'autre à gauche."[26]

C'est ici que l'écriture du terme général des indivisibles du cercle sous la forme $(\sqrt[1/2]{R} - \sqrt[1/2]{ka})^{1/2}$ prend tout son sens. En effet, Wallis imagine qu'on va trouver le dénominateur du rapport correspondant, intercalé entre les première et deuxième colonnes et les première et deuxième lignes du tableau de la proposition 132, puisque l'exposant

26 Idem, p.424.

1/2 est la moyenne entre les exposants 0 et 1 et $\sqrt[1/2]{\ }$ est l'intermédiaire entre $\sqrt[0]{\ }$ et $\sqrt[1]{\ }$. C'est pourquoi il exprime que :

"*1/$\square$ sera le rapport de 1 au nombre interposé entre 1 et 2, dans la suite des nombres diagonaux du tableau de la proposition 132. On appellera dorénavant ce nombre* $\square$"[27]

Wallis va donc intercaler une nouvelle ligne et une nouvelle colonne entre chacune d'elles et créer ainsi un grand nombre de cases vides qu'il va remplir sur base de l'observation du comportement des suites d'indices entiers. C'est ainsi qu'il obtient à la proposition 189 un tableau du type suivant :

"**PROPOSITION 189 : Théorème** : [...] Si le nombre désigné par la notation $\square$ est supposé connu, tous les autres seront aussi connus : [...]

	1	2 monades	3	4 nombres latéraux	5	6 nombres triangul.	7	8 nombresp yramid.
1	∞	1	$\frac{1}{2}\square$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}\square$	$\frac{3}{8}$	$\frac{4}{15}\square$	$\frac{15}{48}$
2:monades	1	1	1	1	1	1	1	1
3	$\frac{1}{2}\square$	1	$\square$	$\frac{3}{2}$	$\frac{4}{3}\square$	$\frac{15}{8}$	$\frac{8}{5}\square$	$\frac{105}{48}$
4: nombres latéraux	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{3}{2}$	2	$\frac{5}{2}$	3	$\frac{7}{2}$	4
5	$\frac{1}{3}\square$	1	$\frac{4}{3}\square$	$\frac{5}{2}$	$\frac{8}{3}\square$	$\frac{35}{8}$	$\frac{64}{15}\square$	$\frac{315}{48}$
6: nombres triangulaires	$\frac{3}{8}$	1	$\frac{15}{8}$	3	$\frac{35}{8}$	6	$\frac{63}{8}$	10
7	$\frac{4}{15}\square$	1	$\frac{8}{5}\square$	$\frac{7}{2}$	$\frac{6}{4}\square$	$\frac{63}{8}$	$\frac{128}{15}\square$	$\frac{693}{48}$
8: nombres pyramidaux	$\frac{15}{48}$	1	$\frac{105}{48}$	4	$\frac{315}{48}$	10	$\frac{693}{48}$	20

L'estimation de la valeur de $\square$ se fait, à la proposition 191, à partir de la troisième ligne du tableau ci-dessus :

"**PROPOSITION 191 : Problème** : Nous recherchons ce que vaut le terme $\square$ (du tableau de la proposition 189) le plus près possible en nombres parfaits.

27 Wallis, prop.167, p.441.

Afin de faciliter la recherche, les termes de la progression
$\frac{1}{2}\square$, 1, $\square$, $\frac{3}{2}$, $\frac{4}{3}\square$, $\frac{3\times5}{2\times4}$, $\frac{4\times6}{3\times5}\square$, $\frac{3\times5\times7}{2\times4\times6}$, etc. sont appelés : α, a, β, b, γ, c, δ, d, etc.

[...] $\frac{\beta}{\alpha} = \frac{2}{1}$, $\frac{b}{a} = \frac{3}{2}$, $\frac{\gamma}{\beta} = \frac{4}{3}$, $\frac{c}{b} = \frac{5}{4}$, $\frac{\delta}{\gamma} = \frac{6}{5}$, etc.

C'est ainsi (puisque les rapports obtenus par multiplication continue décroissent perpétuellement) qu'on a

le carré de $\frac{\beta}{a}$ est plus petit que $\frac{a}{\alpha} \times \frac{\beta}{a} = \frac{\beta}{\alpha} = \frac{2}{1}$ et donc $\frac{\beta}{a}$ est plus petit que $\sqrt{2} = \sqrt{1\frac{1}{1}}$

le carré de $\frac{\beta}{a}$ est plus grand que $\frac{\beta}{a} \times \frac{b}{\beta} = \frac{b}{a} = \frac{3}{2}$ et donc $\frac{\beta}{a}$ est plus grand que $\sqrt{\frac{3}{2}} = \sqrt{1\frac{1}{2}}$

et par conséquent $\beta = a \times \frac{\beta}{a} = \square$ est plus petit que

$1\sqrt{2} = 1\sqrt{1\frac{1}{1}}$ et plus grand que $1\sqrt{\frac{3}{2}} = 1\sqrt{1\frac{1}{2}}$." 28

Si on part de l'hypothèse (utilisée mais non justifiée par Wallis) qu'on a toujours, par exemple, pour trois termes consécutifs, x, y, z, de la suite citée plus haut, que $\frac{y}{x} > \frac{z}{y}$ et donc $y^2 > xz$, on peut poursuivre le calcul de la façon suivante :

$1 > \frac{1}{2}\square^2$ d'où $\square < \sqrt{2}$; $\square^2 > \frac{3}{2}$ d'où $\square > \sqrt{3/2}$;
$\frac{3x3}{2x2} > \frac{4}{3}\square^2$ d'où $\square < \frac{3x3}{2x4}\sqrt{4/3}$;
$\frac{4x4}{3x3}\square^2 > \frac{3x3x5}{2x2x4}$ d'où $\square > \frac{3x3}{2x4}\sqrt{5/4}$;
$\frac{3x3x5x5}{2x2x4x4} > \frac{4x4x6}{3x3x5}\square^2$ d'où $\square < \frac{3x3x5x5}{2x2x4x6}\sqrt{6/5}$
et ainsi de suite.

28 Idem, p.467.

Wallis en conclut que :

"$\square$ est plus petit que

$\frac{3x3x5x5x7x7x9x9x11x11x13x13}{2x4x4x6x6x8x8x10x10x12x12x14} \times \sqrt{14/13}$ et

$\square$ est plus grand que

$\frac{3x3x5x5x7x7x9x9x11x11x13x13}{2x4x4x6x6x8x8x10x10x12x12x14} \times \sqrt{15/14}$

Et ainsi de suite jusqu'où on veut. [...]

Et par cette opération, on ira jusqu'à ce que la différence entre le plus grand et le plus petit soit rendue plus petite que toute quantité donnée (qui, par conséquent, s'évanouira finalement si on poursuit l'opération à l'infini)." 29

"Nous disons que la fraction $\frac{3 \times 3 \times 5 \times 5 \times 7 \times 7 \times \text{etc.}}{2 \times 4 \times 4 \times 6 \times 6 \times 8 \times \text{etc.}}$ ou $\frac{9 \times 25 \times 49 \times 81 \text{ etc.}}{8 \times 24 \times 48 \times 80 \text{ etc.}}$ se poursuivant à l'infini est exactement le nombre recherché $\square$" 30

Difficile de comprendre où et quand il effectue un passage à la limite pour arriver à l'expression finale. Ce qu'il veut réellement montrer, c'est que la suite des minorants et la suite des majorants ont la même limite et qu'il s'ensuit que la valeur de $\square$, coincée entre ces deux suites, est donc nécessairement égale à cette multiplication continue poursuivie à l'infini.

Cette formule, dite "formule de Wallis", est la première écrite sous la forme d'un produit infini qui n'implique que des opérations sur les rationnels. Voilà donc bien l'objectif de notre auteur atteint, puisqu'il avait la conviction profonde qu'à défaut de pouvoir écrire la quadrature du cercle de façon exacte, il pourrait au moins l'approcher à l'aide de "vrais nombres".

"Aussi, il nous semble avoir approché la quadrature du cercle autant que la nature du nombre le permet. Et celui qui exige de pousser les recherches plus loin se comporte tout à fait comme s'il postulait d'exprimer $\sqrt{2}$ en vrais nombres, ce qui

29 Idem, p.468.
30 Idem, p.469.

serait une exigence déplacée. Entretemps, je n'ignore pas que cette quantité inexplicable peut se noter d'autres façons et qu'on peut arriver par d'autres méthodes à des valeurs proches de nombres vrais (comme ceci peut se dire des nombres sourds) et, à ce sujet, je n'ai pas de conseil à donner aux mathématiciens, mais je laisserai chacun libre de se servir de la notation qu'il préfère."[31]

En guise de conclusion

Ces quelques points de l'oeuvre de Wallis ont pu mettre en évidence un des aspects important des mathématiques, trop souvent absent des traités et des manuels anciens ou modernes, à savoir celui de la découverte. Comment accède-t-on à un énoncé mathématique ? L'"Arithmetica Infinitorum" nous en donne un exemple.

Ce travail est une suite de conjectures obtenues sur base d'une recherche d'analogies qui amènent à extrapoler ou interpoler de nouveaux résultats.

Les deux outils abondamment utilisés par l'auteur, à savoir l'analogie et l'interpolation, cachent tous deux une intuition du chercheur. Cette façon de procéder comporte une part de risque puisqu'il s'agit souvent d'étendre des résultats acquis à des situations nouvelles. Wallis ne cherche pas à justifier sa méthode autrement que par la cohérence globale de sa théorie.

Son traité nous confirme dans l'idée que faire des mathématiques, c'est bien plus que prouver des vérités, mais que c'est aussi, pour une large part, observer des phénomènes, comparer et combiner des observations, ouvrir des brèches et, à partir de là, énoncer des conjectures. Ensuite vient la phase de la recherche de certitude où démonstrations et contre-exemples s'affrontent pour faire progresser la connaissance.

[31] Idem, p.360.

Bibliographie

BARBIN E., *La démonstration mathématique : significations épistémologiques et questions didactiques,* bulletin APMEP n° 366, décembre 1988.

BARBIN E., *Heuristique et démonstration en mathématiques: la méthode des Indivisibles au XVIIe siècle,* Fragments d'histoire des mathématiques no 2, brochure APMEP 65, 1987.

BOYER C. B., *The History of the Calculus and its conceptual development,* Dover, N.Y.1959.

CHEVALIER A., *Une étude de L'"Arithmetica Infinitorum" de John Wallis,* mémoire de D.E.A. en Histoire de Sciences et des Techniques, sous la direction de F. De Gandt, Universités de Lille I et III, octobre 1992.

DE GANDT F., *Naissance et Métamorphose d'une Théorie mathématique; la Géométrie des Indivisibles en Italie (Galilée, Cavalieri, Torricelli),* Fragments d'Histoire des Mathématiques n°2, Brochure APMEP n°65, 1987.

FERMAT, Oeuvres, tomes 2 et 3,

MONTUCLA J.E., *Histoire des recherches sur la quadrature du cercle,* Paris 1754, reproduit par Irem-Paris VII, 1986.

Numéro Spécial Π, Supplément au Petit Archimède no 64-65, mai 1980.

POLYA G., *Induction and Analogy in Mathematics,* Princeton University Press, 1954.

ROBERVAL, G.P. *Traité des Indivisibles* dans Mémoires de l'Académie Royale des Sciences depuis 1666 jusqu'à 1699, volume VI, Paris, 1730.

SCOTT J.F., *The Mathematical Work of John Wallis,* Taylor and Francis, Oxford, 1938.

STRUIK J., *A source book in Mathematics,* 1200-1800, Princeton university Press, Princeton, New Jersey, 1967.

WALLIS John, *Arithmetica Infinitorum sive Nova Methodus Inquirendi in Curvilineorum Quadraturam, aliaque difficiliora Matheseos Problemata,* Oxford, 1656.

WALLIS J. *Opera,* 3 volumes, Oxford, 1695-1699.